Introduction aux fractales

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

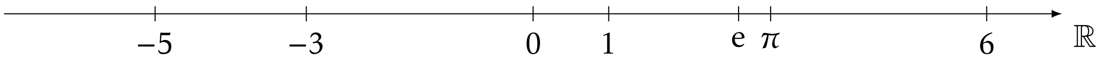
Article

par
Stéphane PASQUET

15 juillet 2015

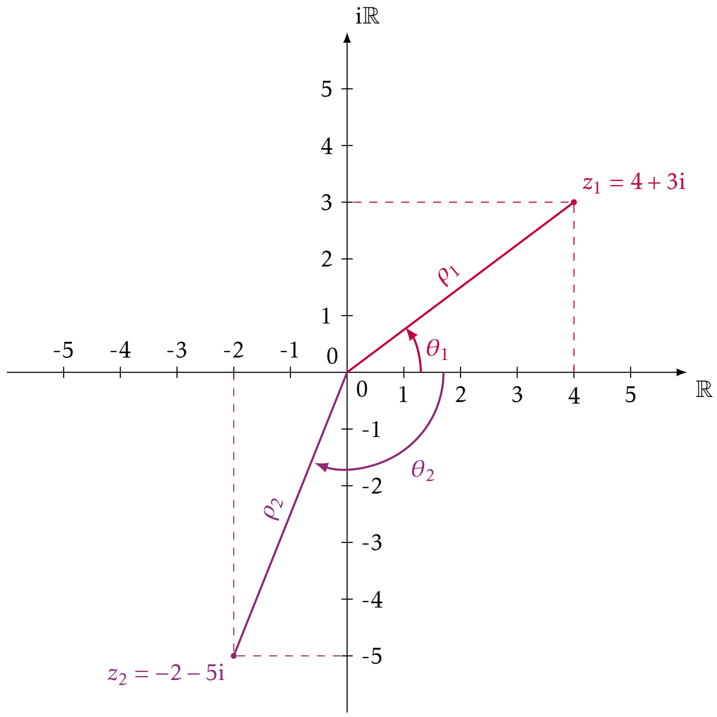
1 Préambule

La plupart des gens connaissent l'existence des nombres réels car ces nombres sont utilisés tout le temps. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble de ses nombres et on a l'habitude de le représenté par un axe orienté gradué comme ci-dessous :

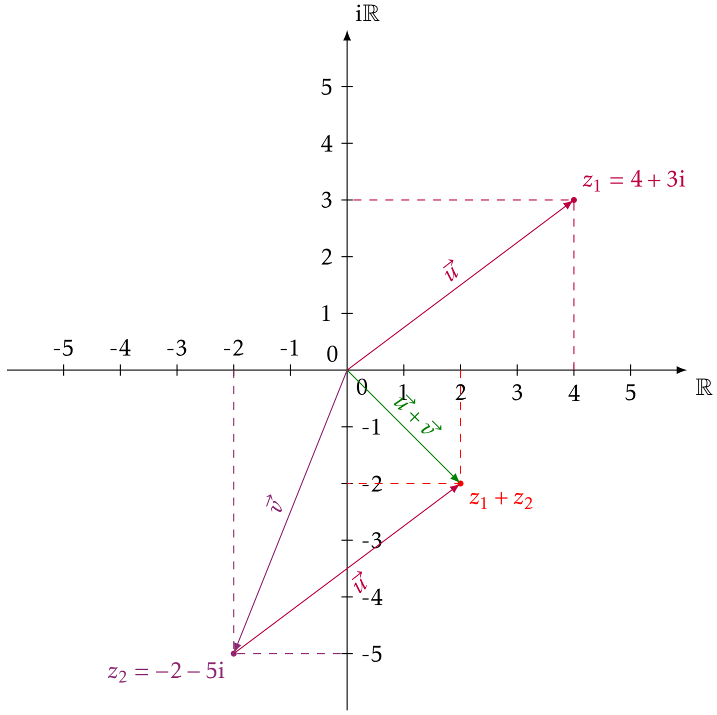


On dit que $\mathbb{R}$ est de dimension 1 car il suffit d'un axe pour pouvoir représenter tous les nombres qui le composent.

