THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT. COCYCLICITÉ. APPLICATIONS

Contenu – Ces notes, inspirées des exposés présentés lors de la séance de préparation, développent certaines remarques faites oralement. *Tous les résultats peuvent se lire sur la figure du bas de la page 7.*

Première partie : théorème de l'angle inscrit (thm. 1), incontournable, et sa variante faisant intervenir la tangente (thm. 3). S'il faut connaître les deux énoncés, le second n'est vraiment indispensable que pour le théorème de l'*arc* capable (thm. 10) et peut éventuellement être omis si l'on sait s'en passer pour démontrer le critère de cocyclicité (thm. 8, seconde démonstration).

Deuxième partie : reformulation du théorème de l'angle inscrit en termes d'angles géométriques (prop. 4). On s'appuie pour cela sur la comparaison entre angles géométriques et angles orientés (lemmes 5 et 6). Il n'est pas indispensable d'en parler, mais c'est une question naturelle puisque les angles géométriques sont ceux que l'on observe le plus naturellement sur un dessin ; en outre, c'est nécessaire pour l'application au théorème de Ptolémée (applications 2.1 et 3.1). Il serait suffisant d'énoncer la proposition 4 (sans démonstration, mais en sachant évidemment la démontrer).

Troisième partie : critère de cocyclicité ou d'alignement (thm. 8), second énoncé incontournable. On donne deux démonstrations : la première avec une tangente, la seconde sans.

Chacune de ces trois parties contient plusieurs applications possibles, de nature différente. Trois autres applications importantes sont présentées dans une dernière partie : cercle capable (thm. 9), arc capable (thm. 10) et formulation du critère de cocyclicité avec des nombres complexes (thm 8bis). Il ne faut pas perdre de vue que le théorème de l'arc capable, formulé avec des nombres complexes (thm. 10bis), est précisément la description des lignes de niveau de l'argument de $\frac{z-b}{z-a}$ (leçon 19). Certaines des applications proposées peuvent être utilisées pour illustrer d'autres leçons.

Prérequis / Cadre – L'exposé ci-dessous est au niveau d'une fin de Terminale scientifique, la notion essentielle étant celle d'angle orienté de vecteurs. L'utilisation de déterminants pour caractériser l'orientation des bases pourrait être omise en admettant les énoncés des lemmes 5 et 6, que l'on observe facilement sur un dessin.

On considère toujours un plan affine euclidien $\mathscr{P}$. Bien que cela ne soit pas indispensable pour le théorème de l'angle inscrit, il est plus simple d'*orienter* le plan $\mathscr{P}$ et d'identifier systématiquement les angles orientés avec leurs mesures. Par souci de légèreté, on omet d'écrire $(\text{mod } 2\pi)$ pour les égalités d'angles orientés ; les égalités modulo π sont par contre clairement identifiées.

1. Le théorème de l'angle inscrit – Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et soit A, B deux points de $\mathscr{C}$.

Théorème 1 — *Quel que soit le point* M *de* $\mathscr{C}$ *distinct de* A *et* B,

$$2\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}.$$

Première démonstration. La relation de Chasles permet d'écrire : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MA})} + \widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})} + \widehat{(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{OB})}$.

La réflexion σ par rapport à la médiatrice du segment $[MA]$ fixe le point O et échange les points A et M. Comme une réflexion transforme un angle orienté de vecteurs en son opposé, il vient

$$\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MA})} = -\widehat{(\overrightarrow{\sigma(O)\sigma(A)},\overrightarrow{\sigma(M)\sigma(A)})} = -\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AM})}, \quad \text{d'où} \quad \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MA})} = \widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OM})} = \widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})}.$$

On démontre de même l'identité : $\widehat{(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})}$.

Finalement, une nouvelle application de la relation de Chasles fournit l'égalité voulue :

$$\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})} + \widehat{(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})} + \widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}.$$

□

Seconde démonstration. La relation de Chasles permet d'écrire : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})} + \widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB})}$.

En considérant le triangle MOA, isocèle en O, il vient :

$$\pi = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})} + \widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO})} + \widehat{(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})} + 2\widehat{(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA})}.$$

De même, dans le triangle MOB isocèle en O : $\pi = \widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB})} + 2\widehat{(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO})}$.

En additionnant les deux dernières égalités, nous obtenons :

$$0 = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} + 2\widehat{(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} - 2\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})},$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Commentaire – Les deux démonstrations reposent de manière essentielle sur le fait que l'ensemble des angles orientés de vecteurs est muni d'une structure de groupe abélien*. La première fait intervenir de manière explicite l'effet d'une réflexion sur les angles orientés. C'est également le cas de la seconde, mais de manière implicite : l'égalité des angles à la base du triangle isocèle AOM se démontre évidemment en faisant intervenir la réflexion relative à la médiatrice du segment* $[AM]$.

Exemple — Le triangle AMB est rectangle en M si et seulement si le centre O de son cercle circonscrit coïncide avec le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$. Ce cas particulier du théorème 1 se déduit aisément du théorème de Pythagore.

Le théorème 1 affirme que l'*angle au centre* $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}$ est le double de l'*angle inscrit* $\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}$. Il permet en particulier de comparer deux angles inscrits.

Corollaire 2 — *Quels que soient les points* M *et* N *de* $\mathscr{C}$ *distincts de* A *et* B*,*

$$\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})} = \widehat{(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})} \pmod{\pi}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer deux fois le théorème précédent :

$$2\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})} = \widehat{(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})} \pmod{\pi}.$$

□

Il existe une variante du théorème 1 faisant intervenir la tangente à $\mathscr{C}$ au point A, notée $\mathscr{T}_{\mathrm{A}}$.

