Ce document est un exemple de corrigé du sujet du groupement 1 proposé en avril 2015 au concours de professeur des écoles. Il ne s'agit pas d'un corrigé officiel.
Le sujet initial est indiqué en noir, la correction est en bleu. Les propriétés utilisées sont rappelées dans un cadre à fond jaune.
Je remercie mon collègue Luc Tiennot pour sa précieuse relecture.

1

PREMIÈRE PARTIE : PROBLÈME
13 POINTS

Dans tout le problème on travaille dans un réseau pointé à maille carrée.
On notera une unité de longueur 1 $u.\ell.$ et une unité d'aire 1 $u.a.$

On appelle polygone de Pick, un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.

L'objet de ce problème est le calcul d'aires de polygones de Pick.

A. Calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple

Calculer l'aire du polygone $ABCDEF$ (*figure 1*), en unité d'aire. Expliciter les étapes du raisonnement.

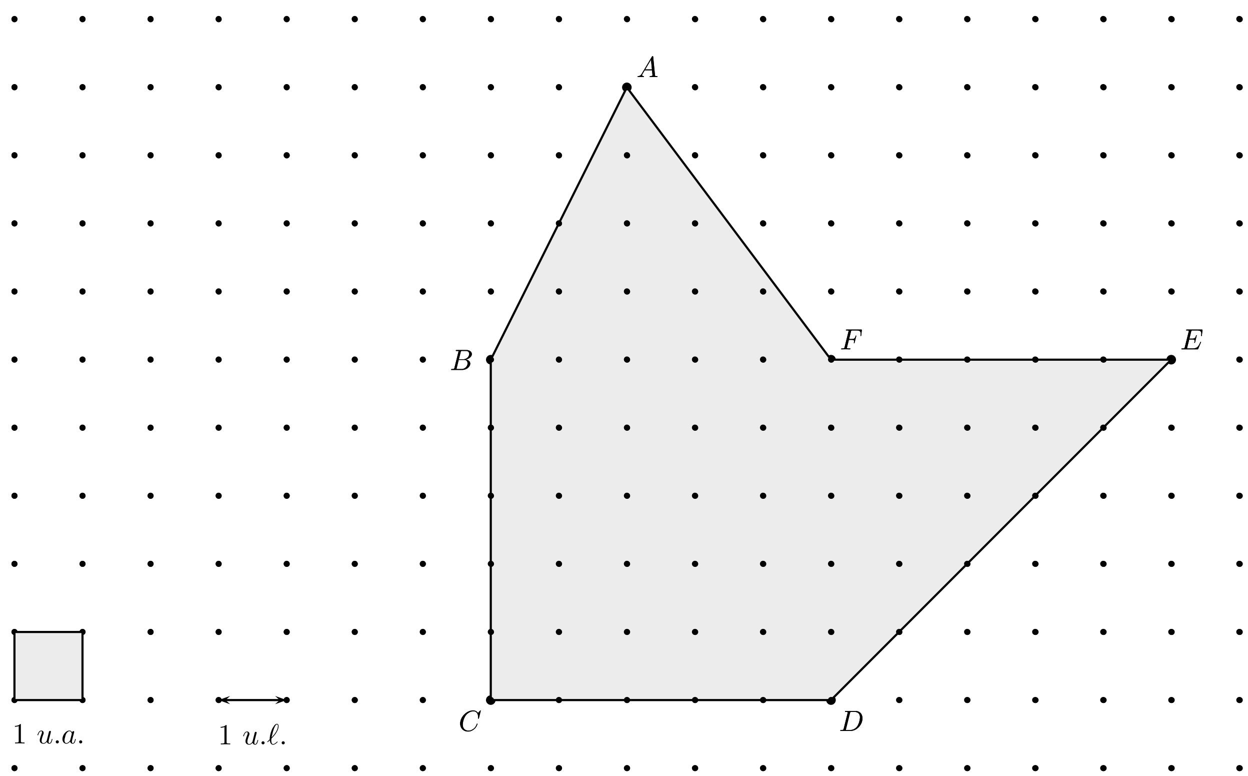
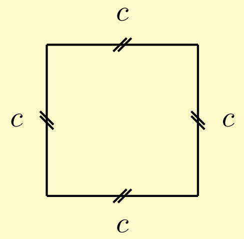


figure 1

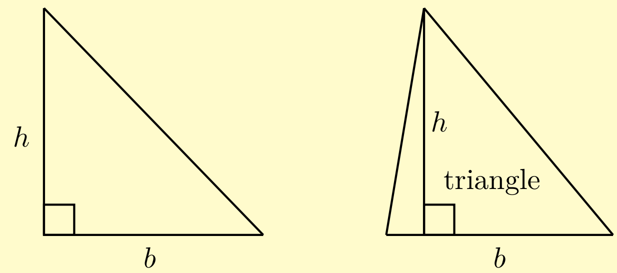
On peut, par exemple, utiliser une méthode basée sur la décomposition de la figure : l'aire du polygone $ABCDEF$ est la somme des aires du carré $BCDF$ et des deux triangles DEF et ABF.
On notera $\mathcal{A}(P)$ l'aire du polygone P.

Propriété 1



Aire du carré de côté c

$\mathcal{A} = c^2$



Aire du triangle de base b de hauteur h

$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$

On a alors, avec des mesures de longueurs en $u.\ell.$ et des mesures d'aires en $u.a.$:

$\mathcal{A}(BCDF) = 5 \times 5 = 25$; $\mathcal{A}(DEF) = \dfrac{5 \times 5}{2} = \dfrac{25}{2}$ et $\mathcal{A}(ABF) = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$.

Donc, $\mathcal{A}(ABCDEF) = 25 + \dfrac{25}{2} + 10 = \dfrac{95}{2} = 47,5$.

Conclusion : $\boxed{\textit{l'aire du polygone } ABCDEF \textit{ est de } 47,5\,u.a.}$

Une formule trouvée sur Internet sous le nom de formule de Pick prétend permettre de calculer l'aire $\mathcal{A}$ d'un polygone de Pick, à partir du nombre i de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et du nombre b de points du réseau sur le bord du polygone :

$$\boxed{\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1}$$

Le résultat est en unité d'aire avec 1 $u.a.$ = aire d'un carré unité.
Par exemple, pour le polygone ci-dessous :
$i = 15$ et $b = 16$, donc, en utilisant la formule, $\mathcal{A} = 15 + \dfrac{16}{2} - 1 = 22$.

