Dénombrement

Notre objectif est ici purement pratique — APPRENDRE À COMPTER. Nous omettrons pour cette raison la plupart des démonstrations de ce chapitre, souvent difficiles, conformément au programme de MPSI.

1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition-théorème (Ensemble fini/infini, cardinal d'un ensemble fini) Soit E un ensemble.

- **Ensemble fini/infini :** On dit que E est *fini* s'il est vide ou si, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E. On dit dans le cas contraire que E est *infini*.
- **Cardinal :** Si E est fini non vide, l'entier n de la définition précédente est unique, appelé le *cardinal de* E ou *nombre d'éléments de* E et noté $|E|$ (ou $\mathrm{Card}(E)$ ou $\#E$). Par convention : $|\varnothing| = 0$.

Exemple Pour tous $m,n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $m \leqslant n$, l'ensemble $[\![m,n]\!]$ est fini de cardinal $n-m+1$.

Démonstration La fonction $k \longmapsto k+m-1$ est bijective de $[\![1,n-m+1]\!]$ sur $[\![m,n]\!]$ de réciproque $k \longmapsto k-m+1$.

Théorème (Équipotence et cardinal) Soient E et F deux ensembles. Si E est fini et s'il existe une bijection de E sur F, alors F est fini et $|E| = |F|$.

Démonstration Dans le cas où E est non vide, nous pouvons nous donner une bijection f de $[\![1,|E|]\!]$ sur E et une bijection g de E sur F. L'application $g \circ f$ est alors bijective de $[\![1,|E|]\!]$ sur F, donc d'une part F est fini, et d'autre part $|F| = |E|$ par unicité du cardinal.

Théorème (Parties d'un ensemble fini) Soient E un ensemble fini et A une partie de E.
Alors A est finie et $|A| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $A = E$.

Pour montrer que deux ensembles FINIS A et B sont égaux, on peut se contenter de montrer que $A \subset B$ et $|A| = |B|$ au lieu de montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Théorème (Effet d'une application sur le cardinal) Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

(i) Si f est injective et si F est fini, alors E aussi est fini et $|E| \leqslant |F|$, avec égalité si et seulement si f est bijective.

(ii) Si f est surjective et si E est fini, alors F aussi est fini et $|F| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si f est bijective.

(iii) Si E et F sont FINIS DE MÊME CARDINAL : f est bijective $\iff$ f est injective $\iff$ f est surjective.

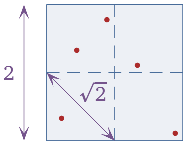
Dire que f est injective, c'est dire que deux points distincts de E sont envoyés par f sur deux points distincts de F, i.e. que $f(E)$ est comme une copie de E dans F. Une telle copie n'est possible que si F est « plus gros » que E, i.e. si $|E| \leqslant |F|$ — assertion (i).

Dire que f est surjective, c'est dire qu'à travers f, E couvre F en totalité. Une telle couverture n'est possible que si E est « plus gros » que F, i.e. si $|F| \leqslant |E|$ — assertion (ii).

Théorème (Principe des tiroirs) Quand on range $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, deux chaussettes au moins se retrouvent dans le même tiroir.

Ranger $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, c'est choisir une application d'un ensemble de cardinal $n+1$ dans un ensemble de cardinal n, mais comme $n+1 > n$, une telle application n'est jamais injective — d'où le résultat.

Exemple Étant donnés 5 points dans un carré d'arête 2, on peut toujours en trouver deux distants d'au plus $\sqrt{2}$.



Démonstration Coupons simplement notre carré en quatre comme indiqué ci-contre et prenons les quatre sous-carrés ainsi formés pour tiroirs. Sommés de ranger 5 chaussettes — les 5 points quelconques — dans 4 tiroirs, nous sommes forcés d'en ranger 2 dans le même tiroir d'après le principe des tiroirs. Au pire, ces points sont alors distants de $\sqrt{2}$ — longueur de la diagonale de chaque sous-carré.

2 Dénombrement

2.1 Qu'est-ce que compter ?

Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

— À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

— Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?

— De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?

— Combien d'anagrammes le mot BOROROS possède-t-il ?

— De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? autour d'une table ronde ?

— Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

— Combien un ensemble fini de cardinal n possède-t-il de parties ?

Chacune de ces questions requiert un minimum de théorie mathématique, mais surtout beaucoup de bon sens. Soyez **concrets** ! Pour savoir de combien de façons on peut asseoir n personnes sur un banc rectiligne, ne planez pas dans les hautes sphères, imaginez-vous **concrètement** en train d'asseoir ces personnes et demandez-vous combien de choix s'offrent à vous. Notre règle d'or dans ce chapitre est simple :

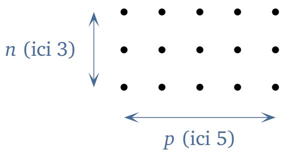
Compter, c'est énumérer/construire.

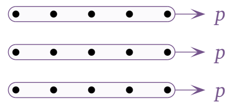
Ok, mais ça veut dire quoi, énumérer et construire ? Nous le comprendrons mieux sur deux exemples.

