

Comprendre les suites numériques au lycée

Stéphane PASQUET

Avant-propos

Cet ouvrage est principalement destiné aux enseignants, aux parents et aux élèves de 1^{re} et Terminale suivant l'enseignement de spécialité Mathématiques qui voudraient approfondir la notion de suites vue au lycée.

Il a été conçu après un constat que j'ai pu faire à travers mon activité professionnelle d'enseignant : les élèves ne comprennent pas le fond de cette notion et tentent d'apprendre par cœur les exercices qu'ils voient en classe pour s'en sortir lors des interrogations.

Mais si cette technique peut marcher pour quelques uns des élèves, elle n'est bien évidemment pas la technique à adopter. Il faut avant tout comprendre la logique des suites.

J'ai donc tenté, à l'aide de quelques exemples qui illustrent la théorie, de simplifier les notions.

Je reprends donc ici les thèmes (qui concernent toujours les suites numériques) qui pourront être rencontrés en 1^{re} et Terminale en tentant d'expliquer ce que l'on fait réellement. Dans chaque chapitre, il n'y a que peu d'exercices, mais ils sont importants et si l'élève les fait 4 ou 5 fois (méthode du *feed-back*), il ou elle aura de fortes chances de se sentir plus à l'aise avec les suites.

Bien entendu, si vous constatez une anomalie dans cet ouvrage, ou si tout simplement vous souhaitez inclure quelques exercices qui vous semblent intéressants, n'hésitez pas à me contacter à l'aide du formulaire de contact présent sur le site mathweb.fr.

Bonne lecture,

Stéphane PASQUET



Table des matières

1	Première approche	7
1.1	Qu'est-ce qu'une suite numérique ?	7
1.2	Un peu de vocabulaire	7
1.3	Comment définir une suite numérique ?	8
1.3.1	Définir une suite de manière explicite	8
1.3.2	Définir une suite par récurrence	8
1.3.3	Génération des termes d'une suite définie par récurrence	9
1.4	Variations d'une suite définie par récurrence	10
1.5	Majoration et minoration d'une suite	11
1.6	Convergence et divergence des suites	12
1.7	Corrigés des exercices	13
2	Raisonnement par récurrence	15
2.1	Le principe de récurrence	15
2.2	Démontrer une minoration ou une majoration	16
2.3	Corrigés des exercices	18
3	Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$	25
3.1	Limite d'une suite	25
3.2	Étude problématique (hors programme de Terminale)	26
3.3	Corrigés des exercices	29

4	Suites arithmétiques	33
4.1	Définition	33
4.2	Variations	33
4.3	Formule explicite	34
4.4	Somme des premiers termes	35
4.5	Corrigés des exercices	36
5	Suites géométriques	39
5.1	Définition	39
5.2	Variations	39
5.3	Formule explicite	40
5.4	Somme des premiers termes	41
5.5	Limite d'une suite géométrique	42
5.6	Corrigés des exercices	43
6	Suites arithmético-géométriques	45
6.1	Définition	45
6.2	Étude d'une suite arithmético-géométrique	45
7	Suites homographiques	49
7.1	Définition	49
7.2	Étude d'une suite arithmético-géométrique	49
7.3	Pour aller plus loin ... (hors programme de lycée)	52
7.4	Corrigés des exercices	53
8	Suites imbriquées linéairement	57
8.1	Définition	57
8.2	Résolution	57
8.3	Pour aller plus loin ... (hors programme)	59
8.4	Corrigé de l'exercice	60
9	Suites diverses	61
9.1	Suites de la forme $u_{n+1} = u_n + an + b$	61
9.2	Suites imbriquées	63
9.3	Corrigés des exercices	63

10	Un peu de recherche	67
10.1	Une suite non connue	67
10.2	À la recherche du terme général	67
10.3	Avec un exemple de polynôme	68
10.4	Calcul de la limite	70

Qu'est-ce qu'une suite numérique ?

Un peu de vocabulaire

Comment définir une suite numérique ?