Théorème 3 — *Quel que soit le point* T *de* $\mathscr{T}_{\mathrm{A}}$ *distinct de* A*,*

$$2\widehat{(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{AB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}.$$

Démonstration. La relation de Chasles permet d'écrire : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{TA})} + \widehat{(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OB})}$.

En considérant la réflexion par rapport à la médiatrice du segment $[\mathrm{AB}]$, on démontre comme dans le théorème 1 l'identité : $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BA})}$.

La réflexion σ par rapport à la droite (OA) fixe les points O et A. Par ailleurs, les droites (OA) et (AT) étant perpendiculaires, $\overrightarrow{\mathrm{A}\sigma(\mathrm{T})} = -\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TA}$ et donc

$$\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{TA})} = -\widehat{(\overrightarrow{\sigma(\mathrm{O})\sigma(\mathrm{A})},\overrightarrow{\sigma(\mathrm{A})\sigma(\mathrm{T})})} = -\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AT})} = \widehat{(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{OA})}.$$

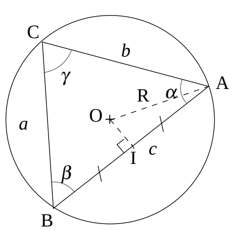
Nous obtenons finalement

$$\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{OA})} + \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{BA})} = 2\widehat{(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{AB})}.$$

□

Applications — On peut donner deux exemples d'application du théorème 1.

1.1. La *loi des sinus* dans un triangle quelconque ABC :



$$\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})} = \tfrac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} \pmod{\pi}, \text{ donc}$$

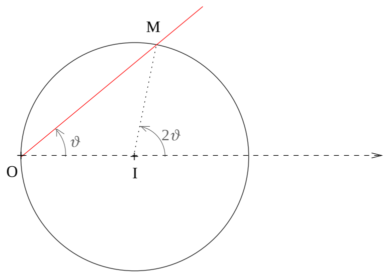
$$\sin\gamma = |\sin\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}| = |\sin\widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI})}| = \sin\widehat{\mathrm{BOI}} = \frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{OB}} = \frac{c}{2\mathrm{R}}$$

En raisonnant de même avec chaque sommet, on obtient en fin de compte :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2\mathrm{R}} = \left(\frac{2\mathrm{S}}{abc}\right).$$

(S est l'aire du triangle ; la dernière égalité s'obtient simplemnt en écrivant $\mathrm{S} = \frac{1}{2}\, c\cdot b\sin\alpha = \frac{abc}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{a}$)

1.2. Équation polaire d'un cercle passant par l'origine.



Si les coordonnées polaires (ρ,ϑ) sont définis par rapport à la demi-droite $\mathrm{O}+\mathbb{R}_{\geqslant 0}\vec{i}$, i.e. $\rho = \mathrm{OM}$ et $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})} = \vartheta \pmod{2\pi}$, alors le cercle C_0 de centre $\mathrm{I} = \mathrm{O}+\vec{i}$ et de rayon 1 a pour équation polaire

$$\rho(\vartheta) = 2\cos(\vartheta).$$

Il suffit d'écrire : $\mathrm{OM}^2 = ||\overrightarrow{\mathrm{OI}}+\overrightarrow{\mathrm{IM}}||^2 = \mathrm{OI}^2+\mathrm{IM}^2+2\cos\ \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OI}},\overrightarrow{\mathrm{IM}})}$, d'où $\mathrm{OM}^2 = 2(1+\cos\ 2\vartheta) = 4\cos^2\ \vartheta$ et $\mathrm{OM} = 2\cos\ \vartheta$.

Remarque. Plus généralement, un cercle C de centre $\Omega(r,\varphi)$ et passant par le point O est l'image de C_0 par la similitude s de rapport r et d'angle φ. L'équation polaire de C :

$$\rho(\vartheta) = 2r\cos(\vartheta-\varphi)$$

se déduit directement de celle de C_0 en écrivant : $\mathrm{M}(\rho,\vartheta)\in\mathrm{C} \Leftrightarrow s^{-1}(\mathrm{M})(r^{-1}\rho,\vartheta-\varphi)\in\mathrm{C}_0 \Leftrightarrow r^{-1}\rho = 2\cos(\vartheta-\varphi)$.

2. Reformulation en termes d'angles géométriques — Nous considérons toujours un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux points distincts A,B de $\mathscr{C}$. On peut reformuler le théorème 1 et le corollaire 2 en termes d'angles géométriques si l'on prend en compte la position des points considérés par rapport à la droite (AB).

Notation pour les angles géométriques : $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ et $\widehat{\mathrm{PQR}} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{QP}},\overrightarrow{\mathrm{QR}})}$.

Proposition 4 — *1. Soit* M *un point de* $\mathscr{C}$ *distinct de* A *et* B.

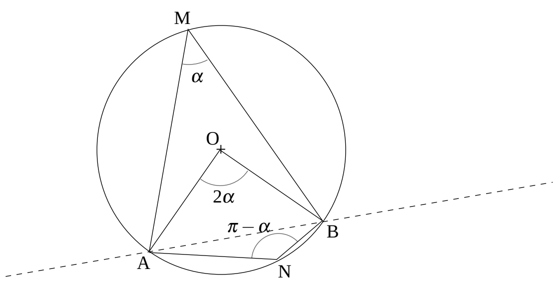
(i) Si M *et* O *sont du même côté de la droite* (AB), *alors* $\widehat{\mathrm{AOB}} = 2\widehat{\mathrm{AMB}}$.