Exemple Quand nous avons calculé la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ au chapitre « Structure d'espace vectoriel », nous avons commencé par en trouver une base — la base canonique en l'occurrence. Ensuite, compter les vecteurs de cette base revenait à compter les coefficients qu'une matrice de taille $n \times p$ abrite. Et là, nous n'avons pas compté les coefficients un par un, nous nous sommes représenté notre matrice quelconque comme un tableau, plus précisément comme une collection de lignes, et nous avons dit :

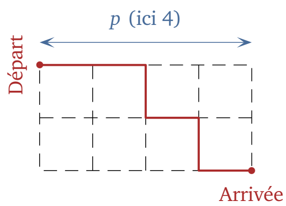
« Ce tableau contient n lignes et chacune contient p cases, donc en tout ce tableau contient $\overbrace{p+\ldots+p}^{n \text{ termes}} = n \times p$ cases. »

Identification du problème : compter les vecteurs de la base canonique. → **Représentation du problème :** sous la forme d'un tableau. → **Dénombrement :** par décomposition du problème.





Exemple La chenille Becky se promène le long d'un grillage plan de taille $2 \times p$ dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?



Un chemin de longueur minimale est exactement un chemin de longueur $p+2$ qui contient p déplacements vers la droite et 2 vers le bas. Chacun peut donc être vu comme un mot de $p+2$ lettres contenant p fois la lettre D et 2 fois la lettre B. Or combien existe-t-il de tels mots ?

Pour construire un tel mot, on n'a finalement qu'à choisir la position des 2 lettres B, car ensuite il n'y a que des D à placer. Or de combien de façons pouvons-nous placer nos 2 lettres B sur un mot vierge de $p+2$ lettres ? Le deuxième B peut être placé en position k pour tout $k \in [\![2, p+2]\!]$. Quant au premier, il peut être placé n'importe où en position $1, 2, \ldots, k-1$, soit un total de $k-1$ positions possibles.

Au total, la chenille Becky peut donc emprunter $\displaystyle\sum_{k=2}^{p+2}(k-1) \overset{i=k-1}{=} \sum_{i=1}^{p+1} i = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ chemins.

Identification du problème : compter les chemins de longueur $p+2$ qui vont p fois à droite et 2 fois vers le bas. $\longrightarrow$ **Représentation du problème :** sous la forme de certains mots.

$$\underbrace{\mathrm{D}\ldots\mathrm{DBD}\ldots\mathrm{DBD}\ldots\mathrm{D}}_{p+2 \text{ lettres}}$$

$\longrightarrow$ **Dénombrement :** par décomposition du problème.

$$\mathrm{D}\ldots\mathrm{D}\overbrace{\boxed{\mathrm{B}}\,\mathrm{D}\ldots\mathrm{D}}^{k-1 \text{ choix}}\underbrace{\boxed{\mathrm{B}}}_{\text{Position } k}\mathrm{D}\ldots\mathrm{D}$$

À présent, pour savoir compter, nous venons de voir qu'il faut savoir énumérer — mais qu'est-ce qu'énumérer ?

Énumérer, c'est ordonner selon un principe de classement RÉFLÉCHI.

Exemple

- Pour énumérer les coefficients d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on les lit généralement en colonnes de gauche à droite et du haut vers le bas — ce choix est bien sûr tout à fait conventionnel !
$$a_{1,1}, \quad a_{2,1}, \quad a_{3,1}, \quad \ldots \quad a_{n,1}, \quad a_{1,2}, \quad a_{2,2}, \quad a_{3,2}, \quad \ldots \quad a_{n-2,p}, \quad a_{n-1,p}, \quad a_{n,p}.$$
- Pour énumérer les mots de 4 lettres qu'on peut former avec l'alphabet $\{€, ¥, \$\}$, l'ordre lexicographique — i.e. l'ordre du dictionnaire — est a priori le plus naturel. Cet ordre suppose bien sûr qu'on ait imposé un ordre à l'alphabet lui-même. Exemple d'énumération lexicographique :

  €€€€, €€€¥, €€€$, €€¥€, €€¥¥, €€¥$, €€$€, €€$¥, €€$$, … $$$¥, $$$$.
- Pour énumérer ci-dessus les chemins de la chenille Becky, on a en fait énuméré les mots de $n+2$ lettres qui contiennent n fois la lettre D et 2 fois la lettre B. Exemple d'énumération lexicographique pour $n=3$:

  BBDDD, BDBDD, BDDBD, BDDDB, DBBDD, DBDBD, DBDDB, DDBBD, DDBDB, DDDBB.

Exemple Combien l'ensemble $[\![1,3]\!]$ a-t-il de parties ?

Démonstration La réponse est 6.

- **Énumération lexicographique en fonction du cardinal :**
$$\varnothing, \quad \{1\}, \quad \{2\}, \quad \{3\}, \quad \{1,2\}, \quad \{1,3\}, \{2,3\}, \quad \{1,2,3\}.$$
- **Énumération lexicographique après représentation par des mots :** On peut associer bijectivement à toute partie A de $[\![1,3]\!]$ un et un seul mot de 3 lettres sur l'alphabet $\{0,1\}$. De quelle manière ? La première lettre de ce mot est un 1 si $1 \in A$ et un 0 sinon, la deuxième lettre est un 1 si $2 \in A$ et un 0 sinon, etc. Par exemple, $\varnothing$ est représenté par le mot 000, $\{2\}$ par 010 et $\{2,3\}$ par 011. Ainsi codées, les parties de $[\![1,3]\!]$ sont faciles à énumérer lexicographiquement :

  000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111.