Définir une suite de manière explicite

Définir une suite par récurrence

Génération des termes d'une suite définie par récurrence

Variations d'une suite définie par récurrence

Majoration et minoration d'une suite

Convergence et divergence des suites

Corrigés des exercices

1 — Première approche

1.1 Qu'est-ce qu'une suite numérique ?

Définition 1.1 Une suite numérique est une fonction à variables réelles, que l'on peut noter :

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u_n$$

■ **Exemple 1.1** Les nombres pairs constituent une suite numérique que l'on peut définir par :

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto 2n$$

On aura alors : $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, u_4 = 8, \dots$

■ **Exemple 1.2** Les carrés parfaits constituent une suite numérique que l'on peut définir par :

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n^2$$

On aura alors : $u_0 = 0, u_1 = 1^2 = 1, u_2 = 2^2 = 4, u_3 = 3^2 = 9, u_4 = 4^2 = 16, \dots$

R S'il n'y a pas d'ambiguïté sur les nombres n , c'est-à-dire si l'on considère que les nombres n sont dans $\mathbb{N}$, on notera les suites sous la forme : (u_n) .

Dans le cas contraire, on ajoutera la condition sur n en indice : $(u_n)_{n \geq 1}$ signifie que les nombres u_n sont définis pour tout entier naturel n plus grand ou égal à 1.

1.2 Un peu de vocabulaire

Définition 1.2 On considère une suite (u_n) . Pour tout entier naturel n , u_n est appelé un **terme** de la suite. n est alors l'**indice** de ce terme. Le **rang** du terme est sa position par rapport au début de la liste des termes.

Dans l'exemple 1.1, le terme de rang 4 est u_3 (c'est le 4^e terme dans la liste en partant du début, donc à partir de u_0). L'indice du terme de rang 4 est donc 3.

1.3 Comment définir une suite numérique ?

Il existe deux façons de définir une suite numérique.

1.3.1 Définir une suite de manière explicite

C'est ce que nous avons vu dans les exemples 1.1 et 1.2 : si on connaît la fonction qui donne le terme d'indice n , alors on définit la suite de manière explicite (on peut aussi dire que l'on définit la suite de manière fonctionnelle).

Définition 1.3 On dit qu'une suite (u_n) est définie de manière explicite si l'on connaît la fonction f telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n).$$

1.3.2 Définir une suite par récurrence

La plupart du temps, les suites se construisent à partir de problèmes concrets et dans ces cas, nous ne connaissons pas nécessairement la fonction qui donne chaque terme. Voyons un exemple :

■ **Exemple 1.3** Au 1^{er} janvier 2014, j'avais 30 000 € sur un compte.

J'admets que d'une année à l'autre, je perds 10 % de ce qui est sur ce compte et, pour compenser un peu, j'ajoute sur ce même compte 5 000 €.

Notons u_n le solde de ce compte à l'année 2014 + n . Ainsi, u_0 représente le solde en 2014, soit $u_0 = 30\,000$.

Comment calculer les termes suivants ?

En 2015, si je perds 10 % sur ce compte, il me restera 90 % de 30 000 et si j'ajoute 5 000 €, au final, on aura :

$$u_1 = 0,9 \times \underbrace{30\,000}_{u_0} + 5\,000.$$

Le résultat numérique nous importe peu à ce stade car ce que nous voulons, c'est « deviner » la méthode qui nous permettra de calculer u_n pour tout n .

En 2016, j'aurai perdu 90 % du solde de 2015, soit de u_1 , et j'ajouterai 5 000 €, d'où :

$$u_2 = 0,9 \times u_1 + 5\,000.$$

On voit alors se dessiner une relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0,9 \times u_{n-1} + 5\,000. \quad [1.1]$$

Cette dernière relation signifie que pour connaître le solde du compte à l'année 2014 + n (ce solde est u_n), on doit multiplier par 0,9 le solde de ce compte l'année précédente ($0,9 \times u_{n-1}$) et on doit ajouter 5 000 €.

Notons que la relation 1.1 peut aussi s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,9 \times u_n + 5\,000.$$

Cette dernière relation (qui lie un terme à son précédent) est appelée **relation de récurrence**. On peut même être plus précis en disant que c'est une relation de récurrence d'**ordre 1** car la différence entre le plus grand indice ($n+1$) et le plus petit (n) des deux termes de l'égalité est égale à 1.

Pour le moment, nous allons nous concentrer sur les relations de récurrence d'ordre 1, mais il faut savoir qu'il existe des relations de récurrence d'ordre supérieur comme, par exemple :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

où l'ordre est égal à 2 car $n+2-n=2$ (u_{n+2} est le terme dont l'indice est le plus grand et u_n est celui dont l'indice est le plus petit).

Définition 1.4 Une suite (u_n) est définie par récurrence s'il existe une fonction f telle que :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = f(u_{n+p-1}, u_{n+p-2}, u_{n+p-3}, \dots, u_n).$$

p est alors l'ordre de la relation de récurrence.

