



Table des matières

1	Équations différentielles	1
---	-------------------------------------	---

1

Équations différentielles

1	Introduction	2
1	Définition	2
2	Domaines d'application	2
a	Autres notations	2
b	Circuit RC en série (Sciences Physiques)	2
c	Oscillation simple non amortie (Sciences Physiques)	3
d	Équation de Malthus (SES)	3
2	Équations différentielles du type $y' = ay$	3
3	Équations différentielles du type $y' = ay + b$	4
4	Équations différentielles du type $y' = ay + f$	4
	Exercices types	6
	Exercices	8
	Équations différentielles du type $y' = ay$	8
	Équations différentielles du type $y' = ay + b$	8
	Équations différentielles du type $y' = ay + f$	9
	Corrigés des exercices	11

Dans ce chapitre

1 Introduction

1 Définition

Définition 1

On appelle *équation différentielle* toute équation où l'inconnue est une fonction et où l'inconnue est dérivée au moins une fois.

Remarque 1

L'inconnue est souvent notée y , mais ce n'est pas une généralité.

Exemple 1

- $y' = y + 2$ est une équation différentielle d'ordre 1 (car la fonction est dérivée une fois).
Résoudre cette équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions y dont la dérivée est égale à $y + 3$.
- $y'' + y' + y = x$ est une équation différentielle d'ordre 2 (car la dérivée seconde intervient).

Remarque 2

Les équations différentielle dont l'ordre est strictement supérieur à 1 ne sont pas au programme de l'enseignement de spécialité de Terminale.

2 Domaines d'application

a Autres notations

Plutôt que d'écrire par exemple :

$$y' = y + 2$$

les physiciens aiment à écrire :

$$\frac{dy}{dt} = y + 2.$$

Dans ce cas, y désigne une fonction dont la variable est t (très souvent, le *temps*).

« $\frac{dy}{dt}$ » désigne alors la dérivée de $y(t)$ par rapport à la variable t .

On peut aussi voir la notation :

$$\dot{y}(t) = y(t) + 2.$$

Le point au-dessus de la fonction y signifie que l'on a dériver une fois la fonction ; on mettra donc deux points pour la dérivée seconde) :

$$\ddot{y}(t) = \dot{y}(t) \iff \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{dx(t)}{dt} = \iff y'' = y'.$$

b Circuit RC en série (Sciences Physiques)

Lors de la charge d'un condensateur dans un circuit RC en série soumis à une tension constante E , l'équation différentielle régissant la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur est :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}.$$

À l'aide de ce cours, vous saurez trouver l'expression de $u_C(t)$.

c Oscillation simple non amortie (Sciences Physiques)

Les mouvements périodiques dont on néglige les effets de frottement qui vont le ralentir (comme l'allongement du ressort $x(t)$ à un temps t) peuvent être modélisés par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

C'est une équation différentielle du second ordre. On ne saura donc pas la résoudre en Terminale... mais les solutions sont les fonctions $x(t)$ telles que :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad , \quad A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}.$$

d Équation de Malthus (SES)

La croissance d'une population, ou celle d'un capital à taux constant, peut être modéliser (selon le *modèle de Malthus*) par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

où P est la population (ou le capital), t le temps, et k une constante positive.

2 Équations différentielles du type $y' = ay$

Définition 2

Soit a un nombre réel. Résoudre l'équation $y' = ay$ d'inconnue y signifie trouver toutes les fonctions y dont la dérivée est égale à ay .

Remarque 3

Une *différentielle* est, dans le vocabulaire scientifique, une dérivée. C'est la raison pour laquelle une équation où l'inconnue est une fonction qui est dérivée au moins une fois est qualifiée d'*équation différentielle*.

Exemple 2

1 $y' + y = 0$ est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -1$ car :

$$y' + y = 0 \iff y' = -y.$$

2 $y' = \frac{1}{2}y$ est aussi une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = \frac{1}{2}$.

Propriété 1

L'équation :

$$y' = ay$$

admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$y(x) = Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque 4

Il existe donc une infinité de solutions, définie à une constante C près.