✖ Attention ! Dans tout ce qui suit, les lettres $E, F, E_1, \ldots, E_p, A, B, C, A_1, \ldots, A_n$ désignent des ensembles FINIS.

2.2 Réunion et différence

On rappelle que les réunions DISJOINTES sont souvent notées avec le symbole $\sqcup$ plutôt qu'avec le symbole $\cup$.

Théorème (Cardinal d'une réunion, cardinal d'une différence)

- **Réunion :** $\left|A \cup B\right| = |A| + |B| - \left|A \cap B\right|$. En particulier, si A et B sont disjoints : $\left|A \sqcup B\right| = |A| + |B|$.

  Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints : $\displaystyle\left|\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$.
- **Différence :** $\left|A \setminus B\right| = |A| - \left|A \cap B\right|$. En particulier, si $B \subset A$: $\left|\overline{B}\right| = \left|A \setminus B\right| = |A| - |B|$.

Pour calculer $\left|A\cup B\right|$, on additionne $|A|$ et $|B|$ pour tenir compte des éléments de A et B, mais en faisant cela on compte deux fois ceux de $A\cap B$, donc il faut les retrancher une fois.

Lorsque les ensembles $A_1,\ldots,A_n$ sont **DISJOINTS DE MÊME CARDINAL**, la formule $\left|\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$ porte le joli nom de *principe des bergers* :

Théorème (Principe des bergers) Toute réunion **DISJOINTE** de n ensembles de même cardinal p est un ensemble de cardinal np.

Tout ça pour dire qu'un berger qui possède n moutons possède aussi $4n$ pattes de moutons !

Le principe des bergers est sans doute le principe que nous utiliserons le plus dans ce chapitre. Comment l'utiliserons-nous ? Quand un problème de dénombrement a été décomposé intellectuellement en deux sous-problèmes « étape 1 » et « étape 2 » avec n choix possibles pour l'étape 1 et p choix possibles **POUR CHACUN DE CES CHOIX** dans l'étape 2, le problème complet offre un total de np choix.

Exemple Nous avons utilisé le principe des bergers sans le dire en calculant $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Un tableau de taille $n\times p$ contient n lignes et chaque ligne contient p cases, donc un tel tableau contient np cases.

Exemple Combien y a-t-il de couples (x,y) dans $[\![1,n]\!]^2$ pour lesquels $x\neq y$?

Démonstration Construire un tel couple, c'est par exemple d'abord choisir x, puis choisir y. Il y a n valeurs possibles de x et, pour chacune de ces valeurs, $n-1$ valeurs restantes pour y — donc en tout $n(n-1)$ couples possibles.

Exemple À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Démonstration Pour la première lettre, on peut choisir n'importe quelle lettre de l'alphabet (p possibilités), mais pour chacune des suivantes, on n'a plus que $p-1$ choix possibles si on veut éviter que deux lettres consécutives soient identiques — d'où un total de $p(p-1)^{n-1}$ mots.

Mais finalement, addition ou multiplication ? En résumé :

« On a **SOIT** ceci, **SOIT** cela »	$\longrightarrow$	**ADDITION.**
« On fait ceci, **PUIS** cela »	$\longrightarrow$	**MULTIPLICATION.**

Exemple Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ qu'on tire successivement sans remise. Combien de tirages peut-on faire pour lesquels un numéro pair est toujours suivi d'un numéro impair et un numéro impair d'un numéro pair ?

Démonstration Les tirages à dénombrer sont de deux types, il y a ceux qui commencent par un numéro pair et ceux qui commencent par un numéro impair. Nous allons dénombrer séparément ces deux ensembles de tirages et nous **ADDITIONNERONS** à la fin les deux cardinaux obtenus.

Combien sont-ils à commencer par un numéro pair ? Faire un tel tirage, c'est tirer une boule paire (n possibilités), **PUIS** une boule impaire (n possiblités), **PUIS** de nouveau une boule paire ($n-1$ possibilités), **PUIS** une boule impaire ($n-1$ possibilités)... — d'où un total de $n^2\times(n-1)^2\times\ldots\times 2^2\times 1^2 = n!^2$ tirages.

Un raisonnement analogue montre que $n!^2$ tirages exactement commencent par un numéro impair — d'où un total définitif de $n!^2+n!^2 = 2\times n!^2$.

2.3 Produit cartésien, listes et arrangements

Théorème (Cardinal d'un produit cartésien) $\left|E_1\times\ldots\times E_p\right| = |E_1|\times\ldots\times|E_p|$. En particulier : $\left|E^p\right| = |E|^p$.

Démonstration Pour construire un élément quelconque de $E_1\times\ldots\times E_p$, on peut choisir d'abord un élément dans E_1 ($|E_1|$ possibilités), puis un élément de E_2 ($|E_2|$ possibilités)... et enfin un élément de E_p ($|E_p|$ possibilités) — d'où un total de $|E_1|\times\ldots\times|E_p|$ choix possibles.

Définition-théorème (Liste) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On appelle *p-liste de E* ou *p-uplet de E* toute famille de p éléments de E, i.e. tout élément de E^p.

Si on pose $n=|E|$, il existe n^p p-listes de E.

Dans une liste, l'ordre des éléments compte car une liste n'est jamais qu'une **FAMILLE** — et non pas un ensemble — et un même élément peut figurer plusieurs fois dans une liste.

Les listes sont utilisées pour modéliser des tirages **SUCCESSIFS <u>AVEC</u> REMISE** — les répétitions sont autorisées.

