

Sommes infinies à valeurs finies

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Article

par
Stéphane PASQUET

29 mai 2014

Introduction : la série de Grandi

Il y a quelques temps maintenant, un des mes contacts Facebook m'a soumis le problème suivant : « Que vaut la somme : $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$? »

Cette somme est appelée la *série de GRANDI* (philosophe, prêtre et mathématicien du début du XVIII^e siècle).

Tout de suite, je me suis dit que la réponse n'allait pas être simple dans la mesure où, dès que l'on touche la notion d'infini, c'est toujours compliqué.

Il y a plusieurs façons d'aborder ce problème :

- On peut écrire cette somme sous la forme :

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

et dans ce cas, on pourrait dire qu'elle vaut 0.

- On peut aussi écrire cette somme sous la forme :

$$1 - [(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots]$$

et conclure qu'elle vaut 1 car la somme dans les crochets vaut 0.

- On peut aussi poser G cette somme et l'écrire sous la forme :

$$G = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

c'est-à-dire :

$$G = 1 - G.$$

En ajoutant G à gauche et à droite de l'égalité, on a :

$$G + G = 1 - G + G$$

et donc

$$2G = 1$$

ce qui, en divisant par deux des deux côtés de l'égalité, nous donne :

$$\frac{2G}{2} = \frac{1}{2}$$

soit :

$$G = \frac{1}{2}.$$

Que choisir ?

On peut partir du développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n.$$

Ainsi, en prenant $x = 1$, on obtient :

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Il serait donc *légitime* de choisir la valeur $\frac{1}{2}$ pour la série de Grandi. C'est ce que nous choisissons.

Une autre série

Considérons maintenant la somme :

$$A = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

On peut écrire A de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A &= 1 - (2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \dots) \\ &= 1 - [(1+1) - (2+1) + (3+1) - (4+1) + (5+1) - (6+1) + \dots] \\ &= 1 - \color{red}{1} - \color{blue}{1} + \color{red}{2} + \color{blue}{1} - \color{red}{3} - \color{blue}{1} + \color{red}{4} + \color{blue}{1} - \color{red}{5} - \color{blue}{1} + \color{red}{6} + \color{blue}{1} - \dots \\ &= 1 - (\color{red}{1} - \color{red}{2} + \color{red}{3} - \color{red}{4} + \color{red}{5} - \color{red}{6} + \dots) - (\color{blue}{1} - \color{blue}{1} + \color{blue}{1} - \color{blue}{1} + \dots) \end{aligned}$$

$$A = 1 - A - G$$

$$2A = 1 - G$$

$$A = \frac{1 - G}{2}$$

$$A = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{4}}$$

La somme des entiers

La somme des entiers est la somme :

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

On peut alors écrire :

$$S - A = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots) - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots)$$

$$S - A = 2 \times (2 + 4 + 6 + \dots)$$

$$S - A = 2 \times 2 \times (1 + 2 + 3 + \dots)$$

$$S - A = 4S$$

$$-3S = A$$

$$S = -\frac{A}{3}$$

$$S = -\frac{\frac{1}{4}}{3}$$

$$S = -\frac{1}{12}$$

La théorie des cordes

La théorie des cordes est une théorie de la physique qui consiste à dire que l'univers est un espace à 26 dimensions (ou 10, ou 11 selon nos besoins ... 'Sont bizarres ces physiciens théoriques non ?)

Pourquoi « 26 » ?

Dans cette théorie, il y a une expression qui apparaît :

$$1 + \frac{D-2}{2}(1 + 2 + 3 + 4 + \dots)$$

Patatra ! La théorie s'écroule car au premier abord, on pourrait se dire que (si on est un matheux pur et dur), comme nous le dit notre cours de 1^{re},

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

et donc que l'infini se glisse dans cette expression.

Mais, nous l'avons vu plus haut, on peut aussi (car cela nous arrange en tant que physicien) dire que cette somme infinie est égale à $-\frac{1}{12}$, et là, l'expression devient :

$$1 + \frac{D-2}{2} \times \left(-\frac{1}{12}\right)$$

soit :

$$1 - \frac{D-2}{24} = \frac{26-D}{24}$$

qui s'annule pour ... $D = 26$! C'est donc tellement plus simple de prendre une dimension égale à 26 !

Je précise que ce calcul se présente ainsi pour la théorie dite des « cordes bosoniques », qui en fonctionne pas et à laquelle on préfère les théories « supersymétriques » et pour lesquelles le problème est identique, sauf que dans ce cas, il faut prendre $D = 10$.

Pour être clair ...

Entendons-nous bien : tout ceci peut paraître obscur pour un débutant en mathématiques, et c'est normal ! Dès lors que l'on touche à l'infini, il devient capricieux.

La série de Grandi n'a pas de valeur ! Il en est de même pour les autres sommes mais tous nos raisonnements sont partis du fait que nous supposons qu'elles en avait.



Références

<http://sciencetonnante.wordpress.com/2011/03/14/non-lunivers-na-pas-10-dimensions/>
<http://sciencetonnante.wordpress.com/2013/05/27/1234567-112/>
<http://serge.mehl.free.fr/chrono/Grandi.html>