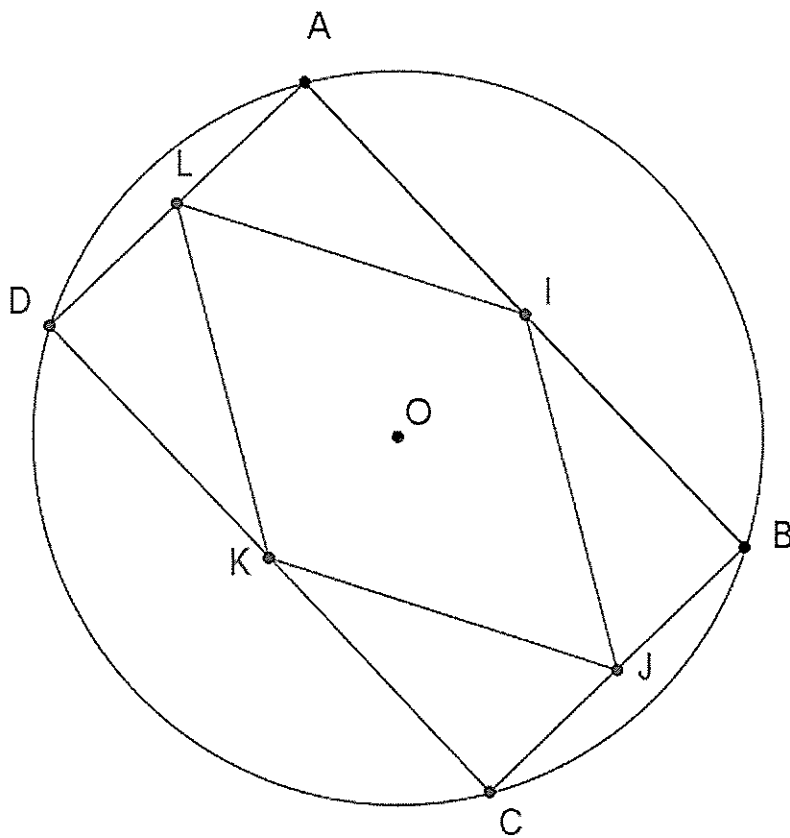


Sujet Mathématique M2 professionnalisant

Première partie (13 points)

Un jardinier veut réaliser un parterre circulaire composé de différentes parties comme l'indique le dessin ci-contre :



Une plate-bande est représentée par le rectangle $ABCD$, inscrit dans un disque, et le quadrilatère $IJKL$ représente un massif aménagé à l'intérieur de la plate-bande.

A- Construire le parterre

Le disque qui constitue le parterre a pour centre O et pour rayon r .

- 1) a) Prouver que $AC = BD = 2r$.

b) Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. Déterminer la longueur des côtés d'IJKL en fonction de r . Justifier la réponse.
c) En déduire la nature du quadrilatère IJKL.
- 2) On souhaite que la largeur de la plate-bande soit égale aux $\frac{3}{4}$ de sa longueur.
a) Prouver qu'alors la longueur du rectangle est égale à $\frac{8}{5}r$ et que sa largeur est égale à $\frac{6}{5}r$.
b) À l'échelle 1/60, le disque a pour rayon 5 cm.
Construire à la règle et au compas, le plan de ce parterre à cette échelle.
Les traits de construction resteront apparents.
Calculer, en vraie grandeur, l'aire de la toute la plate-bande. Les résultats seront donnés en m^2 au centième près.

B- Fleurir le parterre

Le jardinier décide de planter des tulipes sur le contour de la plate-bande et de semer du gazon à l'extérieur de celle-ci. Comme il souhaite tondre le moins possible, il envisage de changer les dimensions de la plate-bande pour que celle-ci ait une aire maximale tout en conservant son périmètre. Il cherche alors quelles pourraient être les dimensions de la plate-bande.

Une modélisation mathématique va permettre de répondre au problème du jardinier.