Exemple De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Réponse : 52^5.

Exemple Combien y a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot OUPS tels que BOUPSAR et QIOUPSI ?

Démonstration Quand le mot OUPS apparaît dans un mot de 7 lettres, il n'y apparaît qu'une fois. Pour construire un mot quelconque de 7 lettres contenant le sous-mot OUPS, on peut donc :

— d'abord choisir la position du mot OUPS (4 possibilités car le O initial ne peut occuper que les positions 1, 2, 3 et 4),

— puis choisir arbitrairement les autres lettres, i.e. choisir une 3-liste de l'alphabet (26^3 possibilités),

d'où un total de $4 \times 26^3 = 70\,304$ mots.

Définition-théorème (Arrangement) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *p-arrangement de E* toute p-liste de E d'éléments distincts.

Si on pose $n = |E|$, il existe $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements de E si $p \leqslant n$, et il n'en existe pas si $p > n$.

En particulier, pour $p = n$, il existe $n!$ façons exactement d'ordonner les n éléments de E.

Démonstration Pour construire un p-arrangement dans le cas où $p \leqslant n$, on peut choisir un premier élément dans E (n possibilités), puis un deuxième distinct du premier ($n-1$ possibilités)… et enfin un $p^{\text{ème}}$ distinct des précédents ($n-p+1$ possibilités) — d'où un total de $n \times \ldots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements de E. ∎

Les arrangements sont utilisés pour modéliser des tirages **SUCCESSIFS <u>SANS</u> REMISE** — les répétitions sont interdites.

Exemple De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

Réponse : $\dfrac{52!}{(52-5)!} = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48$.

Exemple De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? autour d'une table ronde ?

Démonstration

- **Banc rectiligne :** On peut considérer que les personnes à asseoir sont numérotées de 1 à n. Les asseoir sur un banc rectiligne revient à les énumérer toutes dans un ordre quelconque, i.e. à se donner un n-arrangement quelconque de $[\![1,n]\!]$ — d'où un total de $n!$ configurations possibles.
- **Table ronde :** La différence entre un banc rectiligne et une table ronde, c'est qu'il n'y a pas de première place autour d'une table ronde — par exemple, on ne change pas la configuration des places assises quand on demande à chaque convive de se déplacer d'une place sur sa droite. Pour asseoir n personnes autour d'une table ronde :

  — on peut ainsi commencer par asseoir arbitrairement la personne numérotée n,

  — puis lui donner des voisins de proche en proche par la droite en se donnant un $(n-1)$-arrangement quelconque de $[\![1,n-1]\!]$ ($(n-1)!$ possibilités),

  d'où un total de $(n-1)!$ configurations possibles.

2.4 Applications entre deux ensembles

On rappelle à toutes fins utiles qu'une p-liste de E n'est jamais qu'une application de $[\![1,p]\!]$ dans E et que réciproquement, la donnée d'une application f de $\{e_1,\ldots,e_p\}$ dans F est équivalente à la donnée de la p-liste $\big(f(e_1),\ldots,f(e_p)\big)$ de F. Il paraît ainsi naturel que les résultats du paragraphe précédent s'étendent aux applications. En particulier, les arrangements sont aux listes ce que les injections sont aux applications.

Théorème **(Nombre d'applications entre deux ensembles)**

(i) **Applications quelconques :** $\left|F^E\right| = |F|^{|E|}$, où F^E désigne l'ensemble des applications de E dans F, aussi noté $\mathscr{F}(E,F)$.

(ii) **Applications injectives :** On pose $p = |E|$ et $n = |F|$. L'ensemble des applications injectives de E dans F est de cardinal $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$, et vide si $p > n$.

(iii) **Permutations :** On appelle *permutation de* E toute bijection de E sur E et *groupe symétrique de* E l'ensemble des permutations de E, noté S_E — ou plutôt S_n dans le cas où $E = [\![1,n]\!]$. Alors $|S_E| = |E|\,!$.

Démonstration

(i) Pour construire une application quelconque f de $E = \{e_1,\ldots,e_p\}$ dans F, on peut choisir une valeur pour $f(e_1)$ ($|F|$ possibilités), puis une pour $f(e_2)$ ($|F|$ possibilités)... et enfin une valeur pour $f(e_p)$ ($|F|$ possibilités) — d'où un total de $|F|^{|E|}$ applications de E dans F.

(ii) Pour construire une application INJECTIVE, on peut suivre la construction (i) mais en s'interdisant de reprendre les valeurs déjà sélectionnées — d'où un total de $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ applications injectives lorsque $p \leqslant n$.

(iii) Une application injective d'un ensemble fini dans un autre ensemble fini DE MÊME CARDINAL est déjà bijective. Le calcul de $|S_E|$ est dès lors une conséquence de (ii), obtenue pour $p = n = |E|$.

Exemple Soit $n \geqslant 3$. Combien y a-t-il de permutations de $[\![1,n]\!]$ qui envoient 1 sur 2 et 2 sur 3 ?

Démonstration Pour en construire une, on peut choisir l'image de 3 ($n-2$ possibilités), puis celle de 4 ($n-3$ possibilités)... et enfin celle de n (1 possibilité) — d'où un total de $(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times 1 = (n-2)!$ permutations.

2.5 COMBINAISONS

Ce paragraphe est essentiellement constitué de rappels du chapitre « Sommes, produits, coefficients binomiaux ».