Si l'on adjoint à cette représentation un second axe perpendiculaire passant par « 0 », on créé alors un autre ensemble, de dimension 2 cette fois-ci. Le second axe est appelé l'axe des imaginaires et ainsi, nous avons créé un ensemble de nombres dont l'écriture est composée d'un nombre réel et d'un nombre imaginaire ; cet ensemble est appelé l'ensemble des nombres complexes, et est noté $\mathbb{C}$.



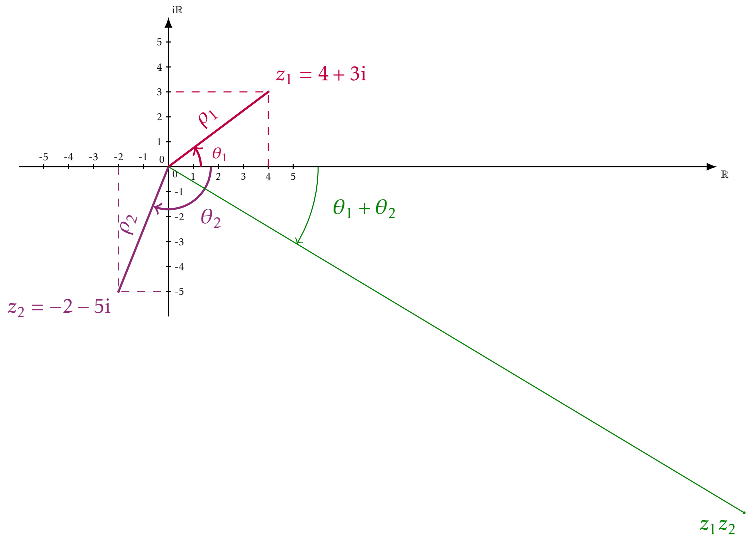
À chaque nombre complexe de la forme $z = a + ib$, on attribue un argument θ (à 2π près) et son module ρ (comme l'illustre le schéma ci-contre).
Par exemple, pour z_1, le module est $\rho_1 = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$ (merci Pythagore) et un argument est un angle que l'on peut calculer à l'aide de la trigonométrie dans le triangle rectangle : $\tan\theta_1 = \dfrac{3}{4}$ donc $\theta_1 = \arctan\dfrac{3}{4}$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.



Maintenant, nous allons définir sur l'ensemble $\mathbb{C}$ l'addition de la manière suivante : quand on ajoute z_1 et z_2, cela revient à ajouter les abscisses et les ordonnées :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (4+3\mathrm{i}) + (-2-5\mathrm{i}) \\ &= \big[4+(-2)\big] + \big[3+(-5)\big]\mathrm{i} \\ &= 2-2\mathrm{i}. \end{aligned}$$

L'addition de deux nombres complexes revient à additionner les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (voir ci-contre).



À présent, nous allons définir le produit de deux nombres complexes de la manière suivante : quand on multiplie z_1 et z_2, on obtient un nombre complexe dont le module est $\rho_1 \times \rho_2$ et donc un argument est $\theta_1 + \theta_2$.

$$\begin{aligned} \rho_1\rho_2 &= 5\sqrt{(-2)^2+(-5)^2} \\ &= 5\sqrt{29} \\ \theta_1\theta_2 &= \arctan\frac{3}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{2}{5}\right) \\ &\approx 37° - (90° - 22°) \\ &\approx -31° \end{aligned}$$

(j'ai mis les arguments en degrés pour que cela soit plus explicite à nos yeux)

Voilà ! Nous sommes à présents prêts pour découvrir le monde des fractales...

2 Ensemble de Julia

Considérons la suite (z_n) définie par son premier terme z_0 et par la relation de récurrence :