(ii) Si M *et* O *sont de part et d'autre de la droite* (AB), *alors* $\widehat{\mathrm{AOB}} = 2\pi - 2\widehat{\mathrm{AMB}}$.

2. Soit M *et* N *deux points de* $\mathscr{C}$ *distincts de* A *et* B.

(i) Si M *et* N *sont du même côté de la droite* (AB), *alors* $\widehat{\mathrm{AMB}} = \widehat{\mathrm{ANB}}$.

(ii) Si M *et* N *sont de part et d'autre de la droite* (AB), *alors* $\widehat{\mathrm{ANB}} = \pi - \widehat{\mathrm{AMB}}$.



La démonstration de cette proposition découlera très facilement des deux lemmes suivants.

Lemme 5 — *Soit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs unitaires non colinéaires.*

1. *L'angle géométrique* $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ *est une mesure de l'angle orienté* $\widehat{(\mathrm{u},\mathrm{v})}$ *si et seulement si la base* $(\vec{u},\vec{v})$ *est directe.*
2. *Si la base* $(\vec{u},\vec{v})$ *est indirecte, alors* $-\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ *est une mesure de l'angle orienté* $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la formule

$$\sin\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}),$$

où $\mathscr{B}$ désigne n'importe quelle base orthonormée directe. En effet :

$$\cos\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \cos\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = (\vec{u}|\vec{v}) \iff (\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(\vec{u},\vec{v})} \pmod{2\pi} \text{ ou } \widehat{(\vec{u},\vec{v})} = -\widehat{(\vec{u},\vec{v})} \pmod{2\pi})$$

et, comme $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) \in]0,\pi[$, le signe du sinus permet de distinguer ces deux cas de figure :

$$(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) \iff \sin(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) > 0 \iff \text{la base } (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \text{ est directe.}$$

□

Lemme 6 — *Soit* A *et* B *deux points distincts et soit* M *et* N *deux points n'appartenant pas à* (AB)*. Pour que* M *et* N *soient contenus dans le même demi-plan ouvert de frontière* (AB)*, il faut et il suffit que les bases* $(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})$ *et* $(\overrightarrow{\mathrm{NA}},\overrightarrow{\mathrm{NB}})$ *aient la même orientation.*

Démonstration. Posons $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$ et soit $\overrightarrow{j}$ le vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{i}$ tel que la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ soit directe. Les deux demi-plans ouverts de frontière (AB) sont

$$\Pi_+ = \{\mathrm{M} \in \mathscr{P} \mid (\overrightarrow{\mathrm{AM}}|\overrightarrow{j}) > 0\} \quad \text{et} \quad \Pi_- = \{\mathrm{M} \in \mathscr{P} \mid (\overrightarrow{\mathrm{AM}}|\overrightarrow{j}) < 0\}.$$

Pour tout point M du plan,

$$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}) = \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}) = \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \mathrm{AB}\cdot\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{\mathrm{AM}}).$$

En écrivant $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (\overrightarrow{\mathrm{AM}}|\overrightarrow{i})\cdot\overrightarrow{i} + (\overrightarrow{\mathrm{AM}}|\overrightarrow{j})\cdot\overrightarrow{j}$, on en déduit l'égalité

$$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}) = (\overrightarrow{\mathrm{AM}}|\overrightarrow{j})\cdot\mathrm{AB}\cdot\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}) = (\overrightarrow{\mathrm{AM}}|\overrightarrow{j})\cdot\mathrm{AB}.$$

Ainsi, deux points M et N n'appartenant pas à (AB) sont contenus dans le même demi-plan de frontière (AB) si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})$ et $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{NA}},\overrightarrow{\mathrm{NB}})$ ont le même signe, donc si et seulement si les bases $(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})$ et $(\overrightarrow{\mathrm{NA}},\overrightarrow{\mathrm{NB}})$ ont la même orientation. □

Nous sommes maintenant en mesure de reformuler le théorème 1 et le corollaire 2.

Démonstration de la proposition 4. 1. Si $\mathrm{O} \in (\mathrm{AB})$, alors $\widehat{\mathrm{AOB}} = \pi$ et $\widehat{\mathrm{AMB}} = \frac{\pi}{2}$, donc

$$\widehat{\mathrm{AOB}} = 2\widehat{\mathrm{AMB}} = 2\pi - 2\widehat{\mathrm{AMB}}.$$

Supposons maintenant $\mathrm{O} \notin (\mathrm{AB})$. Quitte à modifier l'orientation du plan, nous pouvons également supposer que la base $(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ est directe, auquel cas $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}}) = \widehat{\mathrm{AOB}} \pmod{2\pi}$ (lemme 5).

(i) Si M est situé du même côté de la droite (AB) que O, alors la base $(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})$ est également directe (lemme 6) et donc $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}}) = \widehat{\mathrm{AMB}}$ (lemme 5). En appliquant le théorème 1, il vient alors

$$\widehat{\mathrm{AOB}} = 2\widehat{\mathrm{AMB}} \pmod{2\pi}, \quad \text{puis} \quad \widehat{\mathrm{AOB}} = 2\widehat{\mathrm{AMB}} \quad \text{car } 0 \leqslant \widehat{\mathrm{AOB}},\widehat{\mathrm{AMB}} \leqslant \pi.$$

(ii) Si M et O sont situés de part et d'autre de la droite (AB), alors la base $(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})$ est indirecte (lemme 6) et donc $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}}) = -\widehat{\mathrm{AMB}}$ (lemme 5). En appliquant le théorème 1, il vient alors : $\widehat{\mathrm{AOB}} = -2\widehat{\mathrm{AMB}} \pmod{2\pi}$.
Comme $0 \leqslant \widehat{\mathrm{AMB}} \leqslant \pi$, le seul entier k tel que $-\widehat{\mathrm{AMB}} + 2k\pi$ appartienne à $[0,2\pi[$ est $k=1$ et donc

