

Équations polynomiales de degré 3

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Article

par
Stéphane PASQUET

26 août 2018

Première approche

Considérons l'équation polynomiale de degré 3 suivante :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

Ce dont nous pouvons être assurés, c'est qu'elle admet au moins une solution réelle. En effet, la fonction :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et, de plus,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3) = \operatorname{sgn}(-a)\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3) = \operatorname{sgn}(a)\infty \end{cases}$$

où $\operatorname{sgn}(a)$ désigne le signe de a .

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Transformation de Tschirnhaus

Dans un premier temps, nous allons transformer l'équation (??) :

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

On pose alors $x = X - \frac{b}{3a}$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \left(X - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(X - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(X - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow X^3 - \frac{b}{a}X^2 + \frac{b^2}{3a^2}X - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b}{a}\left(X^2 - \frac{2b}{3a}X + \frac{b^2}{9a^2}\right) + \frac{c}{a}X - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow X^3 + \left(\frac{b^2}{3a^2} - \frac{2b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)X - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow X^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)X + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = 0 \end{aligned}$$

On peut donc simplifier l'équation (??) en :

$$X^3 + pX + q = 0 \quad (2)$$

avec :

$$\begin{cases} p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \\ q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} \end{cases}$$

Méthode de Hudde ¹

La méthode de Hudde consiste à poser dans l'équation (??) :

$$X = u + v$$

en remarquant l'égalité suivante :

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

Et donc :

$$(u + v)^3 - u^3 - 3u^2v - 3uv^2 - v^3 = 0$$

On en déduit alors :

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

Soit :

$$X^3 - 3uvX - (u^3 + v^3) = 0 \quad (3)$$

Pour que les équations (??) et (??) soient semblables, on pose alors :

$$\begin{cases} p = -3uv \\ q = -(u^3 + v^3) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

Formule de Cardan-Tartaglia ²

En posant $U = u^3$ et $V = v^3$, on s'aperçoit que l'on doit chercher deux nombres U et V connaissant leur somme S et leur produit P . Ainsi, U et V sont solutions de l'équation :

$$Y^2 - SY + P = 0$$

Soit :

$$Y^2 + qY - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (4)$$

1. Johann Hudde, 1630-1704, mathématicien hollandais

2. Girolamo Cardano, 1501-1576 et Niccolò Fontana, dit Tartaglia (littéralement, « le bègue »), 1499-1557, mathématiciens italiens.

Le discriminant du polynôme $Y^2 + qY - \frac{p^3}{27}$ est :

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

Pour que l'équation (??) ait au moins une solution, il faut que $\Delta \geq 0$, soit :

$$27q^2 + 4p^3 \geq 0$$

Sous cette dernière condition, on a :

$$U = \frac{-q - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2} \quad \text{et} \quad V = \frac{-q + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}$$

Et donc :

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}} \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}}$$

Ainsi, une solution à l'équation (??) est :

$$X = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}}$$

Un exemple au hasard (ou presque ...)

Considérons l'équation :

$$(E) : 2x^3 - 5x^2 + 4x - 21 = 0$$

On pose alors :

$$\begin{cases} p = \frac{3 \times 2 \times 4 - (-5)^2}{3 \times 2^2} = \frac{-1}{12} \\ q = \frac{2 \times (-5)^3 - 9 \times 2 \times (-5) \times 4 + 27 \times 2^2 \times (-21)}{27 \times 2^3} = -\frac{2158}{216} \end{cases}$$

Ainsi :

$$(E) \Leftrightarrow X^3 - \frac{1}{12}X - \frac{1079}{108} = 0$$

On a alors :

$$\Delta = \sqrt{\frac{2695}{27}} \approx 9,99073645$$

Et donc :

$$u \approx 0,012897285$$

$$v \approx 2,153769382$$

Soit :

$$X = u + v \approx 2,166666667$$

Et donc, finalement :

$$x = X + \frac{5}{6} = 3$$

Si on remplace x par 3 dans (E), on vérifie bien que $x = 3$ est une de ses solutions.

Une étude de Bombelli ³

Bombelli a étudié l'équation :

$$X^3 - 15X - 4 = 0$$

Il a obtenu :

$$\Delta = -13\,608$$

Et donc :

$$X = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

Que l'on peut aussi écrire, en faisant fi du fait que l'on ait un radicant négatif pour la racine carrée :

$$X = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Bombelli s'est alors aperçu que :

$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$$

Ainsi :

$$X = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4$$

Ainsi, en concevant que $\sqrt{-1}$ existe, il s'aperçut que cela ne gênait pas les calculs, qui menaient tout de même à une solution.

