

Circonscrire un polygone

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Article

par
Stéphane PASQUET

31 janvier 2020

Introduction

Dans les années 1940, les mathématiciens Edward Kasner et James Roy Newman découvrirent une constante :

$$R = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \times \dots}$$

que l'on peut aussi écrire :

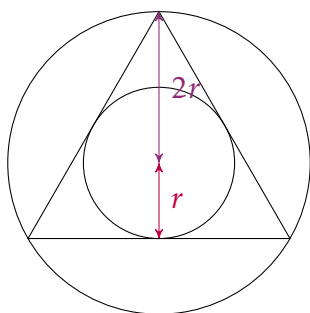
$$R = \prod_{n \geq 3} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Ils découvrirent cette constante de la manière suivante : on construit successivement

1. Un cercle de rayon r
2. Le triangle équilatéral circonscrit à ce cercle
3. Le cercle circonscrit au triangle équilatéral
4. Le carré circonscrit au dernier cercle
5. Le cercle circonscrit au carré
6. Le pentagone régulier circonscrit au dernier cercle
7. Le cercle circonscrit au pentagone
8. L'hexagone circonscrit au dernier cercle
9. Etc.

En observant le rayon des cercles, on s'aperçoit que l'on se rapproche de plus en plus d'une valeur proportionnelle à R défini précédemment.

Étape 1



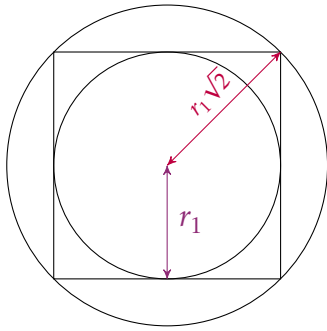
Appelons $r_0 = r$ le rayon du premier cercle et r_1 celui du cercle circonscrit au triangle équilatéral.

Alors,

$$r_1 = 2r.$$

En effet, le centre d'un cercle inscrit dans un triangle équilatéral est le centre de gravité, qui se trouve aux deux tiers de la médiane en partant du sommet, et ce centre est confondu avec le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral.

Étape 2



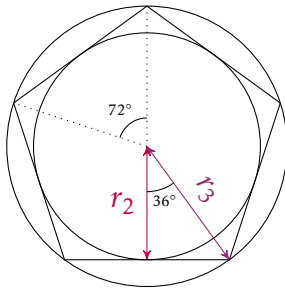
Appelons r_2 le rayon du 3^e cercle.
On a alors :

$$r_2 = r_1 \sqrt{2},$$

c'est-à-dire :

$$r_2 = 2\sqrt{2}r.$$

Étape 3



Le pentagone régulier est formé de 5 triangles isocèles de sommets principaux le centre du cercle initial. Donc l'angle au sommet principal dans un de ces triangles isocèles est égal à :

$$\frac{360}{5} = 72^\circ.$$

Dans un de ces triangles isocèles, la hauteur issue du sommet principal forme deux triangles rectangles identiques dont deux côtés mesurent r_2 (un des côté de l'angle droit), r_3 (l'hypoténuse), et avec un angle de $\frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

Dans ce triangle rectangle, on a :

$$\cos(36^\circ) = \frac{r_2}{r_3}$$

d'où, en transformant 36° en radians :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{r_2}{r_3}$$

soit :

$$r_3 = \frac{r_2}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{2\sqrt{2}r}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}.$$

Or,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

d'où :

$$r_3 = \frac{r}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}.$$

Relation de récurrence

Nous le voyons aux étapes précédentes, il s'agit, connaissant r_n , de déterminer r_{n+1} , la distance du centre du polygone régulier à $n+3$ côtés à l'un de ses sommets. On utilise la même technique qu'à l'étape 3.

L'angle au centre mesure $\frac{2\pi}{n+3}$ donc, en traçant la hauteur issue du sommet principal du triangle isocèle, on forme un triangle rectangle d'hypoténuse r_{n+1} et de côté r_n .

On a alors :

$$\cos \frac{\pi}{n+3} = \frac{r_n}{r_{n+1}},$$

soit :

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{\cos \frac{\pi}{n+3}}.$$

On déduit de cette relation de récurrence l'égalité :

$$r_n = r \prod_{k=3}^{n+2} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{k}}.$$

Convergence

Étudions :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=3}^{n+2} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{k}}.$$

La suite $(P_n)_{n \geq 3}$ telle que

$$P_n = \prod_{k=3}^{n+2} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{k}}$$

est minorée par 0.

En effet, pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$0 < \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{3},$$

donc :

$$\frac{1}{2} \leq \cos \frac{\pi}{n} < 1.$$

De plus, la suite est strictement décroissante.

En effet,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \cos \frac{\pi}{n+3} < 1.$$

La suite est décroissante et minorée, donc elle converge. Sa limite est non nulle car sinon, (r_n) tendrait vers 0, ce qui n'est pas le cas.

Ainsi, malgré les a priori que l'on pourrait avoir, les cercles ont un rayon-limite.

Pour trouver une valeur approchée à 10^{-4} près de ce rayon-limite, en considérant que $r = 1$ est le rayon du 1^{er} cercle, utilisons Albox (voir page suivante). On arrive alors à une valeur approchée de R définie en introduction.



```
▼ VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  p PREND_LA_VALEUR 0.5
  n PREND_LA_VALEUR 3
  d PREND_LA_VALEUR 10
  ▼ TANT_QUE (abs(p-d)>0.00001) FAIRE
    ▼ DEBUT_TANT_QUE
      n PREND_LA_VALEUR n+1
      d PREND_LA_VALEUR p
      p PREND_LA_VALEUR p*cos(Math.PI/n)
      AFFICHER "Le produit est égal à : "
      AFFICHER p
      AFFICHER " pour n="
      AFFICHER n
    ▼ FIN_TANT_QUE
      AFFICHER "Donc R="
      d PREND_LA_VALEUR 1/p
      AFFICHER d
  FIN_ALGORITHME
```

Console

```
Le produit est égal à : 0.11738653 pour n=234
Le produit est égal à : 0.11737604 pour n=235
Le produit est égal à : 0.11736564 pour n=236
Le produit est égal à : 0.11735533 pour n=237
Le produit est égal à : 0.1173451 pour n=238
Le produit est égal à : 0.11733497 pour n=239
Le produit est égal à : 0.11732491 pour n=240
Le produit est égal à : 0.11731495 pour n=241
Donc R=8.524063
***Algorithme terminé***
```

Et en Python, cela donne :

```
from math import pi, cos
p, n, d = 0.5, 3, 10
while (abs(p-d)) > 10**(-5):
    n += 1
    d = p
    p = p * cos(pi/n)
    print("Le produit est égal à {} pour n={}".format(p, n))
print("Donc R={}".format(1/p))
```