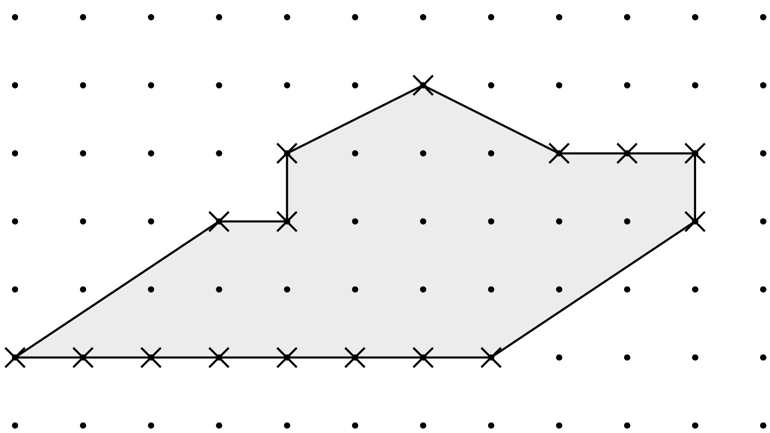


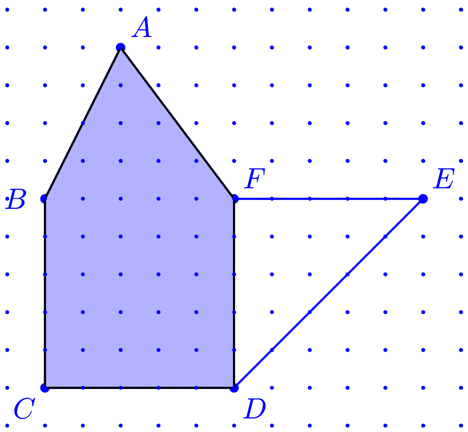
figure 2

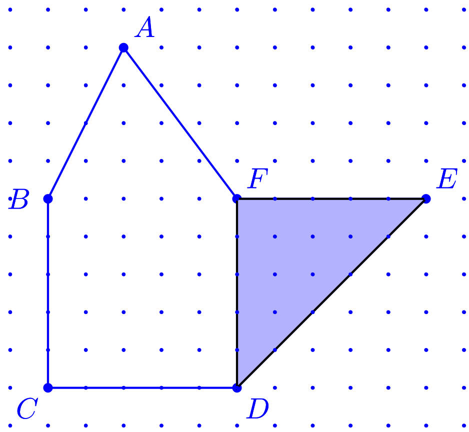
B. Utilisation de la formule de Pick sur un exemple.

1. Appliquer cette formule au polygone $ABCDEF$ de la *figure 1* et vérifier que l'on retrouve bien son aire.
   Dans la *figure 1*, on a : $i = 37$ et $b = 23$ donc, $\mathcal{A} = 37 + \dfrac{23}{2} - 1 = \dfrac{95}{2}$.

   Conclusion : *en utilisant la formule de Pick, on retrouve l'aire calculée dans la partie A.*

2. **Propriété d'additivité des aires.**
Appliquer la formule de Pick aux deux polygones de Pick $ABCDF$ et DEF de la figure 1.
Vérifier que la somme des résultats obtenus est égale au résultat trouvé à la question **B.1.**





Pour le polygone $ABCDF$, on trouve $i = 27$ et $b = 18$ donc $\mathcal{A}_1 = 27 + \frac{18}{2} - 1 = 35$;

pour le polygone DEF, on trouve $i = 6$ et $b = 15$ donc $\mathcal{A}_2 = 6 + \frac{15}{2} - 1 = \frac{25}{2}$.

$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 35 + \frac{25}{2} = \frac{95}{2}$.

☆ *Conclusion :* *la somme des résultats obtenus est égale au résultat trouvé à la question* **B.1.**

Les parties **C.** et **D.** sont indépendantes.

C. Quelques conséquences de la formule de Pick.

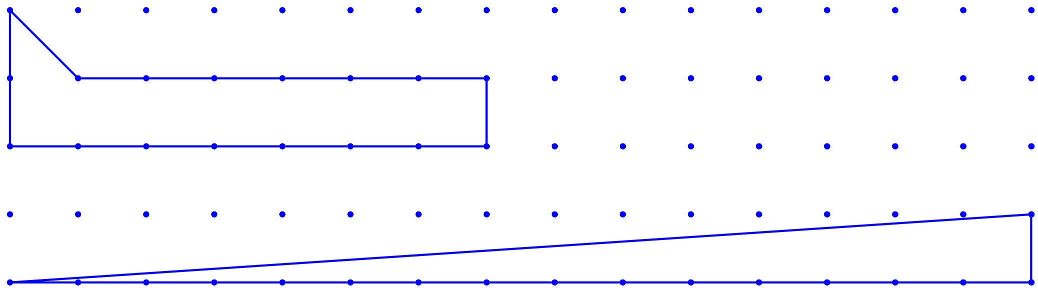
Dans cette partie du problème, on admet que la formule est vraie dans le cas général.

1. Prouver qu'il ne peut pas y avoir de polygone de Pick d'aire 7,5 avec b pair.
Si b est pair, alors il peut s'écrire sous la forme $b = 2n$ où n est un nombre entier positif.
On a alors $\mathcal{A} = i + \frac{2n}{2} - 1 = i + n - 1$.
i, n et -1 sont des nombres entiers, il en est de même pour leur somme donc, $\mathcal{A}$ est un nombre entier et il ne peut pas être égal à 7,5.
☆ *Conclusion :* *il n'existe pas de polygone de Pick d'aire 7,5 avec b pair.*

2. On considère un polygone de Pick d'aire 7,5. Démontrer que la valeur maximale que peut prendre b est 17.
Tracer sur la copie un réseau pointé à maille carrée, et sur ce réseau un polygone de Pick correspondant à cette valeur.
Exprimons b en fonction des autres variables :
$\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1$ donc, $\frac{b}{2} = \mathcal{A} - i + 1$ et $b = 2\mathcal{A} - 2i + 2$.
Avec $\mathcal{A} = 7,5$, on obtient $b = 2 \times 7,5 - 2i + 2 = 17 - 2i$.
Or, i est le nombre de points intérieurs au polygone, c'est un nombre entier positif ou nul :
$$\begin{aligned} i \geqslant 0 &\iff -2i \leqslant 0 \\ &\iff 17 - 2i \leqslant 17 \\ &\iff b \leqslant 17. \end{aligned}$$

