Une généralisation

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Article

par
Stéphane PASQUET

21 juin 2018

Introduction

Il y a quelques jours, un ami a posté le message suivant sur un réseau social :

$$\frac{9-\sqrt{17}}{2}+\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}=5.$$

J'ai tout naturellement souhaité voir si cette égalité était vraie, et cela m'a donné une autre idée…

Véracité de l'égalité

$$\begin{aligned}
\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}+\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}\right)^2 &= \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}\right)^2+2\times\frac{9-\sqrt{17}}{2}\times\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}\\
&= \frac{81-18\sqrt{17}+17}{4}+\frac{9+\sqrt{17}}{2}+(9-\sqrt{17})\frac{\sqrt{9+\sqrt{17}}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{98-18\sqrt{17}}{4}+\frac{9+\sqrt{17}}{2}+(9-\sqrt{17})\frac{\sqrt{18+2\sqrt{17}}}{2}\\
&= \frac{49-9\sqrt{17}}{2}+\frac{9+\sqrt{17}}{2}+(9-\sqrt{17})\frac{\sqrt{18+2\sqrt{17}}}{2}\\
&= \frac{58-8\sqrt{17}}{2}+(9-\sqrt{17})\frac{\sqrt{18+2\sqrt{17}}}{2}\\
&= 29-4\sqrt{17}+(9-\sqrt{17})\frac{\sqrt{18+2\sqrt{17}}}{2}.
\end{aligned}$$

Cherchons à mettre $\sqrt{18+2\sqrt{17}}$ sous la forme $a+b\sqrt{17}$, où $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$.

$$\begin{aligned}\sqrt{18+2\sqrt{17}}=a+b\sqrt{17} &\iff \left(\sqrt{18+2\sqrt{17}}\right)^2=\left(a+b\sqrt{17}\right)^2\\ &\iff 18+2\sqrt{17}=a^2+17b^2+2ab\sqrt{17}\\ &\iff \begin{cases}a^2+17b^2=18\\ ab=1\end{cases}\\ &\iff b=\frac{1}{a} \text{ et } a^2+\frac{17}{a^2}=18, \text{ soit } a^4-18a^2+17=0\end{aligned}$$

$\Delta=256=16^2$ donc $a^2=1$ ou $a^2=17$, soit $a=1$ ou $a=-1$ (car $a\in\mathbb{Z}$, donc $a\neq\sqrt{17}$ et $a\neq-\sqrt{17}$).
Je prends $a=1$, donc $b=1$. Ainsi,

$$\sqrt{18+2\sqrt{17}}=1+\sqrt{17}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}+\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}\right)^2 &= 29-4\sqrt{17}+(9-\sqrt{17})\frac{1+\sqrt{17}}{2}\\ &= 29-4\sqrt{17}+\frac{9+9\sqrt{17}-\sqrt{17}-17}{2}\\ &= 29-4\sqrt{17}-4+4\sqrt{17}\\ &= 25.\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée des deux membres de cette dernière égalité, on obtient bien l'égalité souhaitée.

Généralisation

Je me suis alors posé la question suivante : à quoi est égal le nombre $\frac{p-\sqrt{q}}{2}+\sqrt{\frac{p+\sqrt{q}}{2}}$, où $(p\,;q)\in\mathbb{N}^2$?

Commençons par calculer le carré de ce nombre

$$\begin{aligned}\left(\frac{p-\sqrt{q}}{2}+\sqrt{\frac{p+\sqrt{q}}{2}}\right)^2 &= \frac{p^2+q-2q\sqrt{q}}{4}+\frac{p+\sqrt{q}}{2}+(p-\sqrt{q})\sqrt{\frac{p+\sqrt{q}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{p^2+2p+q+2\sqrt{q}(1-p)}{4}+\frac{(p-\sqrt{q})\sqrt{2p+2\sqrt{q}}}{2}\\ &= \frac{p^2+2p+2\sqrt{q}(1-p)+2(p-\sqrt{q})\sqrt{2p+2\sqrt{q}}}{4} \qquad (*)\end{aligned}$$

Simplification de $\sqrt{2p+2\sqrt{q}}$

J'aimerais écrire $\sqrt{2p+2\sqrt{q}}$ sous la forme :

$$\sqrt{2p+2\sqrt{q}}=a+b\sqrt{q}$$

où $(a;b) \in \mathbb{N}^2$. Je précise que a et b ne peuvent pas être négatifs (car $\sqrt{2p+2\sqrt{q}} > 0$), d'où le fait qu'ils soient dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{2p+2\sqrt{q}} = a+b\sqrt{q} &\iff 2p+2\sqrt{q} = (a+b\sqrt{q})^2 \\ &\iff 2p+2\sqrt{q} = a^2+b^2q+2ab\sqrt{q} \\ &\iff \begin{cases} a^2+b^2q = 2p \\ ab = 1 \text{ soit } b = \dfrac{1}{a} \end{cases}\end{aligned}$$