Exemple 3

L'équation différentielle $y' = -y$ admet pour solutions :

$$y(x) = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On peut facilement vérifier en calculant sa dérivée :

$$y'(x) = -Ce^{-x} = -y(x).$$

3 Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété 2

Soient a et b deux réels. L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet pour solutions les fonctions y telles que :

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4

L'équation différentielle $y' = 3y + 7$ admet pour solutions :

$$y(x) = Ce^{3x} - \frac{7}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On peut vérifier en calculant sa dérivée :

$$y'(x) = 3Ce^{3x}$$

puis en calculant :

$$y'(x) - 3y(x) = 3Ce^{3x} - 3\left(Ce^{3x} - \frac{7}{3}\right)$$

$$y'(x) - 3y(x) = 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} + 3 \times \frac{7}{3}$$

$$y'(x) - 3y(x) = 7.$$

On a bien : $y' - 3y = 7$, soit $y' = 3y + 7$.

4 Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Définition 3 (équation homogène associée)

Soit f une fonction. On appelle *équation homogène associée* à l'équation $y' = ay + f$ l'équation différentielle $y' = ay$.

Remarque 5

Si on note (E) l'équation $y' = ay + f$, on note (E₀) son équation homogène associée.

Pour résoudre l'équation $y' = ay + f$, on utilise la méthode suivante :

Methode 1

- **On résout d'abord (E₀).**

On trouve les solutions de l'équation homogène associée à (E) :

$$y_0(x) = Ce^{ax}.$$

- **On trouve une solution particulière de (E).**

On la note par exemple u ; dans ce cas, on a :

$$u'(x) - au(x) = f(x).$$

- **On ajoute les solutions.**

Les solutions de (E) sont alors :

$$y(x) = y_0(x) + u(x).$$

Remarque 6

En Terminale, une solution particulière vous sera proposée la plupart du temps.

Exemple 5

On considère l'équation différentielle :

$$y' = -2y + x^2. \quad (\text{E})$$

- **On résout l'équation homogène associée à (E).**

$$y' = -2y \quad (\text{E}_0)$$

admet pour solutions :

$$y_0(x) = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- **Solution particulière de (E).**

On pose $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. On souhaite montrer que y_1 est une solution particulière de (E). On calcule pour cela sa dérivée :

$$y_1'(x) = x - \frac{1}{2}.$$

Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned} -2y_1(x) + x^2 &= -2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) + x^2 \\ &= -x^2 + x - \frac{1}{2} + x^2 \\ &= x - \frac{1}{2} \\ &= y_1'(x). \end{aligned}$$

y_1 est donc bien solution de (E).

- **On conclut en ajoutant les deux résultats.**

Les solutions de (E) sont donc :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1

Exercices types

Exercice type 1 ► équation différentielle du type $y' = ay$

- 1 Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y

$$y' + 3y = 0.$$

- 2 Trouver la solution f dont l'image de 0 est égale à 3.

1 $y' + 3y = 0 \iff y' = -3y$
 $\iff \boxed{y(x) = Ce^{-3x}}, \quad C \in \mathbb{R}$ (d'après le cours).

- 2 On cherche la fonction $f(x) = Ce^{-3x}$ telle que $f(0) = 3$.

$$\begin{aligned} f(0) = 3 &\iff Ce^{-3 \times 0} = 3 \\ &\iff C \times 1 = 3 \\ &\iff C = 3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = 3e^{-3x}}$$

Exercice type 2 ► équation différentielle du type $y' = ay + b$

- 1 Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$y' - 5y = 1.$$

- 2 Trouver la solution f qui s'annule en 0.

1 $y' - 5y = 1 \iff y' = 5y + 1$
 $\iff \boxed{y(x) = Ce^{5x} - \frac{1}{5}}, \quad C \in \mathbb{R}$ (d'après le cours)

- 2 On cherche la solution f telle que $f(0) = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\iff Ce^{5 \times 0} - \frac{1}{5} = 0 \\ &\iff C \times 1 = \frac{1}{5} \\ &\iff C = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{5}e^{5x} - \frac{1}{5}}$$

Exercice type 3 ► équation différentielle du type $y' = ay + f$

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$y' = -2y + x \quad (E)$$

- 1 Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E) :

$$y' = -2y \quad (E_0)$$

- 2 Montrer que $u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une solution particulière de (E) .

- 3 En déduire les solutions de (E) .

- 4 Déterminer la solution f de (E) qui s'annule en 0.

- 1 D'après le cours, l'équation (E_0) : $y' = -2y$ admet pour solutions les fonctions :

$$x \mapsto Ce^{-2x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

- 2 Afin de vérifier que $u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution de (E) , on doit vérifier que $u'(x) = -2u(x) + x$.

$$u'(x) = \frac{1}{2}$$

et

$$\begin{aligned} -2u(x) + x &= -2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + x \\ &= -x + \frac{1}{2} + x \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u'(x) = -2u(x) + x.$$

Donc u est bien une solution de (E) .