☆ *Conclusion :* *avec une aire de 7,5, la valeur maximale de b est 17.*

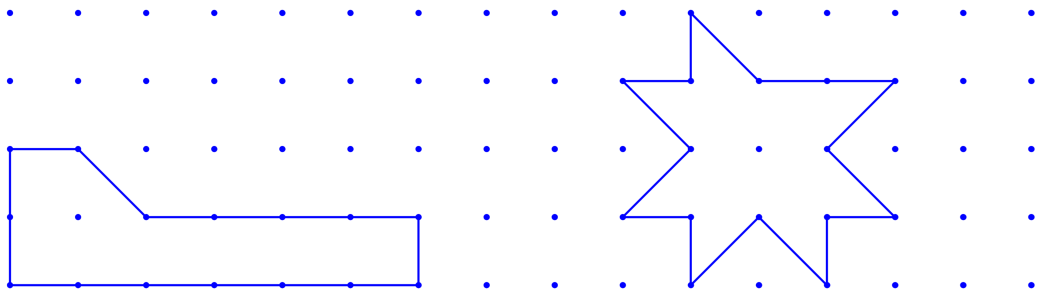
Pour tracer un tel polygone, on doit avoir $i = 0$, c'est à dire qu'il n'existe aucun point du réseau à l'intérieur du polygone, l'aire doit être égale à 7,5 *u.a.* et il doit avoir 17 points du réseau sur son bord. Il existe de nombreuses configurations, comme par exemple :



3. On veut tracer un polygone de Pick d'aire 7,5 et contenant un seul point intérieur. Quelle est alors la valeur de b ?
Tracer sur la copie un réseau pointé à maille carrée, et sur ce réseau un polygone de Pick d'aire 7,5 vérifiant ces conditions.
Dans ce cas, on a $i = 1$, donc $b = 2 \times 7,5 - 2 \times 1 + 2 = 15$.

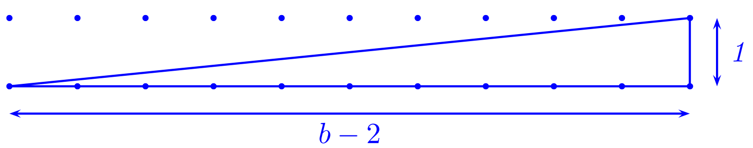
☆ *Conclusion :* *avec une aire de 7,5 et un point intérieur, on obtient 15 points sur le bord.*

Il existe de nouveau de multiples configurations, comme par exemple :



4. Démontrer que le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire $\mathcal{A}$ quelconque est : $2\mathcal{A} + 2$.
Comme indiqué dans la question **2.**, $-2i \leqslant 0$, donc $b = 2\mathcal{A} - 2i + 2$
$b \leqslant 2\mathcal{A} + 2$.
Cette valeur est atteinte lorsque qu'il n'y a aucune point à l'intérieur du polygone.

Remarque : on peut toujours trouver un tel polygone en traçant un triangle rectangle dont les deux côtés perpendiculaires comportent respectivement $b - 1$ et 2 points du réseau.



On a alors $2\mathcal{A} - 2i + 2 = 2 \times \dfrac{(b-2) \times 1}{2} - 2 \times 0 + 2 = b$ *et le maximum est atteint.*

☆ *Conclusion :* *le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire $\mathcal{A}$ quelconque est de $2\mathcal{A} + 2$.*

D. Démonstration de la formule de Pick dans le cas d'un rectangle.

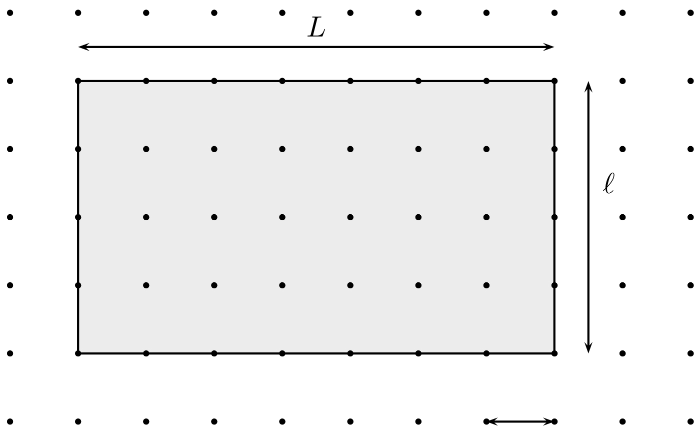
On considère un rectangle de Pick de dimensions quelconques dont les côtés sont parallèles au réseau (comme dans l'exemple ci-dessous).

On note : L sa longueur

ℓ sa largeur

i le nombre de points du réseau strictement intérieurs au rectangle

b le nombre de points sur le bord du rectangle



1. Exprimer b et i en fonction de L et ℓ.

   Expression de b :
   sur une longueur du rectangle, on a $(L+1)$ points sur le bord ;
   sur une largeur du rectangle, on a $(\ell+1)$ points sur le bord ;
   donc, sur le bord entier, on a $2\times(L+1)+2\times(\ell+1)-4$ points (puisqu'en procédant ainsi, on aura compté deux fois les 4 points situés dans les coins du rectangle).
   Cela donne $b = 2L+\cancel{2}+2\ell+\cancel{2}-\cancel{4}$
   $= 2(L+\ell)$.

   Expression de i :
   à l'intérieur du rectangle, on a $(L-1)$ points dans la longueur et $(\ell-1)$ points dans la largeur ; ce qui nous donne $(L-1)\times(\ell-1)$ points à l'intérieur du rectangle.

   Conclusion : $\boxed{\textit{on obtient } b = 2(L+\ell) \textit{ et } i = (L-1)\times(\ell-1).}$

2. En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle vérifie $\mathcal{A} = i + \dfrac{b}{2} - 1$.

   On calcule d'une part : $i+\dfrac{b}{2}-1 = (L-1)\times(\ell-1)+\dfrac{\cancel{2}(L+\ell)}{\cancel{2}}-1$

   $$= L\times\ell - L - \ell + 1 + L + l - 1$$

   $$= L\times\ell.$$

   Et d'autre part, l'aire $\mathcal{A}$ d'un rectangle de côtés L et ℓ est donnée par la formule : $\mathcal{A} = L\times\ell$.