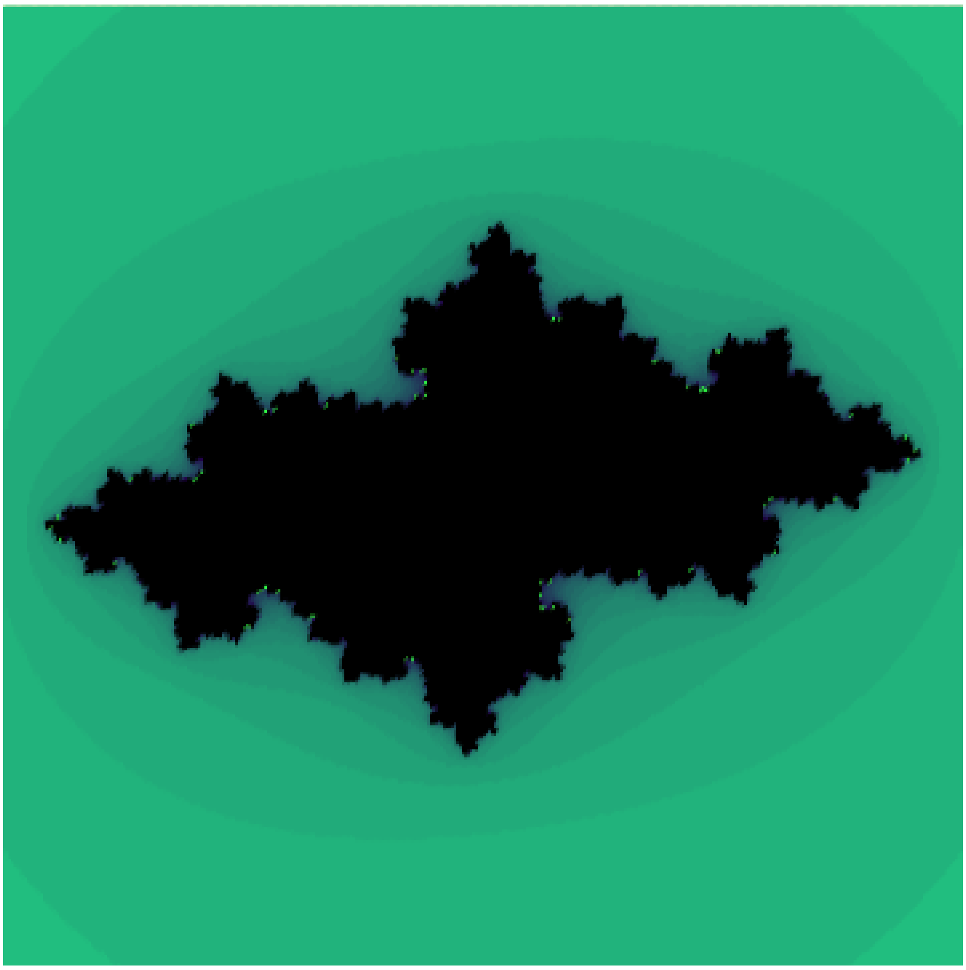
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_{n+1} = z_n^2 + c \quad , \quad c \in \mathbb{C}.$$

Cette suite sera dite *bornée* si tous les z_n sont dans une couronne, c'est-à-dire si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad m \leqslant |z_n| \leqslant M.$$

Alors, l'ensemble de Julia est la frontière de l'ensemble de tous les z_0 tels que cette suite est bornée.
Pour représenter cet ensemble, pour chaque point d'un plan rapporté à un repère orthonormé de coordonnées $(x_0\,;y_0)$, qui correspond à $z_0 = x_0 + y_0\mathrm{i}$, on attribue une couleur si la suite (z_n) est bornée, et une autre si elle ne l'est pas.

On peut ensuite jouer sur les variations de couleurs en fonction de la vitesse de divergence. Par exemple, on attribue le noir à tous les nombres z_0 tels que la suite est bornée. Ensuite, on attribue différentes teintes de vert à tous ceux tels que la suite diverge. On obtient alors avec $c = -0,67 + 0,209\mathrm{i}$:



http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/mandelbrot.htm

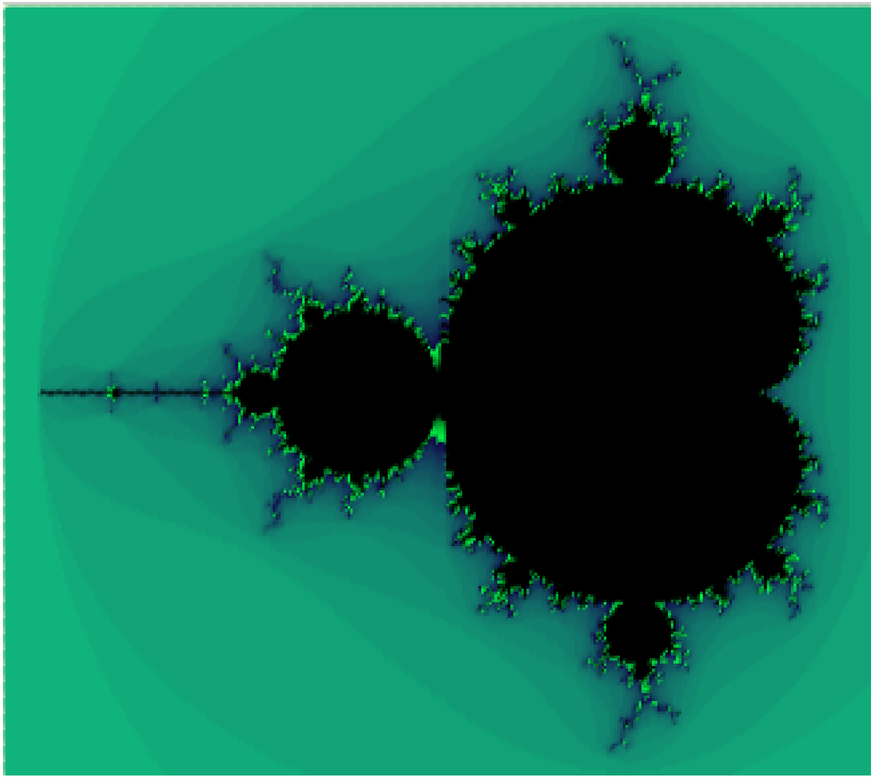
3 Ensemble de Mandelbrot

On considère cette fois-ci la suite :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C'est un cas particulier de la suite précédente car ici, le terme initial est toujours nul. L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble de tous les nombres complexes c tels que la suite est bornée.

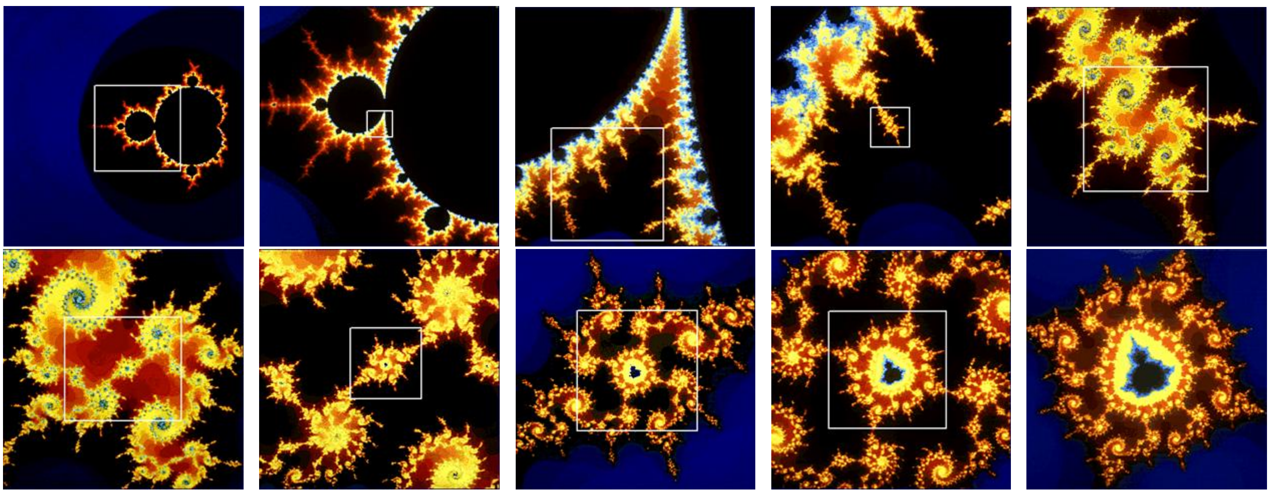
Alors, avec les mêmes principes que précédemment, on obtient :



http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/mandelbrot.htm

4 Auto-similarité

L'une des propriétés les plus remarquables des fractales est l'auto-similarité, c'est-à-dire qu'en faisant un zoom sur la frontière, on retrouve la fractale comme l'illustre la succession de zooms suivante (trouvée sur la page http://fractales.sectionpc.info/fract_intro.htm) :



