

Un problème à résoudre

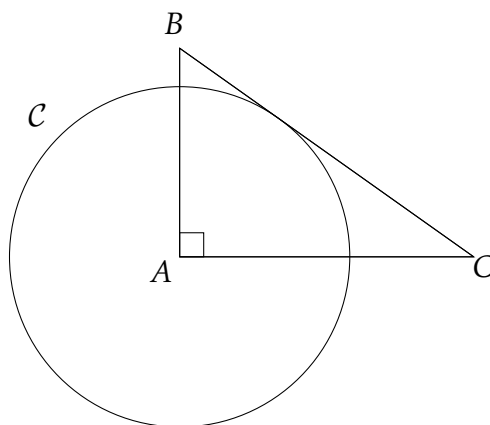
Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Article

par
Stéphane PASQUET

17 août 2017

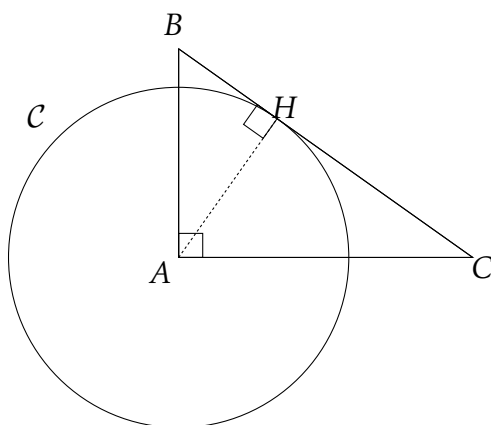
Le problème



ABC est un triangle rectangle en A de même aire que le cercle $\mathcal{C}$ de centre A tel que $BC = 5$.
(BC) est tangente à $\mathcal{C}$.

Calculer le périmètre de $\mathcal{C}$.

Méthode 1



Introduisons le point H , pied de la hauteur issue de A dans ABC .
Notons $x = AB$ et $r = AH$ le rayon de $\mathcal{C}$.

Dans le triangle AHB rectangle en H :

$$r^2 = x^2 - BH^2. \quad (1)$$

Dans le triangle AHC rectangle en H :

$$r^2 = AC^2 - CH^2.$$

Ainsi,

$$x^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2. \quad (2)$$

Or, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en A ,

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25 - x^2$$

et, de plus,

$$CH = BC - BH = 5 - BH.$$

Ainsi, l'équation (2) devient :

$$x^2 - BH^2 = 25 - x^2 - (5 - BH)^2$$

ou encore, en simplifiant :

$$BH = \frac{1}{5}x^2.$$

L'égalité (1) devient alors :

$$r^2 = x^2 - \frac{1}{25}x^4 = \frac{1}{25}x^2(25 - x^2). \quad (3)$$

L'aire du triangle ABC est :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2}.$$

Celle de $\mathcal{C}$ est :

$$\mathcal{A}_C = \pi r^2 = \frac{1}{25}\pi x^2(25 - x^2).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_C &\iff \frac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2} = \frac{1}{25}\pi x^2(25 - x^2) \\ &\iff \frac{1}{2}\sqrt{25 - x^2} = \frac{1}{25}\pi x(25 - x^2) \quad (\text{en simplifiant par } x \neq 0) \\ &\iff 25\sqrt{25 - x^2} = 2\pi x(25 - x^2) \\ &\iff 25 = 2\pi x\sqrt{25 - x^2} \quad (\text{en simplifiant par } \sqrt{25 - x^2} \neq 0 \text{ pour } x \neq 5) \\ &\implies 625 = 4\pi^2 x^2(25 - x^2) \quad (\text{en élevant au carré}) \\ &\implies 4\pi^2 x^4 - 100\pi^2 x^2 + 625 = 0 \\ &\implies 4\pi^2 X^2 - 100\pi^2 X + 625 = 0 \quad (\text{en posant } X = x^2) \end{aligned}$$

$\Delta = (100\pi^2)^2 - 4 \times 4\pi^2 \times 625 = 10000\pi^2(\pi^2 - 1) > 0$ donc il y a deux solutions à cette dernière équation :

$$\begin{cases} X_1 = \frac{100\pi^2 - 100\pi\sqrt{\pi^2 - 1}}{8\pi^2} = \frac{25\pi^2 - 25\pi\sqrt{\pi^2 - 1}}{2\pi^2} (\approx 0,65) \\ X_2 = \frac{100\pi^2 + 100\pi\sqrt{\pi^2 - 1}}{8\pi^2} = \frac{25\pi^2 + 25\pi\sqrt{\pi^2 - 1}}{2\pi^2} (\approx 24,35) \end{cases}$$

Ces deux solutions sont « symétriques » à savoir que si $AB = x = \sqrt{X_1}$ alors $AC = \sqrt{X_2}$, et si $AB = x = \sqrt{X_2}$ alors $AC = \sqrt{X_1}$. En effet, $X_1^2 + X_2^2 = 25 = 5^2$.

L'égalité (3) donne alors, en prenant par exemple $x = \sqrt{X_1}$:

$$r^2 = \frac{1}{25}\sqrt{X_1}^2(25 - \sqrt{X_1}^2) = \frac{1}{25}X_1X_2 = \frac{25}{4\pi^2}.$$

Ainsi,

$$r = \frac{5}{2\pi}$$

et le périmètre de $\mathcal{C}$ est donc :

$$\mathcal{P}_C = 2\pi r = 5.$$

Méthode 2

Avec les mêmes notations que précédemment,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{\mathcal{C}} &\iff \frac{1}{2} \times BC \times AH = \pi r^2 \\ &\iff \frac{5}{2} \times r = \pi r^2 \\ &\iff \frac{5}{2} = \pi r \quad (\text{en simplifiant par } r \neq 0) \\ &\iff r = \frac{5}{2\pi}.\end{aligned}$$

Le périmètre du cercle est donc :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}} = 2\pi r = 2\pi \times \frac{5}{2\pi} = 5.$$

Méthode 3

Avec les mêmes notations que précédemment, on peut dire que les triangles ABC et AHC sont semblables, donc :

$$AB \times AC = AH \times BC \quad \text{soit} \quad ab = 5r.$$

Or, ABC et $\mathcal{C}$ ont la même aire, donc :

$$\frac{1}{2}ab = \pi r^2 \quad \text{soit} \quad ab = 2\pi r^2.$$

Ainsi,

$$5r = 2\pi r^2 \quad \text{soit} \quad 5 = 2\pi r.$$

La circonférence de $\mathcal{C}$ est donc égale à 5.