Comme dit précédemment, on utilisera plus la définition suivante :

Définition 1.5 Une suite (u_n) est définie par récurrence s'il existe une fonction f telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

R Quand on définit une suite par récurrence, il est nécessaire de préciser la valeur d'un terme (en général, le premier).

■ **Exemple 1.4** La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est définie par récurrence où $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + 1$.

■ **Exemple 1.5** La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est définie par récurrence où $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x} + x$.

1.3.3 Génération des termes d'une suite définie par récurrence

Il est intéressant de voir comment construire une suite à partir de sa relation de récurrence. Reprenons alors l'exemple 1.5. On peut utiliser un tableur pour calculer les termes successifs de (u_n) .

	A	B
1 n		u(n)
2 0		1
3	A2+1	=1/B2+B2
4		
5		
6		

Cette formule correspond à la relation $\frac{1}{u_n} + u_n$.
En la recopiant vers le bas, on calcule les premiers termes de la suite.

On obtient :

n	u_n
0	1
1	2
2	2,5
3	2,9
4	3,2448275862
5	3,5530103705
6	3,8344618428
7	4,0952546323
8	4,3394396927
9	4,5698841904
10	4,7887081164

1.4 Variations d'une suite définie par récurrence

L'une des premières choses qui va nous intéresser, c'est de connaître le sens de variation d'une suite.

Nous allons être clairs dès le début : si une suite est définie de façon explicite, alors nous n'avons qu'à étudier le sens de variation de la fonction qui définit la suite. Cela relève donc plus de l'analyse fonctionnelle que de l'analyse numérique, thème de ce livre.

Par la suite, nous allons donc considérer que les suites que nous étudions sont définies par récurrence.

Propriété 1.1

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir d'un certain rang s'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n.$$

- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir d'un certain rang s'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n.$$

- Une suite (u_n) est **constante** à partir d'un certain rang s'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n.$$

Concrètement, pour trouver les variations d'une suite, on calculera $u_{n+1} - u_n$ et on regardera le signe du résultat.

■ **Exemple 1.6** On définit (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$$

Alors, pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - u_n + 1 - u_n \\ &= u_n^2 - 2u_n + 1 \\ &= (u_n - 1)^2 \\ u_{n+1} - u_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$, ce qui signifie que (u_n) est croissante.

Exercice 1.1 Trouver le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{4}{u_n} + 2u_n - 4 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On admettra pour cela que les termes de cette suite sont tous strictement positifs.

Exercice 1.2 Trouver le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 11u_n + 25 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 1.3 Trouver le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On admettra pour cela que les termes de cette suite sont tous définis et non nuls.

Exercice 1.4 Trouver le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On admettra pour cela que tous les termes de cette suite sont supérieurs ou égaux à $\sqrt{2}$.

1.5 Majoration et minoration d'une suite

Définition 1.6

- On dit qu'une suite est **majorée** par M si, pour tout entier naturel n , u_n est toujours inférieur ou égal à M :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

- On dit qu'une suite est **minorée** par m si, pour tout entier naturel n , u_n est toujours supérieur ou égal à m :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m.$$

- On dit qu'une suite (u_n) est **bornée** si, pour tout entier naturel n , il existe deux réels m et M tels que :

$$m \leq u_n \leq M.$$

Cela signifie que (u_n) est à la fois minorée et majorée.

■ **Exemple 1.7** La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{1}{n}$ est minorée par 0 car $\frac{1}{n} \geq 0$ pour $n > 0$.

■ **Exemple 1.8** La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 5 - n^2$ est majorée par 5 car pour tout entier naturel n , $5 - n^2 \leq 5$.

■ **Exemple 1.9** La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $w_n = 1 - \frac{1}{n}$ est bornée car $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$, donc $0 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$.

1.6 Convergence et divergence des suites

Définition 1.7

- On dit qu'une suite (u_n) est **convergente** si ses termes se rapprochent de plus en plus d'un nombre ℓ fini. Cela se note de façon mathématique de la façon suivante :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

- Si une suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente**.

■ **Exemple 1.10** La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0 car plus n devient grand, plus $\frac{1}{n+1}$ se rapproche de 0.

■ **Exemple 1.11** La suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{v_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est divergente car si on calcule les premiers termes de cette suite, on obtient :

$$v_0 = 2 \quad ; \quad v_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad v_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad ; \quad v_3 = \frac{1}{2} \quad \dots$$

On voit donc que les termes de la suite prennent alternativement les valeurs « 2 » et « $\frac{1}{2}$ » donc ne se rapprochent pas d'une valeur précise.