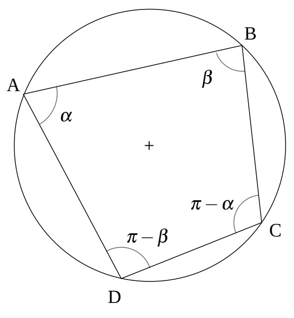
$$\widehat{\mathrm{AOB}} = 2\pi - 2\widehat{\mathrm{AMB}}.$$

Remarque : comme $0 \leqslant \widehat{\mathrm{AOB}} \leqslant \pi$, cette égalité implique $\widehat{\mathrm{AMB}} \geqslant \frac{\pi}{2}$ donc l'angle $\widehat{\mathrm{AMB}}$ est *obtus*.

2. Introduire le point O et appliquer ce qui précède. □

Applications — On peut donner trois applications de la proposition 4.

2.1. Une condition nécessaire d'inscriptibilité d'un quadrilatère convexe dans un cercle (première moitié du *théorème de Ptolémée*).



Si un quadrilatère convexe non plat ABCD est inscriptible dans un cercle, alors ses angles géométriques opposés sont supplémentaires.

En effet : par hypothèse, le segment [BD] est contenu dans l'enveloppe convexe de $\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}\}$, donc les points B et D sont situés de part et d'autre de la droite (AC). De même, les points A et C sont situés de part et d'autre de la droite (BD).
Si le quadrilatère est inscriptible dans un cercle, il découle de la proposition 4 que les angles géométriques $\widehat{\mathrm{BAD}}$ et $\widehat{\mathrm{BCD}}$ d'une part, $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{ADC}}$ d'autre part, sont supplémentaires.

2.2. Les angles d'un triangle ABC sont aigus si et seulement si le centre du cercle circonscrit appartient à l'intérieur du triangle.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et soit O son centre. Dire que le point O appartient à l'intérieur du triangle ABC, c'est dire que O et chacun des sommets appartiennent au même demi-plan ouvert de frontière le côté opposé.

Si cette dernière condition est vérifiée, alors

$$2\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{BOC}} < \pi, \ \ 2\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{AOC}} < \pi \quad \text{et} \quad 2\widehat{\mathrm{BCA}} = \widehat{\mathrm{BOA}} < \pi,$$

d'après la proposition 4, donc : $\widehat{\mathrm{BAC}}, \ \widehat{\mathrm{ABC}}, \ \widehat{\mathrm{BCA}} < \frac{\pi}{2}$. Réciproquement, si les trois angles de ABC sont aigus, alors

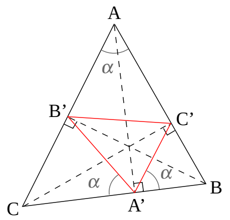
$$2\pi - 2\widehat{\mathrm{BAC}}, \ 2\pi - 2\widehat{\mathrm{ABC}}, \ 2\pi - 2\widehat{\mathrm{BCA}} > \pi$$

et donc nécessairement

$$\widehat{\mathrm{BOC}} = 2\widehat{\mathrm{BAC}}, \ \ \widehat{\mathrm{AOC}} = 2\widehat{\mathrm{ABC}} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{BOA}} = 2\widehat{\mathrm{BCA}}$$

d'après le point 1 de la proposition 4. On en déduit que le point O est intérieur au triangle ABC par une nouvelle application de la proposition 4 (point 1.(i)).

2.3. Une propriété remarquable des pieds des hauteurs d'un triangle à angles aigus.



Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. Si A', B' et C' sont les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement, alors les hauteurs (resp. les côtés) de ABC sont les bissectrices intérieures (resp. extérieures) du triangle $\mathrm{A'B'C'}$.

Vu l'hypothèse sur les angles de ABC, les côtés du triangle issus d'un même sommet sont situés de part et d'autre de la hauteur correspondante.

Les triangles rectangles $\mathrm{AA'C}$ et $\mathrm{AC'C}$ ayant la même hypothènuse $[\mathrm{AC}]$, ils ont le même cercle circonscrit et les points $\mathrm{A}', \mathrm{C}', \mathrm{A}, \mathrm{C}$ appartiennent donc à un même cercle. Comme les points A et A' sont situés de part et d'autre de (CC'), on en déduit que les angles $\widehat{\mathrm{CA'C'}}$ et $\widehat{\mathrm{CAC'}} = \widehat{\mathrm{BAC}}$ sont supplémentaires. On démontre de même que les angles $\widehat{\mathrm{BA'B'}}$ et $\widehat{\mathrm{BAB'}} = \widehat{\mathrm{BAC}}$ sont supplémentaires (considérer les triangles rectangles $\mathrm{AA'B}$ et $\mathrm{AB'B}$). Nous obtenons ainsi :

$$\widehat{\mathrm{BA'B'}} = \widehat{\mathrm{CA'C'}},$$

ce qui montre que les demi-droites $[\mathrm{A'B'})$ et $[\mathrm{A'C'})$ sont symétriques par rapport à la hauteur $[\mathrm{AA'}]$; celle-ci est donc la bissectrice intérieure de ces demi-droites. On raisonne de même avec les points B' et C'.

3. Le critère de cocyclicité ou d'alignement — Des points sont dits *cocycliques* s'ils appartiennent à un même cercle. Le corollaire 2 met en évidence une propriété angulaire de quatre points cocycliques, et nous allons maintenant voir qu'il s'agit (essentiellement) d'un critère de cocyclicité.

