

Un résultat sur les racines d'un polynôme à coefficients entiers

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Article

par
Stéphane PASQUET

15 juillet 2018

Introduction

On considère un polynôme à coefficients entiers :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n c_k X^k \quad , \quad \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, c_k \in \mathbb{Z}.$$

L'objectif ici est de démontrer que s'il admet une racine rationnelle irréductible $\frac{a}{b}$ alors a divise c_0 et b divise c_n .

Démonstration

On part de l'hypothèse selon laquelle $P\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ puisque $\frac{a}{b}$ est une racine du polynôme P :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{a}{b}\right) = 0 &\Rightarrow \sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{a}{b}\right)^k \\ &\Rightarrow c_0 + \frac{c_1 a}{b} + \frac{c_2 a^2}{b^2} + \dots + \frac{c_n a^n}{b^n} = 0 \\ &\Rightarrow c_0 b^n + c_1 a b^{n-1} + c_2 a^2 b^{n-2} + \dots + c_{n-1} a^{n-1} b + c_n a^n = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

De l'égalité (1), on peut en déduire deux résultats :

- $$\begin{aligned} c_0 b^n &= -c_1 a b^{n-1} - c_2 a^2 b^{n-2} - \dots - c_{n-1} a^{n-1} b - c_n a^n \\ &= -a(c_1 b^{n-1} + c_2 a b^{n-2} + \dots + c_{n-1} a^{n-2} b + c_n a^{n-1}) \end{aligned}$$

Or, $\text{pgcd}(a; b) = 1$ donc $\text{pgcd}(a; b^n) = 1$ et, d'après le théorème (arithmétique) de Gauss, a divise c_0 ;

- $$\begin{aligned} c_n a^n &= -c_0 b^n - c_1 a b^{n-1} - c_2 a^2 b^{n-2} - \dots - c_{n-1} a^{n-1} b \\ &= -b(c_0 b^{n-1} + c_1 a b^{n-2} + c_2 a^2 b^{n-3} + \dots + c_{n-1} a^{n-2} b) \end{aligned}$$

Or, $\text{pgcd}(a; b) = 1$ donc $\text{pgcd}(a^n; b) = 1$ et, d'après le théorème (arithmétique) de Gauss, b divise c_n .

Application

Ce résultat peut nous servir par exemple à démontrer que $\sin \frac{\pi}{18}$ est irrationnel.

En effet, on sait que :

$$\sin\left(3 \times \frac{\pi}{18}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} ;$$

de plus,

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

donc, de ces deux égalités, on déduit :

$$3 \sin \frac{\pi}{18} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{18} = \frac{1}{2}$$

soit, en posant :

$$S = \sin \frac{\pi}{18},$$

$$3S - 4S^3 = \frac{1}{2}$$

ou encore :

$$8S^3 - 6S + 1 = 0.$$

En posant :

$$X = 2S,$$

l'égalité devient :

$$X^3 - 3X + 1 = 0.$$

Si $\sin \frac{\pi}{18}$ est rationnel alors il en est de même pour son double X .

Or, d'après le résultat démontré précédemment, si l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une solution rationnelle $\frac{a}{b}$ alors a divise 1 et b divise 1, ce qui ne laisse comme choix pour solution que $x = 1$ ou $x = -1$.

Mais ni 1 ni -1 n'est solution de l'équation, ce qui signifie que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ n'admet aucune solution rationnelle et donc que la solution connue, à savoir X , est irrationnelle et donc que S est irrationnelle.