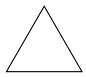
5 Autres fractales célèbres

5.1 Le flocon de Von Koch

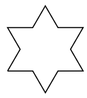
Tout part d'un triangle équilatéral auquel nous allons faire subir à chaque côté la transformation suivante :

devient

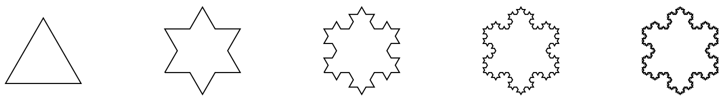
pour obtenir :



devient



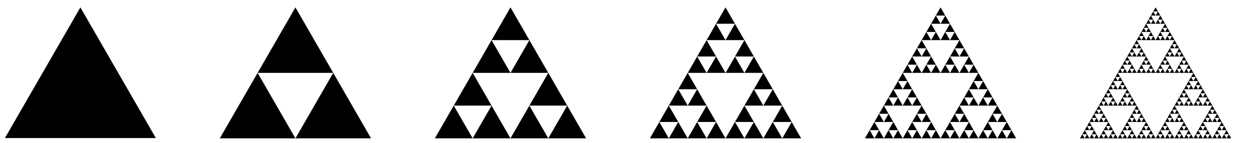
À cette nouvelle figure, nous appliquons la même transformation à chaque segment de son périmètre, et ce à l'infini, ce qui donne successivement :



La figure « limite » est appelée *flocon de Von Koch*.

5.2 Le triangle de Sierpinski

On part là aussi d'un triangle équilatéral dans lequel on construit 4 triangles équilatéraux ; ensuite, dans chacun des quatre triangles équilatéraux, on fait de même et ainsi de suite, ce qui donne :



6 Dimension d'une fractale

Avant tout, il faut comprendre cette notion de « dimension » : si l'on prend un segment et qu'on le mesure avec une règle de 20 cm, on trouve une longueur $20 \times k$ (un certain nombre de fois la longueur de notre règle), mais si on mesure ce même segment avec une règle de 10 cm, la longueur sera alors égale à $10 \times k'$, avec $k' = 2k$, que l'on peut noter $k' = 2^1 k$.
On dit alors que notre segment a une dimension égale à 1.

Si l'on prend maintenant un rectangle et que l'on mesure son aire à l'aide de l'aire d'un carré de côté 3 cm, on obtiendra une aire égale à $3^2 \times k$ alors que si on la mesure à l'aide de l'aire d'un carré de côté 2 cm, on obtiendra une aire égale à $2^2 \times k'$, avec $k' = \left(\frac{3}{2}\right)^2 k$.
On dit alors que notre carré a une dimension égale à 2.

Il en serait de même pour un volume : sa dimension serait égale à 3.

Revenons à la méthode que nous avons utilisée pour déterminer la dimension d'un segment : nous avons pris une longueur de règle x (qui nous a donné une longueur $y = xk$) puis nous avons pris une règle de longueur $\frac{x}{2}$, ce qui nous a donné une longueur de segment égale à $2y$.

Pour les surfaces, nous avons pris un carré de longueur x et nous avons trouvé une aire égale à y, puis en prenant un carré de longueur $\frac{2}{3}x$, nous avons trouvons une aire égale à $\left(\frac{3}{2}\right)^2 y$.
On appelle « étalon » ce qui nous sert à mesurer au départ (ici, la longueur de l'étalon est 20 cm pour la règle, 3 cm pour le carré).

Dans un cas général, on peut définir la dimension d'un objet par le nombre d tel que, si on divise la longueur de l'étalon par k, alors la mesure finale est multipliée par k^d.
Par exemple, pour les volumes, si on divise les dimensions par 2, les volumes seront multipliés par 8 donc la dimension d'un solide est le nombre d tel que $2^d = 8$, ce qui nous donne $d = 3$.
Ainsi, si $a^d = b$, alors $d = \frac{\ln b}{\ln a}$.
Regardons alors ce qui se passe pour le flocon de Von Koch :