Rappelons tout d'abord la caractérisation angulaire de l'alignement, que nous utiliserons à plusieurs reprises dans ce qui suit.

Proposition 7 — *Soit* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ *des points du plan tels que* $\mathrm{C} \notin \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$. *Ces points sont alignés si et seulement si* $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}})} = 0 \pmod{\pi}$.

Démonstration. Il suffit d'observer que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ est nul ou plat. □

Énonçons maintenant le critère de cocyclicité ou d'alignement.

Théorème 8 — *Étant donné quatre points distincts* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ *du plan, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *ces points sont alignés ou cocycliques ;*

(b) $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{DB}})} \pmod{\pi}$.

Première démonstration (utilisant une tangente). Nous distinguerons deux cas de figure.

1. Les points A, B *et* C *sont alignés* – On utilise le critère d'alignement rappelé ci-dessus (proposition 7). L'hypothèse se traduit par l'égalité angulaire : $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})} = 0 \pmod{\pi}$. Pour que les quatre points A, B, C, D soient alignés, il faut et il suffit que l'on ait $\mathrm{D} \in (\mathrm{AB})$, c'est-à-dire $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{DB}})} = 0 \pmod{\pi}$, et ceci est le cas si et seulement si $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{DB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})} \pmod{\pi}$.

2. Les points A, B *et* C *ne sont pas alignés* – Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Il s'agit de l'unique cercle passant par A, B, C, et les quatre points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\mathrm{D} \in \mathscr{C}$.

La condition (a) entraîne (b) d'après le corollaire 2.

Supposons maintenant que la condition (b) soit vérifiée et prouvons qu'elle entraîne (a). Les trois points A, B et D ne sont pas alignés : en effet, $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{DB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})} \neq 0 \pmod{\pi}$ et l'on applique la proposition 7.

Soit $\mathscr{C}'$ le cercle circonscrit au triangle ABD. On désigne respectivement par $\mathscr{T}_{\mathrm{A}}$ et $\mathscr{T}'_{\mathrm{A}}$ les tangentes aux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ au point A. Si l'on choisit des points $\mathrm{T} \in \mathscr{T}_{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{T}' \in \mathscr{T}'_{\mathrm{A}}$ distincts de A,

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})} \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{T'A}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{DB}})} \pmod{\pi}$$

(théorèmes 1 et 3), donc

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{T'A}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})} - \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{T'A}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})} = 0 \pmod{\pi}$$

et les points A, T, T′ sont alignés. Nous obtenons ainsi : $\mathscr{T}_{\mathrm{A}} = \mathscr{T}'_{\mathrm{A}}$.

Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ passant tous deux par les points A, B et ayant la même tangente au point A, ils sont égaux ; leur centre est le point d'intersection de la médiatrice du segment [AB] et de la perpendiculaire à $\mathscr{T}_{\mathrm{A}} = \mathscr{T}'_{\mathrm{A}}$ passant par A. Nous en déduisons que D appartient à $\mathscr{C}$, ce qui prouve que les quatre points A, B, C, D sont cocycliques. □

Seconde démonstration (sans utiliser de tangente). Le début est analogue à celui de la première démonstration. La différence concerne le point 2 : au lieu d'utiliser les tangentes $\mathscr{T}_{\mathrm{A}}$ et $\mathscr{T}'_{\mathrm{A}}$, on considère les centres O, O′ des cercles $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ et l'on applique le théorème 1.

La condition (b) est équivalente à l'égalité : $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{O'A}},\overrightarrow{\mathrm{O'B}})}$ en vertu du théorème 1.

Par ailleurs, en considérant les triangles isocèles AOB et AO′B :

$$2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AO}})} = \pi - \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})} \quad \text{et} \quad 2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AO'}})} = \pi - \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{O'A}},\overrightarrow{\mathrm{O'B}})},$$

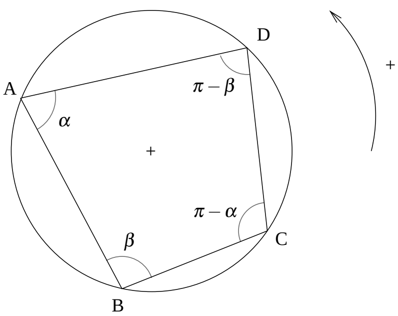
donc

$$2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AO}},\overrightarrow{\mathrm{AO'}})} = 2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AO'}})} - 2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AO}})} = 0, \ \text{puis} \ \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AO}},\overrightarrow{\mathrm{AO'}})} = 0 \pmod{\pi}.$$

Les trois points A, O et O′ sont donc alignés sur une même droite Δ (proposition 7). Par ailleurs, les points O et O′ appartiennent tous deux à la médiatrice Δ' du segment [AB]. Comme $\Delta \neq \Delta'$, ces deux droites ont au plus un point d'intersection et donc $\mathrm{O} = \mathrm{O}'$. Nous obtenons ainsi $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$, puis $\mathrm{D} \in \mathscr{C}$. □

Applications — Le théorème 8 a de nombreuses applications ; en voici trois.

3.1. Inscriptibilité d'un quadrilatère convexe dans un cercle (*Théorème de Ptolémée*).



Un quadrilatère convexe ABCD non plat est inscriptible dans un cercle si et seulement si ses angles géométriques opposés sont supplémentaires.