   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\textit{l'aire } \mathcal{A} \textit{ du rectangle vérifie } \mathcal{A} = i+\dfrac{b}{2}-1.\\ \textit{La formule de Pick est ainsi démontrée pour un tel rectangle.}\end{array}}$

2

DEUXIÈME PARTIE
13 POINTS

EXERCICE 1

A et B sont deux nombres entiers positifs tels que :

- 111 est un multiple du nombre entier positif A ;
- $A - B$ est un nombre entier positif ou nul divisible par 10 ;
- B est le cube d'un nombre entier.

Trouver toutes les valeurs possibles pour A et B.

Étudions une à une les données de l'exercice :

- **111 est un multiple du nombre entier positif A.**
  Autrement dit, A est un diviseur de 111. Or, $111 = 3 \times 37$ et les diviseurs positifs de 111 sont 1, 3, 37 et 111.
  A peut donc prendre les valeurs de 1, 3, 37 ou 111.

- **$A - B$ est un nombre entier positif ou nul divisible par 10.**
  Il existe un entier n positif ou nul tel que $A - B = 10\,n$, soit $B = A - 10\,n$ avec $B \geq 0$, c'est à dire $A - 10\,n \geq 0$ ou encore $0 \leqslant n \leqslant \dfrac{A}{10}$.
  Résumons dans un tableau les possibilités pour A, n et B :

A	inégalité	n	B
1	$0 \leqslant n \leqslant 0,1$	0	$\boxed{1}$
3	$0 \leqslant n \leqslant 0,3$	0	3
37	$0 \leqslant n \leqslant 3,7$	0	37
		1	$\boxed{27}$
		2	17
		3	7

A	inégalité	n	B
111	$0 \leqslant n \leqslant 11,1$	0	111
		1	101
		2	91
		3	81
		4	71
		5	61
		6	51
		7	41
		8	31
		9	21
		10	11
		11	$\boxed{1}$

- **B est le cube d'un nombre entier.**
  Les cinq premiers cubes sont $0, 1, 8, 27$ et 256. Parmi les solutions trouvées dans le deuxième item, on a trois couples de solutions : $(A, B) = (1, 1)$; $(A, B) = (37, 27)$ et $(A, B) = (111, 1)$.

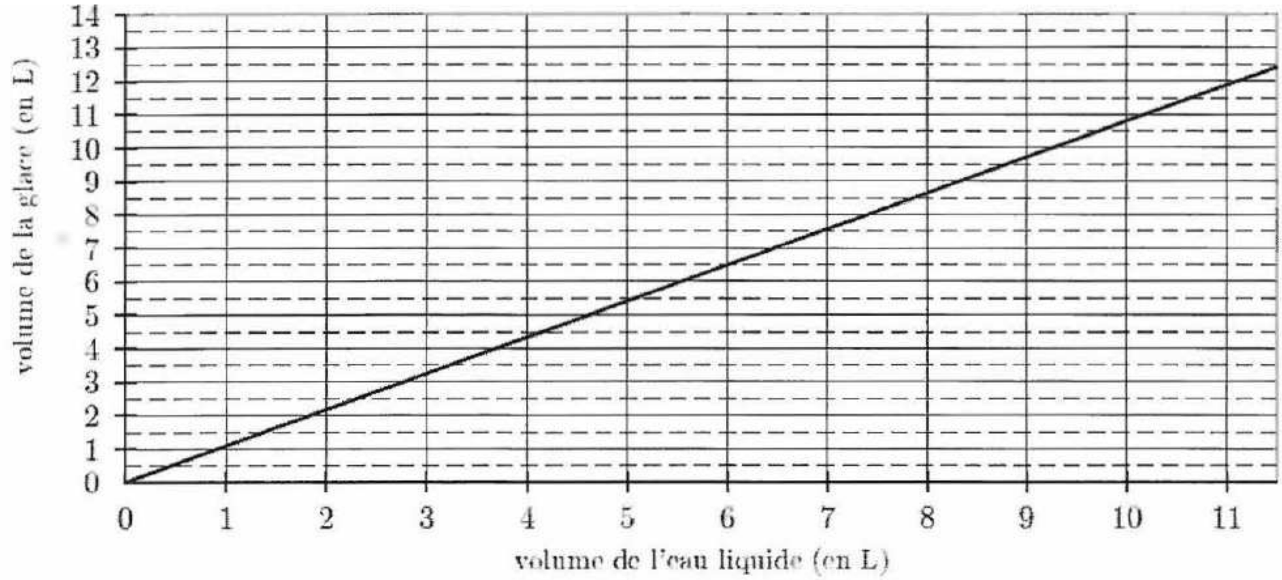
☆ *Conclusion :* *les valeurs possibles sont* $\begin{cases} A = 1 \text{ et } B = 1 \\ A = 37 \text{ et } B = 27 \\ A = 111 \text{ et } B = 1 \end{cases}$

EXERCICE 2

(D'après le sujet du DNB Métropole 2010)

L'eau en gelant augmente de volume. Le segment de droite ci-dessous représente le volume de glace (en litre), en fonction du volume d'eau liquide (en litre).

Volume de la glace en litres en fonction du volume d'eau liquide en litres



On répondra aux questions **1.**, **2.** *et* **3.** *en utilisant le graphique ci-dessus.*

1. Quel est le volume de glace obtenu avec 7 litres de liquide ?
   On lit ici l'image de 7, qui est environ 7,5.
   Conclusion : *pour 7 litres d'eau liquide, on obtient environ 7,5 litres de glace.*

2. Quel volume d'eau liquide faut-il mettre à geler pour obtenir 9 litres de glace ?
   On lit l'antécédent de 9, qui est environ 8,3 (avec la précision permise par le graphique).
   Conclusion : *il faut environ 8,3 litres d'eau liquide pour obtenir 9 litres de glace.*

3. Le volume de glace est-il proportionnel au volume d'eau liquide ? Justifier votre réponse.

   Propriété 2
   Deux grandeurs sont proportionnelles si la représentation graphique de l'une par rapport à l'autre à pour support une droite passant par l'origine du repère.