- 3 D'après le cours, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$y(x) = Ce^{-2x} + u(x) \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

soit :

$$y(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

- 4 La solution f qui s'annule en 0 est telle que :

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\iff Ce^0 + \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{4} = 0 \\ &\iff C = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Donc,

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Équations différentielles du type $y' = ay$

Exercice 1.1

Résoudre les équations différentielles suivantes.



1 $y' = 5y$

2 $y' = -7y$

3 $y' = 12y$

Solution page 11

Exercice 1.2

Résoudre les équations différentielles suivantes.



1 $y' + 4y = 0$

2 $y' - 2y = 0$

3 $y' + \frac{1}{3}y = 0$

Solution page 11

Exercice 1.3

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$y' + \alpha y = 0 \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (E)$$



1 Résoudre (E) .

2 Trouver la solution f de (E) telle que $f(1) = 1$.

Solution page 11

Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Exercice 1.4

Résoudre les équations différentielles suivantes.



1 $y' = y + 1$

2 $2y' = 4y + 1$

3 $y' = -y + 2$

Solution page 11

Exercice 1.5

Résoudre les équations différentielles suivantes.



1 $y' + 3y = -5$

2 $3y' + 2y = 1$

3 $y = y' + 3$

Solution page 12

Exercice 1.6



On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$5y' + 2y = 7. \quad (E)$$



- 1 Résoudre (E).
- 2 Trouver la solution f de E telle que $f(-1) = 3$.

Solution page 12

Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Exercice 1.7



On pose :

$$y' = 2y - x^3. \quad (E)$$



- 1 Montrer que $y_1(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$ est une solution particulière de (E).
- 2 En déduire toutes les solutions de (E).

Solution page 12

Exercice 1.8



On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + 5y = 12 \cos(x) \quad (E)$$



- 1 Résoudre l'équation homogène associée à (E) : $y' + 5y = 0$.
- 2 a. On pose $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$.
Trouver la valeur de a et b pour que f soit solution de (E).
b. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution page 13

Exercice 1.9



On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2y = 7 \sin(x) \quad (E)$$



- 1 Résoudre l'équation homogène associée à (E) : $y' - 2y = 0$.
- 2 a. On pose $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$.
Trouver la valeur de a et b pour que f soit solution de (E).
b. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution page 13

Exercice 1.10 (prendre des initiatives)



Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 5y = x \quad (E)$$



Solution page 14

Exercice 1.11



On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 7y = x^2 \quad (E)$$



- 1** Résoudre l'équation homogène associée à (E) suivante :

$$y' - 2y = 0 \quad (E_0)$$

- 2** Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une solution particulière de (E).
Trouver a , b et c .

- 3** Résoudre (E).

Solution page 14

Exercice 1.12



On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2y = xe^x \quad (E)$$



- 1** Résoudre l'équation homogène associée à (E) suivante :

$$y' - 2y = 0 \quad (E_0)$$

- 2** Soient a et b deux réels, et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = (ax + b)e^x.$$

- a.** Déterminer a et b pour que u soit solution de (E).
- b.** Montrer que v est solution de (E_0) si et seulement si $u + v$ est solution de (E).
- c.** En déduire l'ensemble des solutions de (E).

- 3** Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

Solution page 15

Exercice 1.13 (changement de variable)



On considère l'équation différentielle :

$$u' = 3u - 0,005u^2 \quad (E)$$



On considère les solutions u de (E) ne s'annulant pas. On pose alors $y = \frac{1}{u}$.

- 1** Montrer l'équivalence suivante :

$$u \text{ solution de } (E) \iff y' = -3y + 0,005.$$

- 2** En déduire les solutions de (E).

Solution page 15

Corrigé de l'exercice 1.1 page 8

On utilise la formule du cours pour résoudre toutes ces équations.

$$1 \quad y' = 5y \iff y(x) = Ce^{5x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$2 \quad y' = -7y \iff y(x) = Ce^{-7x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$3 \quad y' = 12y \iff y(x) = Ce^{12x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 1.2 page 8

$$1 \quad y' + 4y = 0 \iff y' = -4y \iff y(x) = Ce^{-4x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$2 \quad y' - 2y = 0 \iff y' = 2y \iff y(x) = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$3 \quad y' + \frac{1}{3}y = 0 \iff y' = -\frac{1}{3}y \iff y(x) = Ce^{-\frac{1}{3}x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 1.3 page 8