Définition-théorème **(Coefficients binomiaux, combinaison)**

- **Coefficients binomiaux :** Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on appelle (*coefficient binomial*) *k parmi n* et on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties de cardinal k de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ si $n \in \mathbb{N}^*$, ou de l'ensemble $\varnothing$ si $n = 0$.
- **Combinaison :** Soit $p \in \mathbb{Z}$. On appelle *p-combinaison de E* toute partie de E de cardinal p. Je noterai $\mathscr{P}_p(E)$ l'ensemble des p-combinaisons de E, mais ce n'est pas là du tout une notation standard.

  Si on pose $n = |E|$, le nombre de p-combinaisons de E vaut $\left|\mathscr{P}_p(E)\right| = \binom{n}{p}$.

Dans une combinaison, qui est un ENSEMBLE et non une famille, les éléments sont donnés sans ordre. Quand on décide de numéroter les éléments d'une combinaison, le choix de la numérotation est totalement arbitraire, la combinaison en tant que telle n'a pas un premier élément, un deuxième élément, etc.

Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages SIMULTANÉS.

Démonstration Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. Par définition : $\binom{n}{p} = \left|\mathscr{P}_p\big([\![1,n]\!]\big)\right|$, mais est-il vrai plus généralement que $\left|\mathscr{P}_p(E)\right| = \binom{n}{p}$ si $|E| = n$? Par définition du cardinal, nous pouvons nous donner une bijection φ de $[\![1,n]\!]$ sur E. L'application $X \longmapsto \varphi(X)$ est alors clairement une bijection de $\mathscr{P}_p\big([\![1,n]\!]\big)$ sur $\mathscr{P}_p(E)$ — de réciproque $X \longmapsto \varphi^{-1}(X)$ — donc en effet : $\left|\mathscr{P}_p(E)\right| = \left|\mathscr{P}_p\big([\![1,n]\!]\big)\right| = \binom{n}{p}$.

Exemple De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Réponse : $\binom{52}{5}$.

Théorème (Propriétés des coefficients binomiaux) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

(i) **Expression factorielle :** $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$. Si au contraire $k \in [\![0,n]\!]$:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

(ii) **Symétrie :** $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(iii) **Formule de Pascal :** $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

(iv) **Formule du capitaine :** Pour n et k non nuls : $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Pour montrer certaines égalités $a = b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, on procède parfois par *double comptage* en montrant qu'un ensemble bien choisi est de cardinal a après un premier mode d'énumération et de cardinal b après un second mode d'énumération. Les quatre preuves qui suivent illustrent cette démarche.

Démonstration Les assertions (i), (ii) et (iii) sont triviales dans les cas suivants : $k < 0$, $k > n$, $n = 0$. Nous supposerons désormais $n \geqslant 1$ et k compris entre 0 et n.

(i) Montrons que $\displaystyle\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \times k!$. À gauche, on reconnaît le nombre de k-arrangements de $[\![1,n]\!]$. Il nous suffit dès lors de compter d'une autre manière les k-arrangements de $[\![1,n]\!]$. Or pour construire un k-arrangement de $[\![1,n]\!]$, on peut :

— choisir une k-combinaison X quelconque de $[\![1,n]\!]$ ($\displaystyle\binom{n}{k}$ possibilités),

— puis choisir une façon d'ordonner les k éléments de X ($k!$ posibilités),

d'où au total $\displaystyle\binom{n}{k} \times k!$ k-arrangements de $[\![1,n]\!]$.

(ii) On connaît tout d'une partie de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k quand on connaît son complémentaire. Il y a donc dans $[\![1,n]\!]$ autant de parties de cardinal k que de parties de cardinal $n-k$. Plus formellement, nous venons simplement d'observer que l'application $X \longmapsto \overline{X}$ est une bijection de $\mathscr{P}_k\big([\![1,n]\!]\big)$ sur $\mathscr{P}_{n-k}\big([\![1,n]\!]\big)$ — de réciproque « elle-même » mais avec inversion des ensembles de départ et d'arrivée.

(iii) Intéressons-nous aux $(k+1)$-combinaisons de $[\![1,n+1]\!]$. Il en existe bien sûr $\displaystyle\binom{n+1}{k+1}$, mais nous pouvons les dénombrer autrement en distinguant celles qui contiennent $n+1$ de celles qui ne le contiennent pas. L'entier $\displaystyle\binom{n+1}{k+1}$ sera ainsi égal à la somme des deux cardinaux obtenus.

— Il y a autant de k-combinaisons de $[\![1,n+1]\!]$ qui contiennent $n+1$ que de $(k-1)$-combinaisons de $[\![1,n]\!]$, à savoir $\displaystyle\binom{n}{k-1}$. On passe en effet des unes aux autres en ajoutant ou en ôtant l'élément $n+1$.

— Les k-combinaisons de $[\![1,n+1]\!]$ qui ne contiennent pas $n+1$ sont exactement les k-combinaisons de $[\![1,n]\!]$ et il en existe $\displaystyle\binom{n}{k}$.

(iv) De combien de manières peut-on former une équipe de k entiers de $[\![1,n]\!]$ dont un entier-capitaine ? Nous allons dénombrer ces équipes de deux manières et le résultat en découlera aussitôt.

— On peut commencer par choisir les k membres de l'équipe ($\displaystyle\binom{n}{k}$ possibilités), puis désigner le capitaine après coup parmi eux (k possibilités). On crée ainsi $\displaystyle\binom{n}{k} \times k$ équipes.