   On observe sur le graphique que le volume de glace en fonction du volume d'eau liquide est représenté par un segment de droite passant par l'origine.
   Conclusion : *le volume de glace est proportionnel au volume d'eau liquide.*

4. On admet que 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace. De quel pourcentage ce volume d'eau augmente-t-il en gelant ?
   Le volume de l'eau passant de l'état liquide à l'état solide augmente de 0,8 litres pour 10 litres. Donc, il augmenterait de 8 litres pour 100 litres.
   Conclusion : *l'augmentation due à la solidification est de 8%.*

5. Dans un souci de préservation de la ressource en eau, la ville de Lyon a imaginé un dispositif de recyclage. Cette ville fournit un volume de 20 m^3 d'eau par jour aux engins de nettoiement grâce à l'eau récupérée de la fonte de la glace de la patinoire de Baraban.
À combien de litres de glace correspond le volume d'eau fourni par la ville de Lyon pour 30 jours de nettoyage ?
(source : article du 03/12/2013 - http ://blogs.grandlyon.com).

Propriété 3
Une contenance de 1 litre d'eau correspond à un volume de 1 dm^3.

Pour un jour de nettoyage, la ville fournit un volume de 20 m^3 = 20 000 dm^3, soit une capacité de 20 000 L.
Donc, pour 30 jours de nettoyage, la capacité est de $30 \times 20\,000$ L $= 600\,000$ L.
La transformation à l'état solide augmente de 8 % la capacité initiale, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{8}{100} = 1,08$.
On obtient alors $1,08 \times 600\,000$ L $= 648\,000$ L.

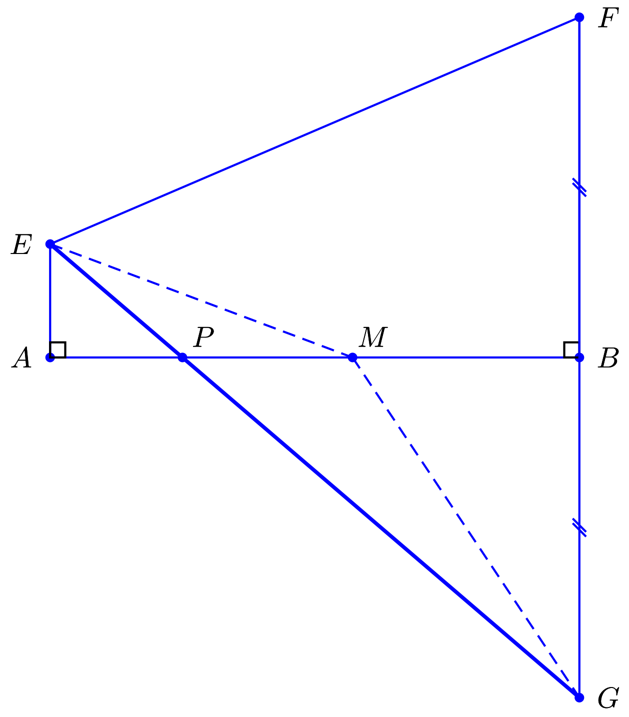
Conclusion : $\boxed{\text{le volume d'eau fournit par la ville de Lyon pour 30 jours correspond à 648 000 L de glace.}}$

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on prendra 1 cm comme unité de longueur.

On considère un trapèze $ABFE$ rectangle en A et B, c'est-à-dire tel que les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires à la droite (AB), et tel que $AB = 14$; $AE = 3$; $BF = 9$. Le point M est un point variable sur le segment $[AB]$. Le but de cet exercice est de déterminer la position de M pour laquelle la valeur de $EM + MF$ est minimale.

1. Construire le trapèze $ABFE$ et le point G, symétrique du point F par rapport à la droite (AB).
La figure suivante est à l'échelle 1/2.



2. On appelle P l' intersection des droites (AB) et (EG).
Montrer que pour tout point M de $[AB]$, on a : $EM + MG \geqslant EP + PG$.
En déduire que la valeur $EM + MF$ est minimale lorsque M est placé en P.

Le point P est situé sur le segment $[EG]$, par construction. On a donc $EP + PG = EG$.
Tout point M du plan non situé sur le segment $[EG]$ vérifie alors $EM + MG > EG$, soit $EM + MG > EP + PG$.
Si le point M appartient au segment $[EG]$, on a $EM + MG = EP + PG$.

Conclusion : *pour tout point M de $[AB]$, on a $EM + MG \geqslant EP + PG$ avec égalité lorsque M est placé en P.*

G est le symétrique de F par rapport à B donc, B est le milieu du segment $[FG]$. La droite (AB) est perpendiculaire à la droite (FB). Donc, (AB) est la médiatrice du segment $[FG]$.

Propriété 4

Chaque point de la médiatrice est équidistant des extrémités du segment.

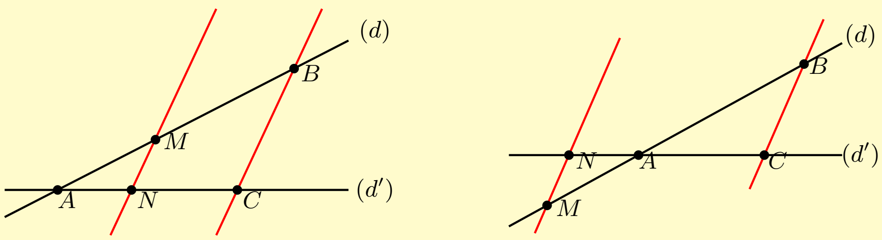
Le point M étant situé sur la médiatrice de $[FG]$, il est à égale distance des points F et G, c'est-à-dire $MF = MG$ et on a alors $EM + MG = EM + MF$
La valeur minimal de $EM + MF$ correspond donc à la valeur minimale de $EM + MG$, qui est $EP + PG$.

Conclusion : *la valeur $EM + MF$ est minimale lorsque M est placé en P.*

3. (a) Montrer que $\dfrac{AP}{14 - AP} = \dfrac{3}{9}$.

Propriété 5

Soient (d) et (d') sont deux droites sécantes en A. B et M deux points de la droite (d) distincts de A. C et N deux points de la droite (d'), distincts de A.
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.
Ce rapport est également égal à $\dfrac{MN}{BC}$ (les triangles ABC et AMN sont semblables).