1 D'après le cours,

$$\begin{aligned} y' + \alpha y = 0 &\iff y' = -\alpha y \\ &\iff y(x) = Ce^{-\alpha x}, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2 On cherche la solution f telle que :

$$\begin{aligned} f(1) = 1 &\iff Ce^{-\alpha \times 1} = 1 \\ &\iff C = e^{\alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = e^{\alpha} \times e^{-\alpha x}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$f(x) = e^{\alpha(1-x)}$$

Corrigé de l'exercice 1.4 page 8

D'après le cours, on a :

$$1 \quad y' = y + 1 \iff y'(x) = Ce^x - \frac{1}{1} = Ce^x - 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$2 \quad 2y' = 4y + 1 \iff y' = 2y + \frac{1}{2} \iff y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{4} = Ce^{2x} - \frac{1}{4}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$3 \quad y' = -y + 2 \iff y(x) = Ce^{-x} - \frac{2}{-1} = Ce^{-x} + 2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 1.5 page 8

$$1 \quad y' + 3y = -5 \iff y' = -3y - 5 \iff y(x) = Ce^{-3x} - \frac{5}{-3} = \boxed{Ce^{-3x} + \frac{5}{3}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$2 \quad 3y' + 2y = 1 \iff y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3} \iff y(x) = Ce^{\frac{2}{3}x} - \frac{1/3}{-2/3} = \boxed{Ce^{\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$3 \quad y = y' + 3 \iff y' = y - 3 \iff y'(x) = Ce^x - \frac{-3}{1} = \boxed{Ce^x + 3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 1.6 page 9

1 D'après le cours,

$$\begin{aligned} 5y' + 2y = 7 &\iff -\frac{2}{5}y + \frac{7}{5} \\ &\iff y(x) = Ce^{-\frac{2}{5}x} - \frac{\frac{7}{5}}{-\frac{2}{5}}, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\iff \boxed{y(x) = Ce^{-\frac{2}{5}x} + \frac{7}{2}}, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2 On cherche la solution f de (E) telle que :

$$\begin{aligned} f(-1) = 3 &\iff Ce^{-\frac{2}{5} \times (-1)} + \frac{7}{2} = 3 \\ &\iff Ce^{\frac{2}{5}} + \frac{7}{2} = 3 \\ &\iff Ce^{\frac{2}{5}} = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} \\ &\iff C = -\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{5}} \times e^{-\frac{2}{5}x} + \frac{7}{2}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{5}(x+1)} + \frac{7}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 1.7 page 9

$$1 \quad y_1(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} \text{ donc : } y_1'(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} y_1'(x) - 2y_1(x) &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} - 2\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}\right) \\ &= -x^3. \end{aligned}$$

Ainsi, $y_1'(x) = 2y_1(x) - x^3$. La fonction y_1 est donc une solution de (E).

2 De la solution particulière $y_1(x)$, on déduit que l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions :

$$y(x) = y_1(x) + y_0(x)$$

où $y_0(x)$ sont les solutions de l'équation homogène associée à (E), donc de la forme :

$$y_0(x) = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, les solutions de (E) sont :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Corrigé de l'exercice 1.8 page 9

1 D'après le cours, (E_0) a pour solutions :

$$y_0(x) = Ce^{-5x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

2 a. $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x) \Rightarrow f'(x) = -a \sin(x) + b \cos(x)$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E)} &\iff f'(x) + 5f(x) = 12 \cos(x) \\ &\iff -a \sin(x) + b \cos(x) + 5(a \cos(x) + b \sin(x)) = 12 \cos(x) \\ &\iff (5a + b - 12) \cos(x) + (-a + 5b) \sin(x) = 0 \\ &\iff \begin{cases} 5a + b = 12 \\ a = 5b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 6b = 12 \\ a = 5b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 2 \\ a = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = 10 \cos(x) + 2 \sin(x) \text{ est une solution particulière de (E).}$$

b. On déduit de ce qui précède que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions :

$$y(x) = 10 \cos(x) + 2 \sin(x) + Ce^{-5x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Corrigé de l'exercice 1.9 page 9