— On peut procéder autrement et choisir d'abord le capitaine (n possibilités), puis compléter l'équipe en choisissant les $k-1$ autres membres ($\displaystyle\binom{n-1}{k-1}$ possibilités). On crée cette fois $n \times \displaystyle\binom{n-1}{k-1}$ équipes. ■

Théorème (k-listes strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe $\displaystyle\binom{n}{k}$ familles d'entiers $(i_1,\dots,i_k)$ pour lesquelles $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$.

Démonstration Il y a autant de familles du type étudié que de k-combinaisons de $[\![1,n]\!]$, car il n'y a qu'une seule manière de ranger les éléments d'une k-combinaison de $[\![1,n]\!]$ dans l'ordre croissant. ■

Exemple On appelle *anagramme* d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres avec multiplicité, mais dans un ordre quelconque. Les mots NOSSMOI et SIONSOM sont par exemple deux anagrammes du mot MOISSON. Combien d'anagrammes le mot BOROROS possède-t-il ? — Pour information, les Bororos sont un peuple amérindien du Brésil.

Démonstration

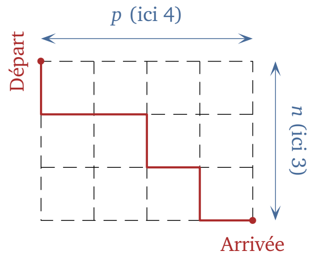
- Pour construire une anagramme de BOROROS, on peut choisir d'abord la position des O ($\binom{7}{3} = 35$ possibilités), puis celle des R ($\binom{7-3}{2} = 6$ possibilités), puis celle du B ($\binom{2}{1} = 2$ possibilités), et enfin celle du S ($\binom{1}{1} = 1$ possibilité) — d'où un total de $35 \times 6 \times 2 = 420$ anagrammes possibles.
- On aurait bien sûr pu choisir la position des lettres dans un ordre différent — par exemple d'abord le S, puis les R, puis le B, puis les O. On obtient le même résultat, mais présenté différemment :
$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{3} = 7 \times 15 \times 4 = 420 \quad \text{anagrammes possibles.}$$
Mais à vrai dire, on peut faire mieux, i.e. obtenir un résultat plus lisible. Remarquons d'abord que :
$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{3} = \frac{7!}{1!6!} \times \frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{1!3!} \times \frac{3!}{3!0!} = \frac{7!}{3! \times 2! \times 1! \times 1!}. \qquad \text{Jolie simplification !}$$
Ce résultat simplifié a-t-il un sens combinatoire ? Eh bien oui. Pour le comprendre, numérotons fictivement nos 7 lettres de 1 à 7, ce qui veut dire que, pour le moment, nous les distinguons. On peut former 7! mots à partir de ces lettres numérotées, associés chacun à une manière d'ordonner les entiers de 1 à 7, mais chaque anagramme est bien sûr comptée plusieurs fois par ce procédé. Combien de fois au juste ? Chaque anagramme a été comptée autant de fois qu'il y a de façons d'y permuter les 3 lettres O, les 2 lettres R, le B et le S — soit $3! \times 2! \times 1! \times 1!$ fois. Le mot BOROROS possède ainsi $\dfrac{7!}{3! \times 2! \times 1! \times 1!} = 420$ anagrammes.

Exemple Un jeu de tarot contient 78 cartes — 21 atouts, la carte qu'on appelle l'*excuse*, et 14 cartes de chacune des 4 couleurs cœur, pique, trèfle et carreau. Combien de tirages simultanés de 6 cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant 2 atouts et 4 trèfles ? et ensuite : exactement un atout et au moins 3 as ?

Démonstration

- **2 atouts et 4 trèfles :** Il s'agit de choisir 2 atouts ($\binom{21}{2}$ possibilités), puis 4 trèfles ($\binom{14}{4}$ possibilités) — d'où un total de $\binom{21}{2} \times \binom{14}{4} = 210\ 210$ tirages possibles.
- **Exactement un atout et au moins 3 as :** On peut construire $\binom{21}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{78-21-4}{2} = 115\ 752$ tirages contenant exactement un atout et exactement 3 as et $\binom{21}{1} \times \binom{4}{4} \times \binom{78-21-4}{1} = 1\ 113$ tirages contenant exactement un atout et les 4 as — d'où un total de $115\ 752 + 1\ 113 = 116\ 865$ tirages possibles, les deux alternatives étant disjointes.

Exemple De plus en plus aventureuse, la chenille Becky se promène cette fois le long d'un grillage plan de taille $n \times p$ dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?



Vous remarquerez bien que cette deuxième aventure de la chenille Becky englobe la première, mais Becky n'avait pas de combinaisons à sa disposition au début du chapitre.

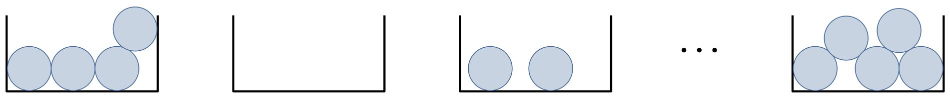
Démonstration Un chemin de longueur minimale est ici entièrement déterminé par la donnée de n déplacements élémentaires vers le bas et p vers la droite. Tout chemin peut donc être identifié à un mot quelconque de $n+p$ lettres dont n lettres B (bas) et p lettres D (droite). Or combien existe-t-il de tels mots ? Réponse : autant qu'il existe de façons d'y placer les B, c'est-à-dire $\binom{n+p}{p}$.