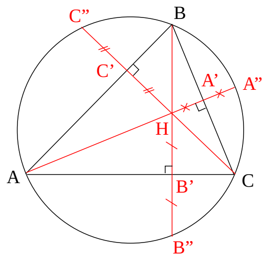
On sait déjà que la condition est nécessaire (application 2.1) et il faut maintenant prouver qu'elle est suffisante. Le quadrilatère ABCD étant convexe et non plat, les points A et C sont situés de part et d'autre de la droite (BD) et les bases $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ et $(\overrightarrow{\mathrm{CB}},\overrightarrow{\mathrm{CD}})$ ont par conséquent des orientations opposées (lemme 6).

Si l'on oriente le plan de telle sorte que la base $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ soit directe, alors (lemme 5)

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}})} = \widehat{\mathrm{BAD}} \quad \text{et} \ \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CB}},\overrightarrow{\mathrm{CD}})} = -\widehat{\mathrm{BCD}}, \ \text{donc} \ \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CB}},\overrightarrow{\mathrm{CD}})} = -(\pi - \widehat{\mathrm{BAD}}) = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}})} \pmod{\pi}$$

et les points A, B, C, D sont cocycliques.

3.2. Une propriété de l'orthocentre d'un triangle.



Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle ABC non plat par rapport aux trois côtés appartiennent au cercle circonscrit à ABC.

Notons H l'orthocentre du triangle ABC et désignons par A', B' et C' (resp. A'', B'' et C'') les projetés orthogonaux de H sur (resp. les symétriques de H par rapport à) $(BC), (AC)$ et (AB). Les réflexions transformant un angle orienté en son opposé, $\widehat{(\overrightarrow{A''B}, \overrightarrow{A''C})} = -\widehat{(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})} = \widehat{(\overrightarrow{HC''}, \overrightarrow{HB''})}$. Les triangles AHB'' et AHC'' étant rectangles en B' et C',

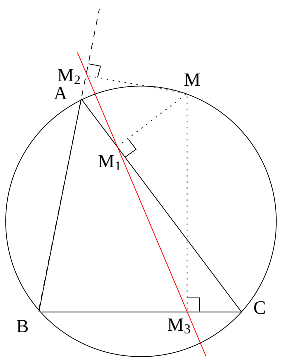
$$\widehat{(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB''})} = \frac{\pi}{2} + \widehat{(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC})} \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad \widehat{(\overrightarrow{HC''}, \overrightarrow{HA})} = \frac{\pi}{2} + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH})} \pmod{\pi},$$

d'où

$$\begin{aligned} \widehat{(\overrightarrow{A''B}, \overrightarrow{A''C})} &= \widehat{(\overrightarrow{HC''}, \overrightarrow{HB''})} = \widehat{(\overrightarrow{HC''}, \overrightarrow{HA})} + \widehat{(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB''})} \\ &= \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH})} + \widehat{(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC})} \pmod{\pi} \\ &= \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème 8, on en déduit que le point A'' appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3.3. Les droites de Simson d'un triangle



Soit ABC un triangle non plat et M un point du plan distinct de A, B et C. Les projetés orthogonaux de M sur les côtés du triangle sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit à ABC.

On commence par supposer que les projetés de M sont tous distincts de A, B et C. En utilisant les triangles rectangles qui apparaissent sur la figure pour repérer les points cocycliques, on obtient facilement

$$\begin{aligned} \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} &= \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM_1})} + \widehat{(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{MB})} \\ &= \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{M_2M_1})} + \widehat{(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{CB})} \pmod{\pi} \\ &= \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} + \widehat{(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_2M_1})} \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

donc $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} - \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_2M_1})} \pmod{\pi}$, et la conclusion découle de la proposition 7 et du théorème 8.

Le cas où l'un des projetés de M est un sommet du triangle se traite séparément. Supposons, pour fixer les idées, $M_1 = A$, i.e. $(MA) \perp (AB)$. On a $M_2 \in (AC)$ et $M_2 \neq A$ (sinon A, B et C seraient alignés), donc $(M_1M_2) = (AC)$. On en déduit que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si $M_3 = C$, donc ssi $(CM) \perp (BC)$. D'autre part, M appartient à $\mathscr{C}$ ssi M est le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à B, donc ssi $(CM) \perp (BC)$. Ceci achève la démonstration.

4. D'autres applications — Parmi les nombreuses applications possibles des résultats de cette leçon, en voici quelques-unes particulièrement importantes.

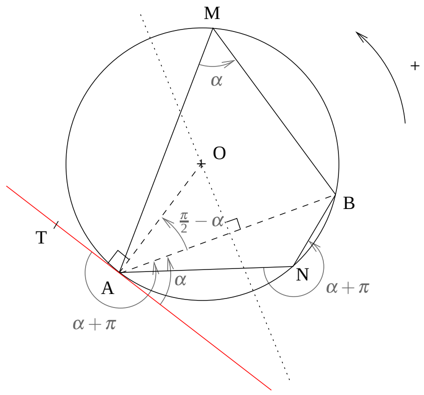
4.1. Le théorème du cercle capable — Soit A et B deux points distincts du plan. Étant donné un nombre réel α, on désigne par $\mathscr{C}_\alpha$ l'ensemble des points M du plan, distincts de A et B, tels que

$$\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \alpha \pmod{\pi}.$$

Théorème 9 — *(i) Si* $\alpha = 0 \pmod{\pi}$, *alors* $\mathscr{C}_\alpha \cup \{A, B\}$ *est la droite* (AB).