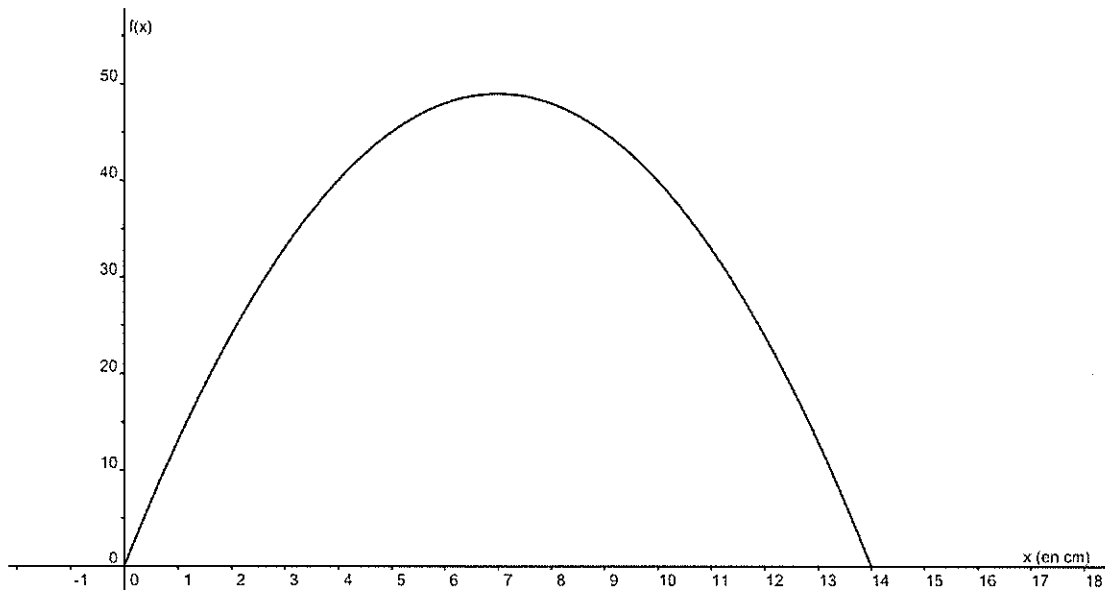
Ainsi pour les questions suivantes, les calculs se feront à partir des dimensions du plan réalisé précédemment (le rayon du disque est de 5 cm, et le périmètre du rectangle ABCD représentant la plate-bande est égal à 28 cm).

- 3) Montrer que si $A'B'C'D'$ est un rectangle ayant le même périmètre que le rectangle ABCD alors son aire vérifie :

$$\text{aire}(A'B'C'D') = 14x - x^2$$

où x désigne la mesure de la largeur du rectangle $A'B'C'D'$ exprimée en centimètres.

- 4) À partir du graphique suivant, déterminer graphiquement pour quelle valeur de x le rectangle $A'B'C'D'$ a une aire maximum.



Représentation de la fonction f qui à un nombre x associe $14x - x^2$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 14]$.

- 5) En admettant que la valeur déterminée graphiquement est exacte, donner la nature du rectangle $A'B'C'D'$ ayant même périmètre que $ABCD$ et une aire maximale, ainsi que la nature du quadrilatère $I'J'K'L'$ associé. Justifier les réponses.
- 6) Le jardinier peut-il construire une plate-bande représentée par ce quadrilatère $A'B'C'D'$ et vérifiant la condition d'être inscrit dans le disque initial de rayon 5 cm? Justifier la réponse.

C- Acheter des fleurs

Finalement, pour des raisons esthétiques, le jardinier choisit une plate-bande rectangulaire de 3,60 m sur 4,80 m et veut planter des tulipes sur le pourtour extérieur.

- 7) Sachant que les tulipes se plantent tous les 10 cm et qu'il y en a une à chaque coin de la platebande, déterminer le nombre de tulipes nécessaires. Justifier la réponse.
- 8) Par expérience, le jardinier sait que 25% des tulipes plantées ne fleuriront pas. Combien de tulipes devra-t-il commander pour disposer finalement du nombre de tulipes nécessaires ?

Deuxième partie (13 points)

Partie A Exercices numération et géométrie

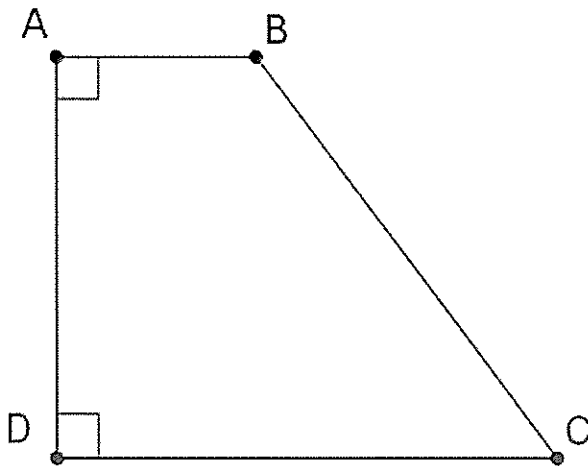
Exercice I

Les nombres considérés sont écrits en base dix.