Les droites (EA) et (FB) sont toutes deux perpendiculaires à la même droite (AB), elles sont donc parallèles entre elles.
BF Les points F, B et G sont alignés donc, les droites (EA) et (BG) sont parallèles.
Les points E, P, G et A, P, B sont alignés dans le même ordre.
On peut donc appliquer le théorème de Thalès et sa conséquence :

$$\frac{PE}{PG} = \frac{PA}{PB} = \frac{EA}{GB}$$

Or, $P \in [AB]$ donc $AP + PB = AB \iff PB = 14 - AP$.
$EA = 3$ et $GB = FB = 9$.

Conclusion : $\boxed{\dfrac{AP}{14 - AP} = \dfrac{3}{9}}$.

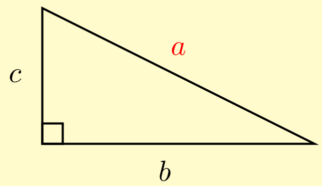
(b) Calculer AP.

$$\frac{AP}{14-AP}=\frac{3}{9}\iff 9\times AP=3\times(14-AP)$$
$$\iff 9AP+3AP=42$$
$$\iff AP=\frac{42}{12}=\frac{7}{2}.$$

Conclusion : $\boxed{\textit{la mesure de } AP \textit{ est de } 3,5 \textit{ cm.}}$

4. Calculer la valeur minimale de $EM+MF$. En donner la valeur exacte en cm, et la valeur arrondie au dixième.

Propriété 6
Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit : $a^2=b^2+c^2$.



D'après le question **2.**, la valeur minimale de $EM+MF$ est atteinte lorsque M est en P. Calculons alors $EP+PF$.

- **Calcul de EP.** Dans le triangle EAP rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :
$$EP^2=EA^2+AP^2$$
$$=3^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$=\frac{85}{4},\quad \text{soit } EP=\frac{\sqrt{85}}{2}.$$
- **Calcul de PF.** Dans le triangle PBF rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :
$$PF^2=PB^2+BF^2\qquad \text{avec } PB=AB-AP=14-\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$$
$$=\left(\frac{21}{2}\right)^2+9^2$$
$$=\frac{765}{4},\quad \text{soit } PF=\frac{3\sqrt{85}}{2}.$$

$$EP+PF=\frac{\sqrt{85}}{2}+\frac{3\sqrt{85}}{2}$$
$$=2\sqrt{85}$$
$$\simeq 18,44.$$

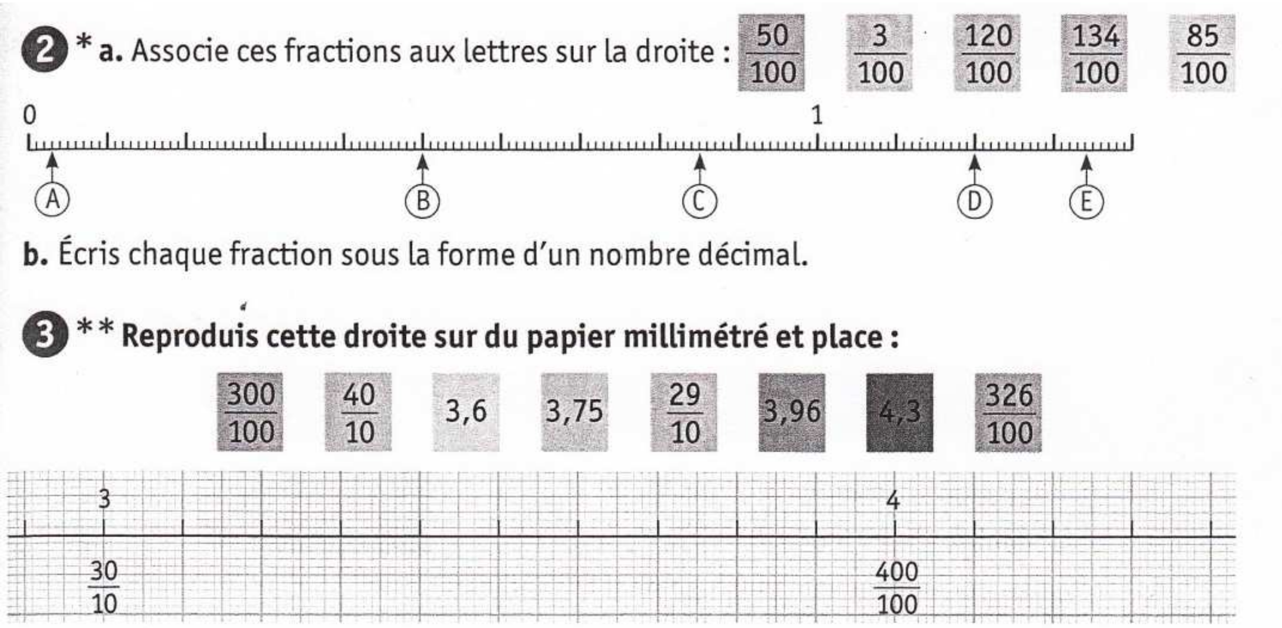
Conclusion : $\boxed{\textit{la valeur minimale de } EM+MF \textit{ est de } 2\sqrt{85} \textit{ cm} \simeq 18,4 \textit{ cm.}}$

3

TROISIÈME PARTIE
14 POINTS

Cette partie est constituée de quatre situations indépendantes.

SITUATION 1 : Extrait du manuel « Outils pour les maths » CM1 Magnard (édition 2011)



❷ * **a.** Associe ces fractions aux lettres sur la droite : $\frac{50}{100}$ $\frac{3}{100}$ $\frac{120}{100}$ $\frac{134}{100}$ $\frac{85}{100}$

b. Écris chaque fraction sous la forme d'un nombre décimal.

❸ ** **Reproduis cette droite sur du papier millimétré et place :**

$\frac{300}{100}$ $\frac{40}{10}$ 3,6 3,75 $\frac{29}{10}$ 3,96 4,3 $\frac{326}{100}$

1. Un élève a bien réussi la question ❷ mais a fait plusieurs erreurs à la question ❸. En comparant la présentation et les tâches demandées dans ces deux questions, donner trois raisons pouvant expliquer cette différence de réussite.

