

Multiplier deux polynômes

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Article

par
Stéphane PASQUET

4 octobre 2015

1 Introduction

Multiplier de deux polynômes peut être quelques fois tâche ardue, surtout si leur degré est supérieur à 2. Nous allons voir ici une méthode pour aller plus vite que d'appliquer la distributivité.

2 Qu'est-ce qu'un polynôme ?

Un polynôme P est une somme de plusieurs termes de la forme $a_k x^k$.
On écrit alors :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 ,$$

que l'on peut aussi noter :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k .$$

Si tous les a_k sont des nombres réels, on dit que le polynôme P appartient à l'ensemble $\mathbb{R}[x]$.
Si les a_k sont des nombres complexes, on dit que $P \in \mathbb{C}[x]$.

On dit ici que le degré de P est égal à n et on note : $d^\circ(P) = n$.

Par exemple, le polynôme $3x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 8x + 2$ est de degré 5.

3 Produit de deux polynômes

Posons $A(x) = 3x^2 - 5x + 2$ et $B(x) = 4x^2 + 7x - 6$, alors on définit le produit AB en utilisant la distributivité :

$$\begin{aligned} AB(x) &= (3x^2 - 5x + 2)(4x^2 + 7x - 6) \\ &= 3x^2 \times 4x^2 + 3x^2 \times 7x + 3x^2 \times (-6) - 5x \times 4x^2 - 5x \times 7x - 5x \times (-6) + 2 \times 4x^2 + 2 \times 7x + 2 \times (-6) \\ &= 12x^4 + 21x^3 - 18x^2 - 20x^3 - 35x^2 + 30x + 8x^2 + 14x - 12 \end{aligned}$$

On regroupe ensuite les termes de même degré :

$$= 12x^4 + (21 - 20)x^3 + (-18 - 35 + 8)x^2 + (30 + 14)x - 12$$

$$AB(x) = 12x^4 + x^3 - 45x^2 + 44x - 12$$

À l'aide du programme Xcas (gratuit), on peut vérifier le résultat avec les instructions suivantes :

Ligne à taper par l'utilisateur : $A(x) := 3x^2 - 5x + 2; B(x) := 4x^2 + 7x - 6$	
Ligne retournée par Xcas	<pre>//Interprète A //Succès lors de la compilation A //Interprète B //Succès lors de la compilation B (x -> 3x²-5x+2 , x -> 4x²+7x-6)</pre>
Ligne à taper par l'utilisateur : $\text{expand}(A(x)*B(x))$	
Ligne retournée par Xcas	$12x^4 + x^3 - 45x^2 + 44x - 12$

Le produit de A et B est donc un polynôme de degré 4, c'est-à-dire que $d^\circ(AB) = d^\circ(A) + d^\circ(B)$. Ainsi, si l'on veut déterminer le produit de deux polynômes de degrés respectifs 7 et 10, on aura un polynôme de degré $7 + 10 = 17$... Ce qui risque d'être très fastidieux !

4 La méthode rapide

En distribuant, on s'aperçoit que le coefficient de x^k dans $AB(x)$ s'obtient en ajoutant les produits des coefficients de x^p (dans $A(x)$) et x^q (dans $B(x)$) tels que $p + q = k$, pour k allant de 0 à 4.

Nous allons donc construire un tableau dans lequel seront tous les coefficients de A et de B selon le degré de x^k :

Exposants des x^k	2	1	0
Coefficients de A	3	-5	2
Coefficients de B	4	7	-6

Nous allons maintenant construire et compléter un tableau à 5 colonnes car le polynôme produit aura un degré égal à 4 (il y aura donc 5 coefficients en comptant la constante) :

Exposants des x^k	4	3	2	1	0
Coefficients de AB					

- Pour déterminer le coefficient de x^4 dans AB , on regarde la façon dont on peut obtenir 4 en ajoutant deux exposants de la liste : $(2, 1, 0)$ (qui sont les exposants de A et B).

Il n'y a qu'une façon d'obtenir 4 : $2 + 2 = 4$. Par conséquent, on multiplie 3 et 4 : on obtient 12 donc le produit AB commence par $12x^4$.

Exposants des x^k	4	3	2	1	0
Coefficients de AB	$3 \times 4 = 12$				

- Ensuite, on regarde comment obtenir 3 en ajoutant deux exposants. On peut faire $2 + 1$ ou $1 + 2$, ce qui revient à multiplier 3 par 7 et -5 par 4 ; on a alors 21 et -20. On ajoute ces nombres et on obtient 1 :

Exposants des x^k	4	3	2	1	0
Coefficients de AB	12	$3 \times 7 + (-5) \times 4 = 1$			

- Ensuite, on voit que « 2 » s'obtient en faisant $2 + 0$, $0 + 2$ ou $1 + 1$, ce qui revient à faire $3 \times (-6)$, 2×4 et -5×7 . On obtient alors -18 , 8 et -35 et en les ajoutant, on a le coefficient du terme x^2 de $AB(x)$:

Exposants des x^k	4	3	2	1	0
Coefficients de AB	12	1	$3 \times (-6) + 2 \times 4 + 7 \times (-5) = -45$		

- Ensuite, on voit que « 1 » s'obtient en faisant $0 + 1$ ou $1 + 0$, ce qui revient à faire $-5 \times (-6)$ et 2×7 :

Exposants des x^k	4	3	2	1	0
Coefficients de AB	12	1	-45	$-5 \times (-6) + 2 \times 7 = 44$	

- Il s'en suit alors :

Exposants des x^k	4	3	2	1	0
Coefficients de AB	12	1	-45	44	$2 \times (-6) = -12$

Par cette méthode, on peut obtenir le produit de deux polynômes de degrés quelconques.