(ii) Si $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$, *alors* $\mathscr{C}_\alpha \cup \{A, B\}$ *est un cercle passant par les points* A *et* B, *caractérisé par les conditions équivalentes suivantes :*

– *son centre est l'unique point* O *de la médiatrice du segment* $[AB]$ *tel que* $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})} = \frac{\pi}{2} - \alpha \pmod{\pi}$ *;*



– *sa tangente au point* A *est la droite* (AT), *où* $\mathrm{T}\neq\mathrm{A}$ *est n'importe quel point tel que* $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})}=\alpha\pmod{\pi}$.

Première démonstration (utilisant une tangente). L'assertion (i) est une reformulation de la proposition 3.

(ii) Fixons un point T_0 distinct de A tel que $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{T_0A}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})}=\alpha\pmod{\pi}$. La droite $\mathscr{T}=(\mathrm{AT}_0)$ est distincte de (AB) car $\alpha\neq 0\pmod{\pi}$ et

$$\mathscr{T}=\{\mathrm{T}\in\mathscr{P}-\{\mathrm{A}\}\mid\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{T_0A}})}=0\pmod{\pi}\}=\{\mathrm{T}\in\mathscr{P}-\{\mathrm{A}\}\mid\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})}=\alpha\pmod{\pi}\}$$

d'après (i).

Comme $\mathscr{T}\neq(\mathrm{AB})$, il existe un unique cercle $\mathscr{C}$ passant par les points A,B et tangent à la droite $\mathscr{T}$. Quel que soit le point M de $\mathscr{C}$ distinct de A et B,

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{T_0A}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})}$$

par application du théorème 3, donc $\mathrm{M}\in\mathscr{C}_\alpha$ et $\mathscr{C}\subset\mathscr{C}_\alpha\cup\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$.

Considérons maintenant un point $\mathrm{M}\in\mathscr{C}_\alpha$. Comme $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})}=\alpha\neq 0\pmod{\pi}$, les points A,B et M ne sont pas alignés. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle circonscrit au triangle AMB et soit $\mathrm{T}'\neq\mathrm{A}$ un point de la tangente à $\mathscr{C}'$ au point A. Les théorèmes 1 et 3 ainsi que la définition de $\mathscr{C}_\alpha$ impliquent

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{T'A}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})}=\alpha\pmod{\pi},$$

donc $\mathrm{T}'\in\mathscr{T}$ et par suite $\mathscr{C}'=\mathscr{C}$. Ceci prouve que le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$, d'où finalement $\mathscr{C}_\alpha\cup\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}=\mathscr{C}$.

Finalement, si O désigne le centre du cercle $\mathscr{C}_\alpha\cup\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$, l'équivalence des deux conditions envisagées se déduit simplement de l'identité

$$\frac{\pi}{2}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AO}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})}+\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AO}})}\pmod{\pi}.$$

□

Seconde démonstration (n'utilisant pas de tangente). (ii) Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul tel que $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{u})}=\frac{\pi}{2}-\alpha\pmod{\pi}$. Si $\alpha\neq 0\pmod{\pi}$, alors $\frac{\pi}{2}-\alpha\neq\frac{\pi}{2}\pmod{\pi}$; la droite $(\mathrm{A};\overrightarrow{u})$ n'est donc pas perpendiculaire à (AB) et elle intersecte par conséquent la médiatrice du segment $[\mathrm{AB}]$ en un unique point O tel que

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AO}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{u})}=\frac{\pi}{2}-\alpha\pmod{\pi}.$$

En considérant le triangle isocèle AOB, ceci implique

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})}=\pi-2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AO}})}=2\alpha\pmod{2\pi}.$$

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon OA. Pour tout point C de $\mathscr{C}$ distinct de A et B,

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})}=\frac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})}=\alpha\pmod{\pi}$$

en vertu du théorème 1 et donc $\mathscr{C}\subset\mathscr{C}_\alpha\cup\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$.

Considérons réciproquement un point M de $\mathscr{C}_\alpha$ et fixons un point C de $\mathscr{C}$ distinct de A et B. On a alors

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})}\pmod{\pi},$$

donc les points $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ et M sont cocycliques ou alignés en vertu du théorème 4. Comme $\mathscr{C}$ est l'unique cercle passant par les trois points non alignés A,B et C, nous en déduisons que le point M appartient à $\mathscr{C}$. □

4.2. Le théorème de l'arc capable — Soit A et B deux points distincts du plan. Étant donné un nombre réel α, on désigne par $\mathscr{A}_\alpha$ l'ensemble des points M du plan, distincts de A et B, tels que

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})} = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Comme

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})} = \alpha \pmod{\pi} \iff \left(\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})} = \alpha \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})} = \alpha+\pi \pmod{2\pi}\right),$$

pour tout point M du plan (distinct de A et B), il est d'emblée clair que l'on a

$$\mathscr{C}_\alpha = \mathscr{A}_\alpha \cup \mathscr{A}_{\alpha+\pi}.$$

Nous allons voir que $\mathscr{A}_\alpha$ et $\mathscr{A}_{\alpha+\pi}$ sont les deux arcs de $\mathscr{C}_\alpha$ d'extrémités A et B.

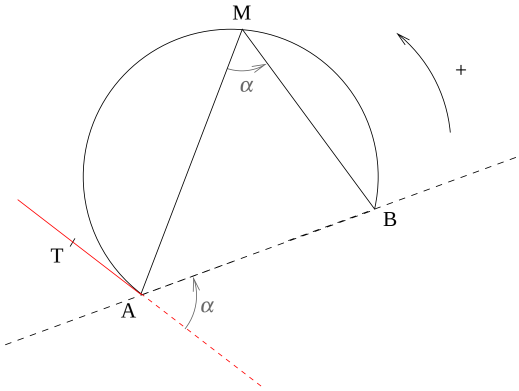
Théorème 10 — *(i) Si* $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$*, alors* $\mathscr{A}_\alpha = (\mathrm{AB}) - [\mathrm{AB}]$.