Question ❷	Question ❸
Comparaison de la présentation	
Un droite graduée est tracée, les graduations jusqu'au centième bien représentées.	La droite doit être reproduite sur papier millimétré.
La droite comporte l'origine et l'unité.	L'origine n'est pas présente, le premier entier rencontré est 3.
Des lettres indiquent des fraction à placer, il y a autant de lettres que de fractions.	3 est associé à $\frac{30}{10}$ et 4 à $\frac{400}{100}$.
Les nombres à placer sont tous écrits sous la forme d'un fraction décimale de dénominateur 100.	Les nombres à placer sont des nombres décimaux écrits de différentes façons (écritures décimales et fractions décimales de dénominateurs de 10 ou 100.
Comparaison de la tâche demandée	
Il s'agit d'associer une fraction à une lettre de la droite graduée.	Il faut placer des fractions après avoir reproduit la droite.
L'élève doit ensuite donner l'écriture décimale de chacune des fractions.	Il n'y a rien à faire après avoir placé les nombres.

On peut donc évoquer plusieurs raisons à la non réussite de l'élèves à la question ❸ :

— dans la question ❷, les fractions peuvent être classées facilement dans l'ordre croissant par exemple puisqu'elles ont le même dénominateur. Il suffit ensuite de les mettre dans le même ordre sur l'axe gradué étant donné qu'il y a autant de fractions que de lettres. Dans la question ❸, la question est beaucoup plus ouverte ;

— la reproduction de la droite elle-même sur du papier millimétré dans la question ❸ peut poser problème, d'autant plus que l'origine n'est pas représentée. Dans la question ❷, la droite graduée est déjà tracée ;

— dans la question ❸, l'élève doit constamment « jongler » entre les différentes écritures, alors que la question ❷ ne comprend qu'une sorte d'écriture ;

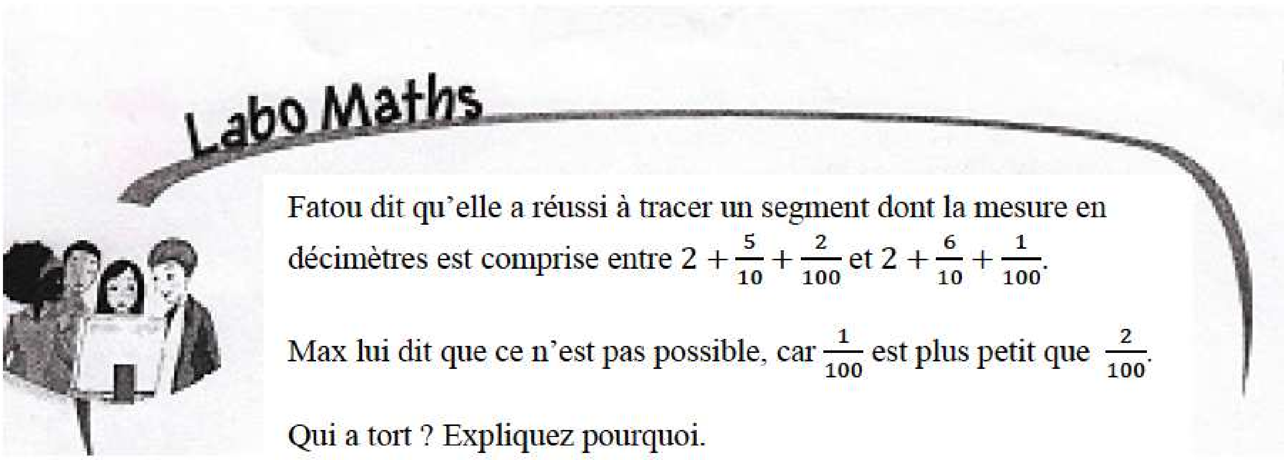
— les deux représentations de 3 et 4 dans l'exercice ❸ possèdent des dénominateurs différents, ce qui peut perturber l'élève ;

— dans l'exercice ❸, les graduations des centièmes ne sont pas clairement marquées, il faut se servir du papier millimétré comportant de multiples graduations alors que dans la question ❷, les graduations sont claires.

2. Quelle définition d'un nombre décimal peut-on proposer à l'école élémentaire ?

   Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 : 1, 10, 100, 1000...

SITUATION 2 : Extrait du manuel « Tribu des maths » CM2 Magnard (édition 2010)



Labo Maths

Fatou dit qu'elle a réussi à tracer un segment dont la mesure en décimètres est comprise entre $2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$ et $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100}$.

Max lui dit que ce n'est pas possible, car $\frac{1}{100}$ est plus petit que $\frac{2}{100}$.

Qui a tort ? Expliquez pourquoi.

Trois copies d'élèves sont proposées ci-après (Lara, Clément et Léonie).

1. Quelles sont les erreurs faites par Lara ? Indiquer pour chacune une origine possible.

   Lara n'obtient pas le bon dénominateur : elle écrit 1 000 au lieu de 100. Cela provient peut-être du au fait du codage usuel de $a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} = \overline{a,bc}$ qu'elle a vu en classe, le 1 000 provenant peut-être de la suite 1; 10; 100; 1 000 ou de la multiplication de 10 par 100 ?

   Ensuite elle se trompe en enlevant la virgule. Il s'agit peut-être d'une manière implicite de comparer les parties décimales « comme si un nombre décimal était composé de deux nombres entiers séparés par une virgule ».

   Sa conclusion ne justifie pas pourquoi Max à tort.

2. Citer une compétence qui semble acquise dans le domaine de la numération pour Clément.

   Clément semble avoir acquis la compétence « passer du développement canonique d'un nombre à l'écriture décimale ».

3. Léonie s'appuie sur les écritures décimales des nombres $2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$ et $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100}$ pour comparer ces nombres. Énoncer la règle de comparaison qu'elle utilise implicitement.
Elle utilise la règle suivante :
pour comparer deux nombres décimaux, on compare tout d'abord les parties entières. Si l'une est plus grande que l'autre, il en est de même pour le nombre décimal.
Si les parties entières sont égales, on compare le chiffre des dixièmes : le nombre le plus grand est celui qui a le plus grand chiffre des dixièmes.
On continue ainsi de suite pour chacun des rangs successifs.