- 1) Montrer que les nombres qui s'écrivent $\overline{aaa}$ où a est un chiffre, sont divisibles par 37.
- 2) Montrer que les nombres qui s'écrivent $\overline{aaabbb}$, où a et b sont des chiffres, sont aussi divisibles par 37.

Exercice II

On considère le trapèze rectangle ABCD, de hauteur [AD] tel que $AD = 8$ cm et de bases [AB] et [CD] de longueurs respectives 4 cm et 10 cm.



- 1) Calculer l'aire du trapèze ABCD.
- 2) Donner, en justifiant, la nature du triangle BCD.
- 3) La hauteur issue de C dans le triangle BCD coupe la droite (AD) en K.
Montrer que les triangles KBC et KDC ont la même aire.
- 4) Soit M un point mobile sur le segment [AD].
On note x la mesure de la longueur AM, l'unité choisie étant le cm.
 - a) Donner, en fonction de x , l'aire du triangle BCM.

- b) Pour quelle position de M, l'aire du triangle BCM est-elle la moitié de celle du trapèze ABCD ?

Partie B - Analyse de productions d'élèves sur les décimaux

Cet exercice s'appuie sur les documents proposés en annexe 2.

Annexe 2 : Les réponses de deux élèves (Jeanne et Tiago) à un exercice extrait des cahiers des évaluations nationales des acquis des élèves de CM2 en janvier 2011.

1) Questions concernant l'exercice de Jeanne et Tiago.

- a) Pour chaque question A, B et C de l'exercice de Jeanne et Tiago présenté en annexe 2, identifier de façon précise la connaissance et la compétence issue des programmes de mathématiques de l'école de 2008 qu'elle permet d'évaluer.

Dans une classe de CM1/CM2, voici les résultats obtenus par les 15 élèves de CM2.

Question A		Question B	
$\frac{60}{2}$	8 élèves	3,10	8 élèves
$\frac{62}{10}$	4 élèves	0,3	3 élèves
$\frac{602}{100}$	3 élèves	30,00	2 élèves
		3,00	1 élève
		0,03	1 élève

- b) Dans le tableau de résultats ci-dessus, les réponses $\frac{60}{2}$ à la question A et 3,10 à la question B apparaissent majoritairement. Quel renseignement nous donnent ces réponses sur la représentation du lien entre l'écriture à virgule et l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal pour les élèves qui commettent cette erreur ?
- c) Donner une hypothèse permettant d'expliquer l'absence de réponse de Tiago à la question C.
- d) Au regard de la réponse donnée par Jeanne à la question C, quel type de connaissances mathématiques faudrait-il retravailler ?

Annexe 2

Réponses de deux élèves à l'exercice n°2 extrait des évaluations nationales
des acquis des élèves de CM2 en janvier 2011.

Production de Jeanne :

A/ Entoure la fraction égale à 6,02

$$\left(\frac{60}{2}\right)$$

$$\frac{62}{10}$$

$$\frac{602}{100}$$

$$\frac{620}{100}$$

B/ Entoure le nombre à virgule égal à $\frac{3}{10}$

3,10

0,3

0,03

30,00

3,0

3,00

C/ Écris $\frac{1}{4}$ sous forme de nombre à virgule :

$$\frac{1}{4} = 0,4$$

Production de Tiago :

A/ Entoure la fraction égale à 6,02

$$\frac{60}{2}$$

$$\frac{62}{10}$$

$$\left(\frac{602}{100}\right)$$

$$\frac{620}{100}$$

B/ Entoure le nombre à virgule égal à $\frac{3}{10}$

3,10

0,3

0,03

30,00

3,0

3,00

C/ Écris $\frac{1}{4}$ sous forme de nombre à virgule :

$$\frac{1}{4} =$$

Troisième partie (14 points)

Vous trouverez en annexes des exercices extraits de deux fichiers destinés au cours préparatoire.

L'encadré situé sous chaque extrait de fichier est tiré du livre du maître correspondant et concerne les exercices reproduits dans la même page.

L'annexe 1 est tirée de « Cap Maths » (éditions Hatier, 2009).

L'annexe 2 est tirée de « Maths tout terrain » (éditions Bordas, 2009).

a)

Dans le livre du maître « Cap Maths », des activités de commande de boutons sont effectuées en classe avant les exercices individuels sur le fichier.

Lors de ces activités, les élèves doivent remplir des bons de commande semblables à ceux des exercices du fichier et les donner à des marchands qui fournissent les paquets et les boutons.