Donc :

$$a^2 + \frac{q}{a^2} = 2p \qquad \text{soit} \qquad a^4 - 2pa^2 + q = 0.$$

Le discriminant de cette dernière équation bicarrée est :

$$\Delta = 4p^2 - 4q = 4(p^2 - q).$$

Ainsi, pour qu'elle admette au moins une solution satisfaisante, il faut que $\Delta \geqslant 0$ et que les solutions soient des carrés parfaits (car une solution de cette équation est a^2 et l'on souhaite que a soit un entier naturel). Donc, il est nécessaire que :

$$p^2 - q = \lambda^2 \ (\lambda \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Dans ce cas, les solutions de l'équation sont :

$$a^2 = \frac{2p-2\lambda}{2} = p - \lambda \qquad \text{ou} \qquad a^2 = p + \lambda.$$

Pour que notre problème ait une solution, il faut donc que :

$$p - \lambda = \mu^2 \ \text{ ou } p + \lambda = \mu^2 \ (\mu \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Bilan : une condition nécessaire pour que $\sqrt{2p+2\sqrt{q}} = a + b\sqrt{q}$ est :

$$\boxed{p^2 - q = \lambda^2 \ (\lambda \in \mathbb{N}) \qquad \text{et} \qquad \left(\begin{array}{l} p-\lambda = \mu^2 \\ \text{ou} \\ p+\lambda = \mu^2 \end{array}\right.}$$

Mais ce n'est pas suffisant... il faut aussi que $b \in \mathbb{N}$... Or, $b = \dfrac{1}{a}$. Il faut donc que $a = 1$.
Dans ce cas,

$$p - \lambda = 1 \qquad \text{ou} \qquad p + \lambda = 1$$

donc :

$$\lambda = p - 1 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = 1 - p.$$

- Si $\lambda = p - 1$ alors $p^2 - q = (p-1)^2$ soit $q = 2p - 1$.
- Si $\lambda = 1 - p$ alors $p^2 - q = (1-p)^2$ soit $q = 2p - 1$.

Bilan

Pour que $\dfrac{p-\sqrt{q}}{2} + \sqrt{\dfrac{p+\sqrt{q}}{2}} = a + b\sqrt{q}$, il faut et il suffit que $q = 2p - 1$.
Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{p-\sqrt{q}}{2} + \sqrt{\frac{p+\sqrt{q}}{2}} = \frac{p+1}{2}}$$

Exemples

p	$q = 2p - 1$	$\frac{p-\sqrt{q}}{2} + \sqrt{\frac{p+\sqrt{q}}{2}}$
2	3	$\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = 1.5$
3	5	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = 2.0$
4	7	$\frac{4-\sqrt{7}}{2} + \sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{2}} = 2.5$
5	9	$\frac{5-\sqrt{9}}{2} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{9}}{2}} = 3.0$
6	11	$\frac{6-\sqrt{11}}{2} + \sqrt{\frac{6+\sqrt{11}}{2}} = 3.5$
7	13	$\frac{7-\sqrt{13}}{2} + \sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} = 4.0$
8	15	$\frac{8-\sqrt{15}}{2} + \sqrt{\frac{8+\sqrt{15}}{2}} = 4.5$
9	17	$\frac{9-\sqrt{17}}{2} + \sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}} = 5.0$
10	19	$\frac{10-\sqrt{19}}{2} + \sqrt{\frac{10+\sqrt{19}}{2}} = 5.5$
11	21	$\frac{11-\sqrt{21}}{2} + \sqrt{\frac{11+\sqrt{21}}{2}} = 6.0$
12	23	$\frac{12-\sqrt{23}}{2} + \sqrt{\frac{12+\sqrt{23}}{2}} = 6.5$
13	25	$\frac{13-\sqrt{25}}{2} + \sqrt{\frac{13+\sqrt{25}}{2}} = 7.0$
14	27	$\frac{14-\sqrt{27}}{2} + \sqrt{\frac{14+\sqrt{27}}{2}} = 7.5$
15	29	$\frac{15-\sqrt{29}}{2} + \sqrt{\frac{15+\sqrt{29}}{2}} = 8.0$
16	31	$\frac{16-\sqrt{31}}{2} + \sqrt{\frac{16+\sqrt{31}}{2}} = 8.5$