Copies d'élèves :

Lara $2+\frac{5}{10}+\frac{2}{100} = \frac{252}{1000} = 0,252 = 252$ $2+\frac{6}{10}+\frac{1}{100} = \frac{261}{1000} = 0,261 = 261$ Max a tort car 252 est plus petit que 261. Fatou a raison	**Lara**
Clément $2+\frac{5}{10}+\frac{2}{100} = 2,52$ $2+\frac{6}{10}+\frac{1}{100} = 2,61$ 2,52 − 2,61 = IMPOSSIBLE Fatou a tort parce que nous ne pouvons pas le calcul	**Clément**
$2+\frac{5}{10}+\frac{2}{100} = 2,52$ et $2+\frac{6}{10}+\frac{1}{100} = 2,61$ Léonie $\frac{5}{10} = 0,5$ $\frac{2}{100} = 0,02$ $\frac{6}{10} = 0,6$ $\frac{1}{100} = 0,01$ Fatou dit que le segment qu'il a fait est entre 2,52 et 2,61. C'est Max qui a tort car $\frac{1}{100} = 0,01$ et $\frac{2}{100} = 0,02$ mais le chiffre d'avant pour $\frac{2}{100}$ est 2(5)2 est pour $\frac{1}{100}$ c'est 2,(6)1 c'est le chiffre des dixièmes qui a permis a Fatou. Alors que Max a comparer au chiffres des centièmes	**Léonie**

SITUATION 3 :

La situation suivante composée de trois problèmes a été proposée à des élèves. *(d'après ERMEL CM2, Hatier)*

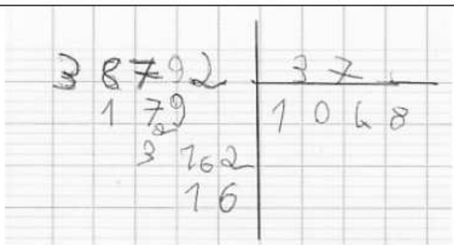
P1 :	Avec une bouteille de 150 cL de jus de fruits, combien peut-on remplir de verres de 8 cL ?
P2 :	Olivier achète 8 CD de même prix pour 150 €. Quel est le prix d'un CD ?
P3 :	À la cantine, les enfants déjeunent par tables de 8. Aujourd'hui 150 enfants déjeunent à la cantine. Combien de tables faut-il préparer ? Restera-t-il des places vides ?

1. Ces trois problèmes relèvent de la division. Indiquer ce qui les différencie.
   - Au niveau de la **division**, les situations P1 et P3 relèvent de la division euclidienne, le problème P2 de la division décimale.
   - Au niveau des **grandeurs**, les situations P1 et P3 traitent de grandeurs identiques, il s'agit de problèmes de division-quotition alors que la situation P2 relève d'un problème de division-partition avec des grandeurs différentes.
   - Au niveau du **résultat**, les situations P1 et P2 demandent de donner le quotient seulement. La situation P3 nécessite de connaître le quotient et le reste. Cependant, une erreur serait de donner le quotient et le reste de la division euclidienne comme réponses au problème P3. En effet, dans cette situation, le résultat de « combien de tables » correspond au quotient de la division euclidienne, augmenté de 1.
   - Au niveau de l'**ordre** des données, la situation P1 affiche des données dans l'ordre de l'écriture de l'opération alors que pour les situations P2 et P3, il faut les inverser.

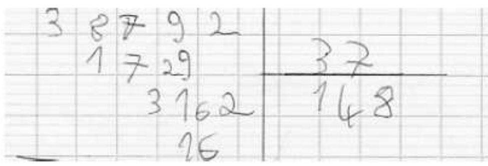
2. Donner l'ordre dans lequel ces exercices pourraient être proposés aux élèves. Justifier.
   On pourrait tout d'abord présenter l'exercice P1 qui ne nécessite que le quotient d'une division euclidienne.
   En deuxième, on peut se poser la question de l'ordre : on peut proposer la situation P3 qui demande la même technique que P1, mais une interprétation plus fine des résultats, ou la situation P2 dont le résultat de la division décimale donne directement la solution du problème ? Tout dépend du degré d'acquisition des connaissances des élèves au niveau des nombres décimaux.

SITUATION 4 : Technique opératoire de la division

Voici les productions de quatre élèves.

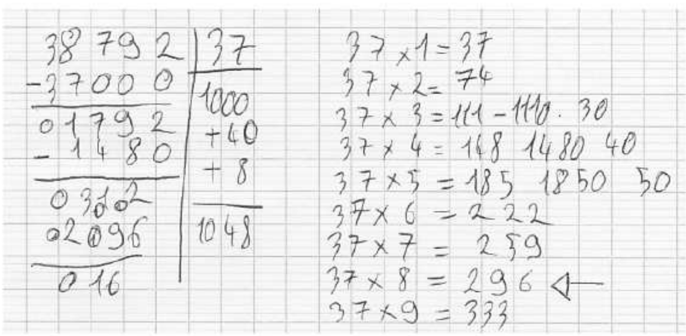


Adama



Marie

Kévin



Anaïs

1. Donner un avantage de chacune des techniques opératoires utilisées par Adama et Anaïs.

   Pour **Adama**, il s'agit de la division euclidienne usuelle sans pose des soustractions intermédiaires. L'avantage est un gain de temps si l'élève est expert en calcul mental et de place. L'inconvénient est sa complexité : il faut effectuer divers calculs mentalement et elle est source d'erreurs.

   Pour **Anaïs**, il s'agit d'une procédure avec écriture de la table de multiplication du diviseur et de résultats intermédiaires reprenant à chaque étape la totalité du dividende. Les avantages sont multiples : elle donne du sens à l'opération et elle évite la surcharge cognitive en ayant écrit les multiples de 37. De plus, un quotient non optimal lors d'une étape peut être rattrapé lors des étapes suivantes. L'inconvénient est une lourdeur de l'écriture.

2. Relever les erreurs faites par Marie et Kévin et, pour chacune, émettre une hypothèse sur son origine.

   Marie se trompe au niveau du quotient : elle oublie de mettre un « zéro » entre le 1 et le 4. Cette erreur vient probablement du fait que dans 17, elle ne peut pas mettre 37, elle abaisse alors le chiffre suivant, sans penser à caractériser cette impossibilité par un 0 qui correspond au nombre de centaines du quotient.

   Kévin pose son opération en effectuant les soustractions intermédiaires. Il ne calcule pas à l'avance les multiplications et lorsqu'il se trompe, il barre sa réponse et reprend ensuite jusqu'à trouver une solution convenable.
   Lors de sa dernière étape, le calcul de 9×37 donne un résultat trop grand pour être soustrait, il tente donc la multiplication par 7 qui fonctionne. Cependant, il ne s'est pas aperçu que le reste obtenu est supérieur au diviseur. La longueur de l'opération est peut-être en cause, et le calcul du répertoire multiplicatif de 37 aurait pu l'aider à calculer cette division de manière moins aléatoire.