5 Exemple supplémentaire

Soient $A(x) = -2x^4 + 4x^3 - x + 2$ et $B(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

On construit le premier tableau :

Exposants des x^k	4	3	2	1	0
Coefficients de A	-2	4	0	-1	2
Coefficients de B	0	1	-3	1	-1

$d^\circ(A) = 4$ et $d^\circ(B) = 3$ donc $d^\circ(AB) = 4 + 3 = 7$ d'où :

Exposant 7 : $-2 \times 1 = -2$

Exposant 6 : $-2 \times (-3) + 4 \times 1 = 10$

Exposant 5 : $-2 \times 1 + 4 \times (-3) = -14$

Exposant 4 : $-2 \times (-1) + 4 \times 1 + 1 \times (-1) = 5$

Exposant 3 : $4 \times (-1) + 2 \times 1 + (-1) \times (-3) = 1$

Exposant 2 : $2 \times (-3) + 1 \times (-1) = -7$

Exposant 1 : $-1 \times (-1) + 2 \times 1 = 3$

Exposant 0 : $2 \times (-1) = -2$

Soit :

Exposants	7	6	5	4	3	2	1	0
Coef. de AB	-2	10	-14	5	1	-7	3	-2

6 Un algorithme sous Algobox

```
1: VARIABLES
2: n EST_DU_TYPE NOMBRE
3: p EST_DU_TYPE NOMBRE
4: A EST_DU_TYPE LISTE
5: B EST_DU_TYPE LISTE
6: i EST_DU_TYPE NOMBRE
7: S EST_DU_TYPE NOMBRE
8: j EST_DU_TYPE NOMBRE
9: k EST_DU_TYPE NOMBRE
10: AB EST_DU_TYPE LISTE
11: DEBUT_ALGORITHME
12:   LIRE n
13:   LIRE p
14:   S PREND_LA_VALEUR n+p
15:   POUR i ALLANT_DE 0 A n
16:     DEBUT_POUR
17:       LIRE A[i]
18:     FIN_POUR
19:   POUR i ALLANT_DE 0 A p
20:     DEBUT_POUR
21:       LIRE B[i]
22:     FIN_POUR
23:   POUR i ALLANT_DE 0 A S
24:     DEBUT_POUR
25:       AB[i] PREND_LA_VALEUR 0
26:       POUR j ALLANT_DE 0 A n
27:         DEBUT_POUR
28:           POUR k ALLANT_DE 0 A p
29:             DEBUT_POUR
30:               SI (j+k==i) ALORS
31:                 DEBUT_SI
32:                   AB[i] PREND_LA_VALEUR AB[i]+A[j]*B[k]
33:                 FIN_SI
34:             FIN_POUR
35:           FIN_POUR
36:         FIN_POUR
37:       FIN_POUR
38:     DEBUT_POUR
39:       AFFICHER "Coefficient de x exposant "
40:       AFFICHER i
41:       AFFICHER " : "
42:       AFFICHER AB[i]
43:       AFFICHER "."
44:     FIN_POUR
45: FIN_ALGORITHME
```

[Cet algorithme est fourni dans le fichier ZIP]

Cet algorithme demande d'abord d'entre le degré de A (n) et celui de B (p). S représente alors le degré de AB .

Ensuite, on entre les coefficients de A selon les puissances de x croissantes (on entre a_0 , puis a_1 , etc.) ainsi que ceux de B .

Par exemple, pour $A(x) = 3x^2 - 5x + 2$ et $B(x) = 4x^2 + 7x - 6$, on entre d'abord : 2, -5 et 3 pour A , puis -6, 7 et 4 pour B .

En sortie, on a les coefficient de AB selon les puissances de x croissantes (on a d'abord la constante, puis le coefficient de x , puis celui de x^2).

Dans notre exemple, on a donc en sortie :

Coefficient de x exposant 0 : -12 .

Coefficient de x exposant 1 : 44 .

Coefficient de x exposant 2 : -45 .

Coefficient de x exposant 3 : 1 .

Coefficient de x exposant 4 : 12 .

7 Pour aller plus loin...

Considérons deux polynômes :

$$A(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

et

$$B(x) = \sum_{k=0}^p b_k x^k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{p-1} x^{p-1} + b_p x^p .$$

Alors, le polynôme $AB(x)$ est égal à :

$$\begin{aligned} AB(x) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n) (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{p-1} x^{p-1} + b_p x^p) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots \end{aligned}$$

On constate que dans les sommes donnant chaque coefficient de x^k , les produits $a_i b_j$ sont tels que $i + j = k$. On écrit alors :

$$AB(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k \quad , \text{ où } c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq p}} a_i b_j .$$