

Le théorème des hexagones de Pappus

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Article

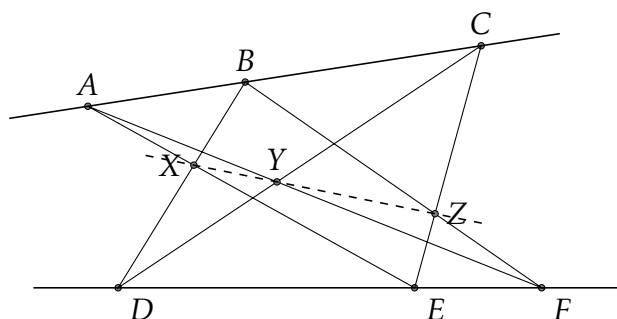
par
Stéphane PASQUET

29 mai 2014

Énoncé

Nous nous proposons ici de démontrer le *Théorème des hexagones de Pappus*, que l'on peut formuler ainsi :

« Soient A, B, C d'une part, D, E, F d'autre part, des points alignés. Soient alors X, Y et Z les intersections respectives de (AE) et (BD), (AF) et (DC), (CE) et (CD). Alors X, Y et Z sont alignés. »

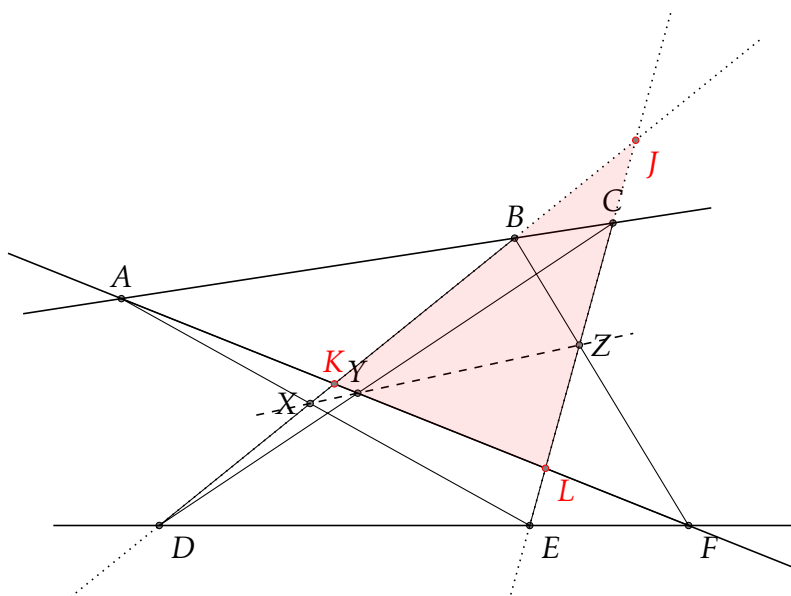


Démonstration

Rappelons le *théorème de Ménélaüs*, que nous allons utiliser :

« Soit ABC un triangle quelconque. D, E et F sont respectivement sur (BC), (AC) et (AB). Il sont alignés si et seulement si $\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB} = 1$. »

Pour démontrer le théorème des hexagones de Pappus, ajoutons trois points J, K et L :



D'après le théorème de Ménélaüs, on a :

- Les 3 côtés du triangle JKL sont coupés par la droite (AC) en A, B et C ; donc :

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}} \times \frac{\overline{BJ}}{\overline{BK}} \times \frac{\overline{CL}}{\overline{CJ}} = 1$$

- Les 3 côtés du triangle JKL sont coupés par la droite (DF) en E, E et F ; donc :

$$\frac{\overline{DJ}}{\overline{DK}} \times \frac{\overline{EL}}{\overline{EJ}} \times \frac{\overline{FK}}{\overline{FL}} = 1$$

- Les 3 côtés du triangle JKL sont coupés par la droite (BF) en B, Z et F ; donc :

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{BJ}} \times \frac{\overline{ZJ}}{\overline{ZL}} \times \frac{\overline{FL}}{\overline{FK}} = 1$$

- Les 3 côtés du triangle JKL sont coupés par la droite (DC) en D, Y et C ; donc :

$$\frac{\overline{DK}}{\overline{DJ}} \times \frac{\overline{YL}}{\overline{YK}} \times \frac{\overline{CJ}}{\overline{CL}} = 1$$

- Les 3 côtés du triangle JKL sont coupés par la droite (AE) en A, X et E ; donc :

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{AK}} \times \frac{\overline{XK}}{\overline{XJ}} \times \frac{\overline{EJ}}{\overline{EL}} = 1$$

En multipliant les 5 égalités membre à membre, on obtient après simplification :

$$\frac{\overline{ZJ}}{\overline{ZL}} \times \frac{\overline{YL}}{\overline{YK}} \times \frac{\overline{XK}}{\overline{XJ}} = 1$$

Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Ménélaüs, les trois points X, Y et Z sont alignés.