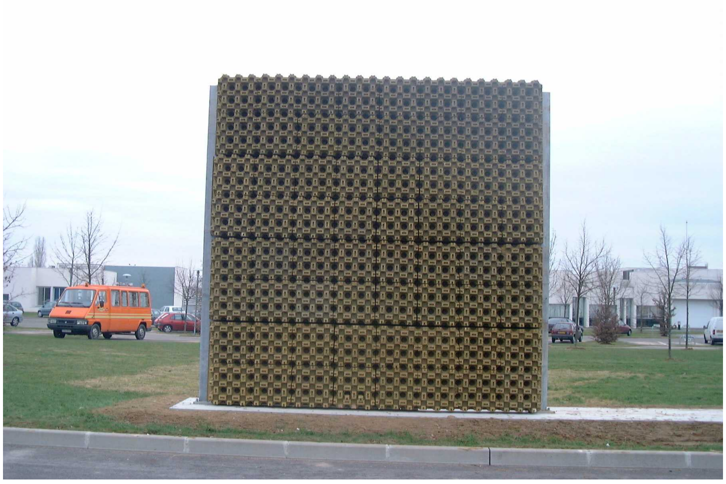
Le premier segment a une longueur 1.
Ensuite, nous avons divisé la longueur de ce segment en $a = 3$ et nous avons obtenu une ligne brisée composée de $b = 4$ parties identiques.

La dimension est donc $d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26$.
À travers cet exemple, on s'aperçoit que la dimension d'une fractale est comprise entre 1 et 2 : ni tout à fait une courbe, ni tout à fait une surface, la fractale est entre les deux...

7 Quelques applications des fractales

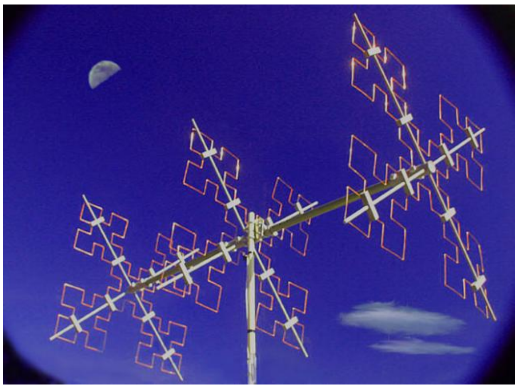
Les fractales ne servent pas uniquement à produire de très belles images comme celle-ci :

Elles ont aussi une utilité concrète.
Par exemple, elles servent à construire des mus anti-bruit (qui absorbent le bruit) comme celui exposé à Polytechnique :



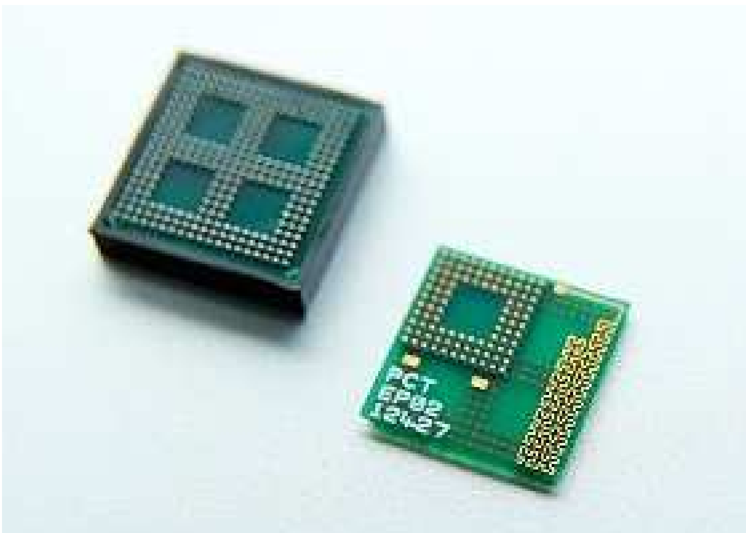
http://geoffreyhistoire.pagesperso-orange.fr/fractales/bruit.html

ou encore des antennes fractales :



http://www.f3dd.org/mapage/

ou bien, plus proches de nous, des antennes pour smartphones (rappelez-vous les premiers mobiles qui avaient une antenne externe... et qui n'en ont plus !) :



http://www.lesechos.fr/thema/
0203528938125-les-antennes-fractales-des-mobiles-674415.php