Théorème (Nombre de parties d'un ensemble fini) $\left|\mathscr{P}(E)\right| = 2^{|E|}$.

Démonstration Posons $n = |E|$. Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$: $\left|\mathscr{P}_p(E)\right| = \binom{n}{p}$, donc :
$$\left|\mathscr{P}(E)\right| = \left|\bigsqcup_{p=0}^{n} \mathscr{P}_p(E)\right| = \sum_{p=0}^{n} \left|\mathscr{P}_p(E)\right| = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^{|E|}.$$

Notre dernier dénombrement à base de coefficients binomiaux est particulièrement malin et pas forcément facile à inventer seul si on ne l'a pas déjà rencontré une fois !

Exemple On dispose de n urnes numérotées de 1 à n dont chacune peut accueillir autant de boules qu'on le souhaite. De combien de manières peut-on y ranger p boules indiscernables ?



Démonstration Les rangements étudiés peuvent être vus sans ambiguïté comme des mots. Avec 4 urnes numérotées de 1 à 4, on traduira le rangement de 2, 3, 0 et 1 boules par le mot $\circ\circ|\circ\circ\circ||\circ$ dans lequel le symbole $\circ$ désigne une boule et le symbole $|$ la séparation de deux urnes successives. Les mots ainsi formés contiennent tous exactement p symboles $\circ$ et $n-1$ symboles $|$, ce qui nous ramène à un simple problème de dénombrement d'anagrammes — attention, il y a n urnes, mais seulement $n-1$ séparations entre elles. Inversement, il est possible d'associer à toute anagramme de cette forme un unique rangement de boules. Conclusion : le problème posé autorise exactement $\binom{n+p-1}{p}$ rangements ou anagrammes.

2.6 Bilan pratique

Un problème de dénombrement, ça peut vraiment être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener.

Tirages successifs AVEC REMISE = LISTES	Tirages successifs SANS REMISE = ARRANGEMENTS	Tirages SIMULTANÉS = COMBINAISONS

3 Indicatrices et formule du crible

3.1 Indicatrice d'une partie

Définition-théorème **(Indicatrice d'une partie)** Soient E un ensemble quelconque et A et B deux parties de E.

(i) **Définition :** On appelle *indicatrice de A (sur E)* l'application définie pour tout $x \in E$ par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus A. \end{cases} \qquad \text{En passant : } \quad \mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A.$$

(ii) **Inclusion :** $\quad A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B.$ $\qquad$ **Égalité :** $\quad A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B.$

Opérations ensemblistes : $\quad \mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A, \qquad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \quad$ et $\quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B.$

(iii) **Lien avec le cardinal :** Si E est fini : $\quad |A| = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x).$

Démonstration

(ii) **Inclusion :** Si $A \subset B$, alors $x \in B$ pour tout $x \in A$, donc $\mathbb{1}_A(x) = 1 \leqslant 1 = \mathbb{1}_B(x)$, et pour tout $x \in E \setminus A$: $\mathbb{1}_A(x) = 0 \leqslant \mathbb{1}_B(x)$, donc $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$. Réciproquement, si $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$, alors $A \subset B$ car pour tout $x \in A$: $1 = \mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$, donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$, i.e. $x \in B$.

Égalité : $\quad A = B \iff \big(A \subset B \text{ et } B \subset A\big) \iff \big(\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \text{ et } \mathbb{1}_B \leqslant \mathbb{1}_A\big) \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B.$

Complémentaire : Pour tout $x \in A$: $\quad \mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - \mathbb{1}_A(x)$, $\quad$ et pour tout $x \in E \setminus A$: $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - \mathbb{1}_A(x)$, $\quad$ donc $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Intersection : Pour tout $x \in A \cap B$: $\quad \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 = 1 \times 1 = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$, $\quad$ et pour tout $x \in E \setminus (A \cap B)$: $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$, donc $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0 = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$. Bref : $\quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

Réunion : $\quad \mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A\cup B}} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}\mathbb{1}_{\overline{B}} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B.$

(iii) **Lien avec le cardinal :** $\quad \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) = \sum_{x\in A} \mathbb{1}_A(x) + \sum_{x\in E\setminus A} \mathbb{1}_A(x) = \sum_{x\in A} 1 + \sum_{x\in E\setminus A} 0 = |A|.$

Exemple Pour compter les parties de $[\![1,4]\!]$, nous avons procédé à deux énumérations différentes en début de chapitre. Nous avons généralisé la première un peu plus haut en démontrant la formule $\left|\mathscr{P}(E)\right| = 2^{|E|}$ via la formule du binôme. Nous pouvons maintenant généraliser la deuxième à coups d'indicatrices.

Démonstration En début de chapitre, nous avons associé bijectivement à toute partie de $[\![1,4]\!]$ un unique mot de 4 lettres sur l'alphabet $\{0,1\}$. Si l'on réfléchit bien, c'est exactement ce qu'on fait plus généralement en associant à toute partie A d'un ensemble fini E son indicatrice $\mathbb{1}_A$.