1 D'après le cours, (E_0) a pour solutions :

$$y_0(x) = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

2 a. $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x) \Rightarrow f'(x) = -a \sin(x) + b \cos(x)$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E)} &\iff f'(x) - 2f(x) = 7 \sin(x) \\ &\iff -a \sin(x) + b \cos(x) - 2(a \cos(x) + b \sin(x)) = 7 \sin(x) \\ &\iff (-2a + b) \cos(x) + (-a - 2b - 7) \sin(x) = 0 \\ &\iff \begin{cases} -2a + b = 0 \\ -a - 2b = 7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 2a \\ -a - 2(2a) = 7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 2a \\ a = -\frac{7}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

$$f \text{ solution de (E)} \iff \begin{cases} b = -\frac{14}{5} \\ a = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Ainsi,

$$f(x) = -\frac{14}{5} \cos(x) - \frac{7}{5} \sin(x) \text{ est une solution particulière de (E).}$$

b. On déduit de ce qui précède que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions :

$$y(x) = -\frac{14}{5} \cos(x) - \frac{7}{5} \sin(x) + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Corrigé de l'exercice 1.10 page 9

- L'équation homogène associée $(E_0) : y' - 5y = 0$ admet pour solutions :

$$y_0(x) = Ce^{5x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- On cherche une solution particulière de (E) de la forme $u(x) = ax + b$ (car le second membre de (E) est une fonction affine). Ainsi,

$$\begin{aligned} u'(x) - 5u(x) &= x \iff (ax + b) - 5(ax + b) = x \\ &\iff ax + (b - 5a) = x \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b - 5a = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, $u(x) = x + 5$ est une solution particulière de (E).

- On en déduit alors que les solutions de (E) sont :

$$y(x) = x + 5 + Ce^{5x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Corrigé de l'exercice 1.11 page 10

- 1 D'après le cours, (E_0) a pour solutions les fonctions :

$$y_0(x) = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

- 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une solution particulière de (E)

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - 2f(x) = x^2$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x^2$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, -2ax^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c) = x^2$$

$$\iff \begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \iff a = -\frac{1}{2}, \quad b = a = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}b = -\frac{1}{4}$$

Ainsi, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une solution particulière de (E)

3 D'après le cours, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$y(x) = f(x) + y_0(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Corrigé de l'exercice 1.12 page 10

1 D'après le cours, (E_0) a pour solutions les fonctions :

$$y_0(x) = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

2 a. $u'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$.

$$u \text{ solution de (E)} \iff \forall x \in \mathbb{R}, u' - 2u = xe^x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (ax - 2ax + a + b - 2b)e^x = xe^x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (-ax + a - b)e^x = xe^x$$

$$\iff \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = -1 \text{ et } b = a = -1.$$

Finalement, on obtient :

$$u(x) = (-x - 1)e^x$$

b. $(u + v)$ solution de (E) $\iff (u + v)' - 2(u + v) = xe^x$

$$\iff \underbrace{(u' - 2u)}_{=xe^x} + (v' - 2v) = xe^x$$

$$\iff v' - 2v = 0$$

$$\iff v \text{ solution de } (E_0).$$

c. D'après la question précédente, y est solution de (E) si et seulement si :

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

$$y(x) = (-x - 1)e^x + Ce^{2x}$$

3 On souhaite que $y(0) = 0 \iff (-0 - 1)e^0 + Ce^{2 \times 0} = 0$

$$\iff -1 + C = 0$$

$$\iff C = 1$$

Ainsi, la solution de (E) qui s'annule en 0 est la fonction :

$$f(x) = (-x - 1)e^x + e^{2x}$$

Corrigé de l'exercice 1.13 page 10

1 Si $y = \frac{1}{u}$ alors $y' = -\frac{u'}{u^2}$ et alors $u' = -y'u^2$. Donc :

$$\begin{aligned} u \text{ solution de (E)} &\iff u' = 3u - 0,005u^2 \\ &\iff -y'u^2 = 3 \times \frac{1}{y} - 0,005 \times \frac{1}{y^2} \\ &\iff -y' \times \frac{1}{y^2} = 3 \times \frac{1}{y} - 0,005 \times \frac{1}{y^2} \\ &\iff -y' = 3y - 0,005 \quad (\text{en multipliant par } y^2) \\ &\iff y' = -3y + 0,005. \end{aligned}$$

2 L'équation différentielle $y' = -3y + 0,005$ est de la forme $y' = ay + b$, dont les solutions sont $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $-\frac{b}{a} = \frac{0,005}{3} = \frac{1}{600}$; ainsi, ses solutions sont :

$$y(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{600}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On en déduit alors que l'équation différentielle (E) admet pour solutions les fonctions :

$$u(x) = \frac{1}{y(x)} = \frac{600}{600Ce^{-3x} + 1}.$$