Le livre du maître précise qu'on doit indiquer aux élèves que les marchands ont été dévalisés et ne peuvent pas donner plus de 9 boutons isolés par commande.

Cette contrainte sur le nombre de boutons isolés vous paraît-elle justifiée ?

b)

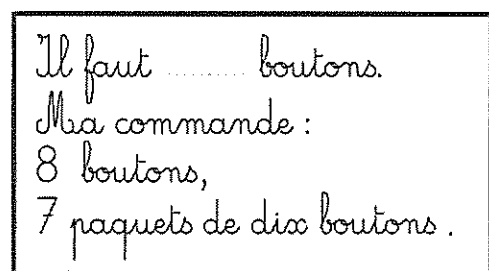
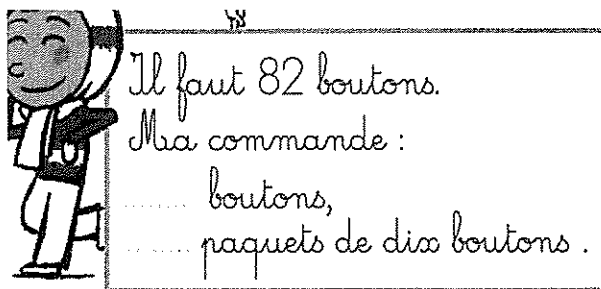
L'extrait du livre du maître de « Cap Maths » cite un acquis d'une séance précédente.

Proposez une formulation de cet acquis adaptée aux élèves de CP.

c)

Un enseignant utilise « Cap Maths » et décide de modifier un item de chacun des deux exercices en intervertissant la ligne portant sur les boutons et celle portant sur les paquets de dix boutons. Il propose donc à ses élèves les items ci-dessous, les autres items restant inchangés.

Justifiez cette initiative



d)

Les exercices proposés par « Maths tout terrain » permettent selon le livre du maître de vérifier que les élèves ont certaines compétences. Discutez cette affirmation

e)

Proposez un type de matériel favorisant l'apprentissage de l'aspect positionnel de notre système de numération puis un autre favorisant la pratique des groupements et échanges.

Annexe 1

Valeur positionnelle des chiffres

2 Complète les bons de commande.



Il faut 36 boutons.
Ma commande :
... paquets de dix boutons,
... boutons.



Il faut 30 boutons.
Ma commande :
... paquets de dix boutons,
... bouton.



Il faut 82 boutons.
Ma commande :
... paquets de dix boutons,
... boutons.

Complète les bons de commande.

Il faut boutons.
 Ma commande :
 7 paquets de dix boutons,
 8 boutons.

Il faut boutons.
 Ma commande :
 4 paquets de dix boutons,
 0 bouton.

Il faut boutons.
 Ma commande :
 1 paquet de dix boutons,
 5 boutons.

Il faut boutons.
 Ma commande :
 3 paquets de dix boutons,
 7 boutons.

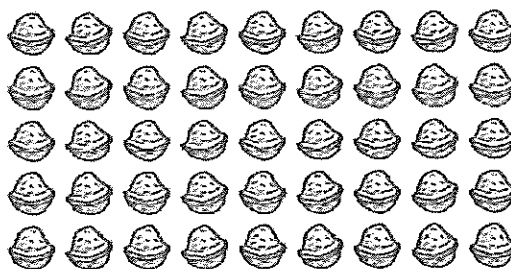
Ces exercices sont l'occasion de rappeler les acquis de la séance 3 : « L'écriture d'un nombre comme 36 peut être directement interprétée comme exprimant le nombre d'objets d'une collection qui peut être organisée en 3 groupements de 10 objets et 6 objets isolés ».

Annexe 2

Groupe par 10, puis complète le tableau.



dizaines	unité



dizaines	unités

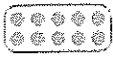
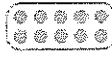
Relie.

4 dizaines
3 unités

3 dizaines
2 unités

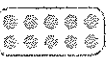
2 dizaines
5 unités

3 dizaines
8 unités

dizaines	unités	dizaines	unités	dizaines	unités	dizaines	unités
							
3	2	4	3	3	8	2	5

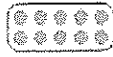
Colorie le nombre de dizaines et d'unités indiquées.

dizaines unités



5 6

dizaines unités



6 5

Les exercices 1 à 3 permettent de vérifier que les élèves parviennent à dénombrer une collection en groupant les éléments par dizaines, qu'ils lisent, écrivent et représentent convenablement des nombres relativement grands.