Formellement, remarquons simplement que l'application $A \longmapsto \mathbb{1}_A$ est bijective de $\mathscr{P}(E)$ sur $\{0,1\}^E$ de réciproque $\varphi \longmapsto \varphi^{-1}\big(\{1\}\big) = \big\{x \in E \mid \varphi(x) = 1\big\}$. Ainsi, comme voulu : $\left|\mathscr{P}(E)\right| = \left|\{0,1\}^E\right| = 2^{|E|}$.

Exemple Soit E un ensemble fini. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{A,B\in\mathscr{P}(E)} \left|A\cap B\right|$?

Démonstration En posant $n = |E|$:

$$\sum_{A,B\in\mathscr{P}(E)} \left|A\cap B\right| = \sum_{A,B\in\mathscr{P}(E)} \sum_{x\in E} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \sum_{A,B\in\mathscr{P}(E)} \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{1}_B(x) = \sum_{x\in E} \left(\sum_{A\in\mathscr{P}(E)} \mathbb{1}_A(x)\right)\left(\sum_{B\in\mathscr{P}(E)} \mathbb{1}_B(x)\right)$$
$$= \sum_{x\in E} \left|\big\{A\in\mathscr{P}(E) \mid x\in A\big\}\right|^2 = \sum_{x\in E} \left|\mathscr{P}\big(E\setminus\{x\}\big)\right|^2 = \sum_{x\in E} \left(2^{n-1}\right)^2 = 4^{n-1}n.$$

3.2 La formule du crible

La *formule du crible* présentée ci-dessous est explicitement hors programme, mais bien connue pour $n=2$ et très naturelle pour $n=3$. Nous nous l'autoriserons régulièrement pour de petites valeurs de n.

Théorème (Formule du crible)
$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \left|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right|.$$

Pour $n=2$: $\left|A\cup B\right| = |A|+|B|-\left|A\cap B\right|$ et pour $n=3$: $\left|A\cup B\cup C\right| = |A|+|B|+|C|-\left|A\cap B\right|-\left|B\cap C\right|-\left|C\cap A\right|+\left|A\cap B\cap C\right|$.

On rappelle que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, il existe $\displaystyle\binom{n}{k}$ familles $(i_1,\ldots,i_k)$ d'entiers pour lesquelles $1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n$.

Démonstration On pose $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^n A_i$. On commence par un calcul sur des indicatrices définies sur E :

$$\mathbb{1}_{A_1\cup\ldots\cup A_n} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1\cup\ldots\cup A_n}} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1}\cap\ldots\cap\overline{A_n}} = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\overline{A_i}} = 1 - \prod_{i=1}^n \left(1-\mathbb{1}_{A_i}\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}},$$

puis on somme sur E tout entier :

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_{A_1\cup\ldots\cup A_n}(x) = \sum_{x\in E}\left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}}(x)\right)$$
$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \left(\sum_{x\in E} \mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}}(x)\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \left|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right|.$$

4 Des polynômes et des fractions pour calculer des sommes

On rappelle dans ce dernier paragraphe comment des sommes telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^n 2^k k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ peuvent être calculées facilement par de simples manipulations polynomiales et rationnelles. Ces techniques sont sans rapport immédiat avec nos précédents principes de dénombrement, mais elles nous seront précieuses dans les chapitres de probabilités. Des exemples valent ici mieux qu'un long discours, et ce d'autant plus que les techniques de calcul qui suivent ont toutes déjà été travaillées — dériver, évaluer, identifier !

Exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k k = 3n\times 4^{n-1}$.

Démonstration Dérivons la formule du binôme : $\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} kX^{k-1} = n(X+1)^{n-1}$, multiplions par X :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} kX^k = nX(X+1)^{n-1}, \quad \text{puis évaluons en 3 :} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k k = 3n\times 4^{n-1}.$$

Exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k k = 2^{n+1}(n-1)+2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{10^k} = \frac{10}{81}$.

Démonstration Nous travaillerons dans cette preuve avec des fractions rationnelles formelles en X, que nous n'avons certes pas encore définies mais que je préfère vous voir utiliser ici plutôt que des fonctions rationnelles.

Dérivons la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k = \frac{X^{n+1}-1}{X-1}$. Cela donne :

$$\sum_{k=0}^{n} kX^{k-1} = \frac{(n+1)X^n(X-1)-\left(X^{n+1}-1\right)}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1}-(n+1)X^n+1}{(X-1)^2},$$

donc après multiplication par X : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kX^k = X \times \frac{nX^{n+1}-(n+1)X^n+1}{(X-1)^2}$. Évaluons enfin en 2 :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k k = 2^{n+1}(n-1)+2, \qquad \text{puis en } \frac{1}{10} : \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{10^k} = \frac{10}{81}\left(\frac{n}{10^{n+1}} - \frac{n+1}{10^n} + 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{10}{81}.$$

Nous finissons par un rappel.

Théorème (Formule de Vandermonde) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Démonstration $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = (X+1)^{2n} = (X+1)^n \times (X+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i \times \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j$.

À gauche, le coefficient de degré n vaut $\displaystyle\binom{2n}{n}$, et à droite il vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$ par définition du produit polynomial.

Exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n}{k} = \binom{3n}{n}$.

Démonstration $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} X^k = (X+1)^{3n} = (X+1)^{2n} \times (X+1)^n = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} X^i \times \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j$.

À gauche, le coefficient de degré n vaut $\displaystyle\binom{3n}{n}$, et à droite il vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{2n}{i}$ par définition du produit polynomial.