Théorème 1.1

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.



Ce théorème est admis en lycée car sa démonstration fait appel à des résultats que l'on voit dans l'enseignement supérieur.

■ **Exemple 1.12** Nous avons vu dans l'exercice 1.3 que la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

était décroissante.

De plus, $u_n \geq 0$ car les termes sont définis comme étant des racines carrées.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée ; elle converge donc.

1.7 Corrigés des exercices

Correction de l'exercice 1.1

Nous avons :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{4}{u_n} + 2u_n - 4 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculons alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4}{u_n} + 2u_n - 4 - u_n \\ &= \frac{4}{u_n} + u_n - 4 \\ &= \frac{4 + u_n^2 - 4u_n}{u_n} \\ &= \frac{u_n^2 - 4u_n + 4}{u_n} \\ &= \frac{(u_n - 2)^2}{u_n} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui signifie que (u_n) est croissante.

Correction de l'exercice 1.2

On a :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 11u_n + 25 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 + 11u_n + 25 - u_n \\ &= u_n^2 + 10u_n + 25 \\ &= (u_n + 5)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui signifie que (u_n) est croissante.

Correction de l'exercice 1.3

On a :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n - 1} - u_n \\
 &= \frac{(\sqrt{2u_n - 1} - u_n)(\sqrt{2u_n - 1} + u_n)}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} \\
 &= \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} \\
 &= -\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} \\
 &= -\frac{(u_n - 1)^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n}
 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , $(u_n - 1)^2 \geq 0$. De plus, l'énoncé nous dit que tous les termes sont définis et non nuls, ce qui signifie que $\sqrt{2u_n - 1} > 0$ existe et donc que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$. Finalement, on a $\sqrt{2u_n - 1} + u_n > 0$.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (ne pas oublier le signe « $-$ » devant la fraction), ce qui signifie que (u_n) est décroissante.



Dans les calculs où intervient une racine carrée, il est assez recommandé de penser à faire appel à ce que nous avons fait à la deuxième ligne, à savoir multiplier par l'expression conjuguée, afin d'éliminer la racine carrée.

Correction de l'exercice 1.4

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} - u_n \\
 &= \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}u_n \\
 &= \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \\
 &= \frac{(\sqrt{2} - u_n)(\sqrt{2} + u_n)}{2u_n}
 \end{aligned}$$

D'après l'énoncé, $u_n \geq \sqrt{2}$ donc $\sqrt{2} - u_n \leq 0$, $\sqrt{2} + u_n \geq 0$ et $2u_n > 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, ce qui signifie que (u_n) est décroissante.

2 — Raisonnement par récurrence

R Ce chapitre ne concerne que les élèves de la filière S.

2.1 Le principe de récurrence

Théorème 2.1 Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant d'un nombre entier n . Si :

- $\mathcal{P}_0$ est vraie [initialisation]
- pour un entier k fixé, $\mathcal{P}_k \implies \mathcal{P}_{k+1}$ [hérédité]

alors $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Ce théorème est très important car il permet de démontrer des égalités conjecturées (supposées vraies à l'aide d'observations).

■ **Exemple 2.1** Posons :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démontrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- **Initialisation.**

Cette étape consiste à vérifier que la propriété est vraie pour le plus petit entier n possible ; ici, il faut donc montrer que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

D'une part, le membre gauche de l'égalité est égal à 1.

D'autre part, le membre droit de l'égalité est égal à : $\frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$.

Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vraie. L'initialisation est alors faite.

- **Hérédité.**

Cette étape consiste à supposer que la propriété est vraie pour un entier k fixé et qu'en conséquence, elle l'est aussi au rang suivant, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Supposons donc que $\mathcal{P}_k$ soit vraie. Alors :

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{on appelle cela l'hypothèse de récurrence})$$

et montrons, grâce à cela, que :

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (\text{en mettant en facteur } k+1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Nous avons ici démontré que si $\mathcal{P}_k$ était vraie, alors $\mathcal{P}_{k+1}$ l'était aussi, ce qui se note mathématiquement : $\mathcal{P}_k \implies \mathcal{P}_{k+1}$ (si $\mathcal{P}_k$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{k+1}$ aussi).