(ii) Si $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$*, alors* $\mathscr{A}_\alpha =]\mathrm{AB}[$.

(iii) Si $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$*, alors* $\mathscr{A}_\alpha \cup \{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$ *est un arc de cercle d'extrémités* A *et* B*. Plus précisément :*

$$\mathscr{A}_\alpha = \mathscr{C}_\alpha \cap \Pi,$$

où Π *est le demi-plan ouvert de frontière* (AB) *contenant les points* T *tels que* $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})} = \alpha \pmod{2\pi}$.



Démonstration. Les points (i) et (ii) sont clairs.

(iii) Soit T un point du plan distinct de A tel que $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})} = \alpha \pmod{2\pi}$. Ce point n'appartient pas à la droite (AB) puisque $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$ et l'on désigne par Π le demi-plan ouvert de frontière (AB) qui le contient. Quel que soit le point M de $\mathscr{C}_\alpha$,

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})} \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})} + \pi \pmod{2\pi}.$$

Comme $\sin(\alpha) \neq 0$ et $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, nous sommes dans le premier (resp. le second) cas de figure si et seulement si $\sin\,\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})}$ et $\sin\,\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})}$ ont le même signe (resp. ont des signes opposés), c'est-à-dire si et seulement si les bases $(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})$ et $(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})$ définissent la même orientation (resp. des orientations opposées).

Les bases $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})$ et $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{TB}})$ ont la même orientation car

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') &= \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{TB}}) = \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{TA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})\\ &= \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = 1.\end{aligned}$$

La conclusion découle maintenant du lemme 6 : pour tout point M de $\mathscr{C}_\alpha$,

$$\begin{aligned}\mathrm{M} \in \mathscr{A}_\alpha &\iff \text{les bases } (\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}) \text{ et } (\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}) \text{ définissent la même orientation}\\ &\iff \text{les bases } (\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}) \text{ et } (\overrightarrow{\mathrm{TA}},\overrightarrow{\mathrm{TB}}) \text{ définissent la même orientation}\\ &\iff \text{M et T appartiennent au même demi-plan de frontière } (\mathrm{AB})\\ &\iff \mathrm{M} \in \Pi\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi : $\mathscr{A}_\alpha = \mathscr{C}_\alpha \cap \Pi$. □

4.3. Utilisation des nombres complexes — On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ que l'on utilise pour identifier $\mathscr{P}$ et $\mathbb{C}$: au point $\mathrm{M} = \mathrm{O} + x \cdot \overrightarrow{u} + y \cdot \overrightarrow{v}$ correspond son affixe $z_\mathrm{M} = x + iy$.

Si A, B et M sont trois points distincts d'affixes respectives a, b et z, alors

$$\arg(z-a) = \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AM}})} \quad \text{et} \quad \arg(z-b) = \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BM}})},$$

donc

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{BM}})} = \arg(z-b) - \arg(z-a) = \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right).$$

Ceci permet tout d'abord de reformuler le critère de cocyclicité.

Théorème 8bis — *Quatre points distincts du plan d'affixes a, b, c, d sont alignés ou cocycliques si et seulement si*

$$\frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Le théorème 8 fournit la condition

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{d-a}{d-b}\right) = \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) - \arg\left(\frac{d-b}{d-a}\right) = 0 \pmod{\pi}$$

et l'argument d'un nombre complexe $z \neq 0$ est nul modulo π si et seulement si $z \in \mathbb{R}$. □

On peut également reformuler les théorèmes du cercle et de l'arc capable (théorèmes 9 et 10).

Théorème 9bis — *Soit a et b deux nombres complexes distincts. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble des $z \in \mathbb{C} - \{a, b\}$ tels que*

$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \alpha \pmod{\pi}$$

est

(i) la droite (ab), privée de a et b, si $\alpha = 0 \pmod{\pi}$;
(ii) le cercle passant par a et b et tangent à la droite (at), où $t = a - e^{-i\alpha}(b-a)$, privé des points a et b.

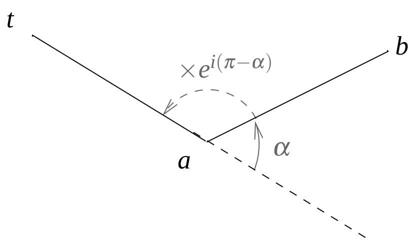
Théorème 10bis — *Soit a et b deux nombres complexes distincts. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble des $z \in \mathbb{C} - \{a, b\}$ tels que*

$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \alpha \pmod{2\pi}$$

est

(i) la droite (ab) privée du segment $[a, b]$ si $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$;
(ii) l'intérieur du segment $[a, b]$ si $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$;
(iii) l'arc de cercle ouvert d'extrémités a, b et tangent à la demi-droite $[at)$, où $t = a - e^{-i\alpha}(b-a)$ si $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$.

Démonstrations. □



Ces deux énoncés sont des reformulations immédiates des théorèmes 9 et 10, en observant que si T est un point d'affixe $t \neq a$ tel que $\mathrm{AT} = \mathrm{AB}$, alors $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{TA}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}})} = \alpha \pmod{2\pi}$ si et seulement si $b - a = e^{i\alpha}(a-t)$, c'est-à-dire

$$t - a = -e^{-i\alpha}(b-a) = e^{i(\pi-\alpha)}(b-a).$$

Remarque — Le théorème 10bis décrit complètement les *lignes de niveau* de l'argument de la fonction $f : \mathbb{C} - \{a\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z-b}{z-a}$.