N.B. C'est ainsi que les *nombres complexes* firent leur apparition, nombres s'écrivant sous la forme $a + b\sqrt{-1}$ ou, en posant $i = \sqrt{-1}$, $a + ib$.

Algorithme

Comme vous l'avez constaté, les calculs peuvent être assez fastidieux. Nous pouvons donc avoir recours à un algorithme pour déterminer une solution. Je vous en propose un :

Cet algorithme a été testé avec Algobox, dont vous trouverez le code après l'algorithme.

```
1  VARIABLES
2    a EST_DU_TYPE NOMBRE
3    b EST_DU_TYPE NOMBRE
4    c EST_DU_TYPE NOMBRE
5    d EST_DU_TYPE NOMBRE
6    p EST_DU_TYPE NOMBRE
7    q EST_DU_TYPE NOMBRE
8    u EST_DU_TYPE NOMBRE
9    v EST_DU_TYPE NOMBRE
10   delta EST_DU_TYPE NOMBRE
11   x EST_DU_TYPE NOMBRE
12   s EST_DU_TYPE NOMBRE
13   i EST_DU_TYPE NOMBRE
14  DEBUT_ALGORITHME
15    LIRE a
16    LIRE b
```

3. Raphaël Bombelli, 1526-1572, mathématicien italien

```

17  LIRE c
18  LIRE d
19  p PREND_LA_VALEUR (3*a*c-b*b)/(3*a*a)
20  q PREND_LA_VALEUR (2*pow(b,3)-9*a*b*c+27*a*a*d)/(27*pow(a,3))
21  delta PREND_LA_VALEUR (27*q*q+4*pow(p,3))/27
22  AFFICHER "DELTA="
23  AFFICHER delta
24  SI (delta>=0) ALORS
25      DEBUT_SI
26      u PREND_LA_VALEUR (-q-sqrt(delta))/2
27      v PREND_LA_VALEUR (-q+sqrt(delta))/2
28      s PREND_LA_VALEUR u/2
29      POUR i ALLANT_DE 1 A 50
30          DEBUT_POUR
31          s PREND_LA_VALEUR (2*s+u/(s*s))/3
32          FIN_POUR
33      u PREND_LA_VALEUR s
34      s PREND_LA_VALEUR v/2
35      POUR i ALLANT_DE 1 A 50
36          DEBUT_POUR
37          s PREND_LA_VALEUR (2*s+v/(s*s))/3
38          FIN_POUR
39      v PREND_LA_VALEUR s
40      AFFICHER "Une solution est : x="
41      s PREND_LA_VALEUR u+v-b/(3*a)
42      AFFICHER s
43      FIN_SI
44      SINON
45          DEBUT_SINON
46          AFFICHER "DELTA<0 donc il faut passer par les nombres
              complexes."
47          FIN_SINON
48  FIN_ALGORITHME

```

N.B. 1 Dans l'algorithme, notons la partie :

Algorithme 1

Pour i allant de 1 à 50 allant de (à 2
 $*s+u/(s*s))/3 \rightarrow s$
 Fin du Pour $s \rightarrow u$

Cette boucle permet de calculer $\sqrt[3]{u}$. Avec AlgoBox, il n'est pas possible de la calculer directement, donc j'ai dû utiliser la suite $\begin{cases} u_0 = \frac{u}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2u + \frac{u}{u_n^2} \right) \end{cases}$, qui converge vers $\sqrt[3]{u}$.
 Pour calculer $\sqrt[3]{v}$, j'ai fait appel à la même suite, d'où la présence de deux boucles.

N.B. 2 Notez aussi que, malheureusement, cet algorithme ne fonctionne pas lorsque le discriminant est négatif.

$$\begin{aligned}
 (1) & \iff \left(X - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(X - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(X - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0 \\
 & \iff X^3 - \frac{b}{a}X^2 + \frac{b^2}{3a^2}X - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b}{a}\left(X^2 - \frac{2b}{3a}X + \frac{b^2}{9a^2}\right) + \frac{c}{a}X - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0 \\
 & \iff X^3 + \left(\frac{b^2}{3a^2} - \frac{2b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)X - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0 \\
 & \iff X^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)X + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = 0
 \end{aligned}$$