L'hérédité est alors démontrée. Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 2.1 Démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 2.2 Démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2.2 Démontrer une minoration ou une majoration

■ **Exemple 2.2** Reprenons la suite (u_n) définie dans l'exercice 1.3 :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1.$$

- **Initialisation.**

$u_0 = 2 \geq 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. L'initialisation est alors vérifiée.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier k fixé, $u_k \geq 1$.

Montrons alors que $u_{k+1} \geq 1$, c'est-à-dire : $\sqrt{2u_k - 1} \geq 1$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 u_k \geq 1 &\implies 2u_k \geq 2 \\
 &\implies 2u_k - 1 \geq 1 \\
 &\implies \sqrt{2u_k - 1} \geq \sqrt{1} \quad (\text{car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante}) \\
 &\implies u_{k+1} \geq 1.
 \end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$, ce qui signifie que (u_n) est minorée.

R Ceci couplé au fait que la suite est décroissante (voir exercice 1.3) montre que (u_n) converge.

Exercice 2.3 Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est majorée par 4.

■ **Exemple 2.3** Reprenons ici la suite (u_n) définie dans l'exemple 1.4 :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et montrons qu'elle est minorée par $\sqrt{2}$.

Nous allons nous aider des variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

puisque $u_{n+1} = f(u_n)$.

La dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f					

Montrons maintenant par récurrence que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout entier naturel n .

• **Initialisation.**

$u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$ donc l'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier naturel k fixé, $u_k \geq \sqrt{2}$.

Alors,

$$f(u_k) \geq f(\sqrt{2})$$

car sur $[\sqrt{2}; +\infty[$, f est strictement croissante donc en prenant l'image des termes u_k et $\sqrt{2}$, on ne change pas leur ordre relatif (on ne change donc pas le sens de l'inégalité).

Or, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. D'où :

$$u_{k+1} \geq \sqrt{2}.$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, la suite est minorée par $\sqrt{2}$.

R Il était ici nécessaire d'utiliser les variations de la fonction f . Essayez de démontrer la minoration sans ces variations et vous vous rendrez vite compte des difficultés.

Exercice 2.4 Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2u_n + 1}{u_n + 1}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est minorée par λ , où λ est une solution de l'équation $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ (on admettra que $0 < \lambda < 5$).

2.3 Corrigés des exercices

Correction de l'exercice 2.1

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Initialisation.**

D'une part, $1^2 = 1$;

D'autre part, $\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.

Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vraie. L'initialisation est alors faite.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier k fixé, $\mathcal{P}_k$ soit vraie. Alors :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Montrons qu'en conséquence :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)(k+1)}{6} \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}. \end{aligned}$$

Le discriminant de $2k^2 + 7k + 6$ est :

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 6 = 49 - 48 = 1.$$

Ainsi, il admet deux racines :

$$k_1 = \frac{-7 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = -2 \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{-7 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2}.$$

Le polynôme $2k^2 + 7k + 6$ se factorise donc sous la forme :

$$\begin{aligned} 2k^2 + 7k + 6 &= 2(k - k_1)(k - k_2) \\ &= 2(k + 2) \left(k + \frac{3}{2} \right) \\ &= (k + 2)(2k + 3). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

et donc, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Correction de l'exercice 2.2

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- **Initialisation.**

D'une part, nous avons : $1^3 = 1$;

D'autre part, $\frac{1^2 \times (1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 2^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vraie. L'hérédité est alors vérifiée.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier k fixé, $\mathcal{P}_k$ soit vraie :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Montrons qu'en conséquence, $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi, c'est-à-dire :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

On a :

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)(k+1)^2}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \quad (\text{identité remarquable}). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie. L'hérédité est donc démontrée.

Correction de l'exercice 2.3

La suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 4$.

- **Initialisation.**

$u_0 = -1 \leq 4$ donc l'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier naturel k fixé, $u_k \leq 4$. Alors :

$$\begin{aligned} u_k \leq 4 &\implies 3u_k \leq 12 \\ &\implies 3u_k + 4 \leq 16 \\ &\implies \sqrt{3u_k + 4} \leq \sqrt{16} \\ &\implies u_{k+1} \leq 4. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 4$. La suite (u_n) est donc majorée par 4.



On pourrait aussi continuer et démontrer que la suite est croissante, donc convergente.

Correction de l'exercice 2.4

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2u_n + 1}{u_n + 1}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Posons :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}$$

définie sur $] -\infty; -1[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Avec la formule :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}},$$

on trouve que la dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}.$$

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur $] -\infty; -1[$ et sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, ce qui donne :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		0	+
f				

Montrons maintenant par récurrence que $u_n \geq \lambda$.

