

À la découverte d'une série géométrique

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Article

par
Stéphane PASQUET

21 août 2015

1 Introduction

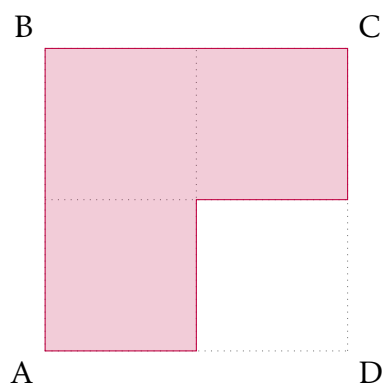
C'est en classe de 1^{re}S et ES que l'on voit la notion de suite géométrique et par là même celle de série géométrique (somme infinie de termes consécutifs d'une suite géométrique).

Nous allons voir ici une initiation historique à ces notions : celle d'Archimède.

2 Démonstration géométrique du fait que l'infini peut devenir fini

Je passe sur l'origine réelle de la motivation d'Archimède à faire ce que nous allons voir (pour les curieux, il s'intéressait à l'aire du domaine délimité par une parabole et une de ses cordes) et je vais directement au cœur du problème.

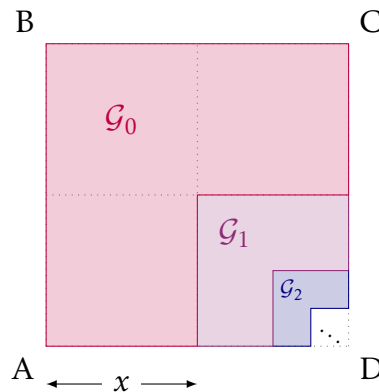
Nous allons considérer le gnomon colorié ci-dessous :



Considérons que ce gnomon ait une aire égale à 1 et découpons-le en 3 parts égales : chacune des parts a donc une aire égale à $\frac{1}{3}$.

Le carré ABCD a donc une aire égale à $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Considérons maintenant que le carré ABCD soit l'union infinie des gnomons $\mathcal{G}_n$ représentés ci-dessous :



Notons x la moitié de la longueur du segment $[AD]$; alors, l'aire $\mathcal{A}_0$ du gnomon $\mathcal{G}_0$ s'exprime par :

$$\mathcal{A}_0 = 3x^2.$$

Celle de $\mathcal{G}_1$ est donc :

$$\mathcal{A}_1 = 3 \times \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{4} \times 3x^2 = \frac{1}{4}\mathcal{A}_0.$$

Le principe de construction des gnomons reste identique pour chacun d'eux donc cette dernière relation est vraie pour tous les gnomons ; autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{A}_{n+1} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_n.$$

N.B. On reconnaît ici une suite géométrique (rappelons que le terme « géométrique » vient précisément du fait qu'Archimède a mis en valeur une telle suite à partir de la géométrie).

Nous savons que $\mathcal{A}_0 = 1$ donc la somme de l'aire des gnomons est :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

Or, cette aire est précisément égale à celle du carré ABCD. Ainsi,

$$\boxed{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{4}{3}}$$

Nous venons ici, uniquement à l'aide de considérations géométriques, de montrer qu'une somme infinie pouvait être finie.