- **Initialisation.**

$u_0 = 5 > \lambda$ donc l'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier naturel k fixé, $u_k \geq \lambda$.

Sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$, f est strictement croissante donc :

$$u_k \geq \lambda \implies f(u_k) \geq f(\lambda).$$

Or, $u_{k+1} = f(u_k)$ et $f(\lambda) = \sqrt{\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}$.

D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 &\implies \lambda^3 + \lambda^2 = 2\lambda + 1 \\ &\implies \lambda^2(\lambda + 1) = 2\lambda + 1 \\ &\implies \lambda^2 = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} \text{ (car } \lambda \neq -1) \\ &\implies \lambda = \sqrt{\frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}} \text{ (car } \lambda > 0) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_k \geq \lambda \implies u_{k+1} \geq \lambda.$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, la suite (u_n) est minorée par λ .

R On pourrait démontrer que la suite est décroissante, donc convergente et en calculant les premiers termes de (u_n) , on arrive à voir que u_n se rapproche de 1,246979604. Il se trouve que cette valeur est une valeur approchée de l'une des solutions de l'équation $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, que l'on ne peut pas résoudre facilement.

En effet, si on note ℓ la limite de (u_n) (puisque'elle existe), alors u_{n+1} et u_n se rapprochent de plus en plus de ℓ si bien qu'à partir d'un certain rang, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \sqrt{\frac{2u_n+1}{u_n+1}} &\implies \ell \approx \sqrt{\frac{2\ell+1}{\ell+1}} \\ &\implies \ell^2 \approx \frac{2\ell+1}{\ell+1} \\ &\implies \ell^2(\ell+1) \approx 2\ell+1 \\ &\implies \ell^3 + \ell^2 - 2\ell - 1 = 0. \end{aligned}$$

On voit alors que les suites peuvent servir à trouver des solutions à certaines équations. Mais nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

3 — Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

R Ce chapitre ne concerne que les élèves de la filière S.

3.1 Limite d'une suite

Notation 3.1 Lorsqu'une suite (u_n) est convergente vers un nombre réel ℓ , on notera :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Si la suite est divergente et si ses termes prennent des valeurs de plus en plus grandes, on notera :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Si, au contraire, ses termes prennent des valeurs se rapprochant de $-\infty$, on notera :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Théorème 3.1 Soit f une fonction continue sur une partie I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$) et soit (u_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et si $\ell \in I$, alors ℓ est solution de l'équation $\ell = f(\ell)$.

C'est ce théorème que nous avons utilisé dans la remarque de la correction 2.4.

■ **Exemple 3.1** Soit (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si (u_n) converge vers un nombre ℓ , alors $\ell = \sqrt{2\ell + 1}$, soit :

$$\ell^2 - 2\ell - 1 = 0.$$

Cette équation admet pour solutions :

$$\ell' = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \ell'' = 1 + \sqrt{2}.$$

Seule ℓ'' est positive donc si (u_n) converge, alors sa limite vaut $1 + \sqrt{2}$.

Ceci nous permet de poser la propriété de majoration sur u_n . En effet, $u_0 < 1 + \sqrt{2}$ donc on peut démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 1 + \sqrt{2}$.

En montrant ensuite que (u_n) est strictement croissante, on démontrera qu'elle converge et donc, que sa limite vaut $1 + \sqrt{2}$.

Exercice 3.1 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 10} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1** Si (u_n) converge, quelle est sa limite ? On la notera ℓ .
- 2** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq \ell$.
- 3** Démontrer que (u_n) est croissante.
- 4** Conclure quant à la convergence de (u_n) .

3.2 Étude problématique (hors programme de Terminale)

Nous l'avons vu à travers la résolution de l'exercice 3.1, si une suite (u_n) est définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour étudier sa convergence, il est nécessaire de montrer sa stricte monotonie (sa croissance stricte ou sa décroissance stricte). Ceci est possible lorsque nous avons la chance d'avoir une fonction f croissante sur l'intervalle choisi. En effet, dans le raisonnement par récurrence, nous partons de l'hypothèse (par exemple) :

$$u_k \leq \lambda$$

puis nous prenons l'image de chaque membre de l'inégalité par la fonction f . Ainsi, la récurrence fonctionne dans le cas où f est strictement croissante car, dans un tel cas :

$$u_k \leq \lambda \implies f(u_k) \leq f(\lambda).$$

Le fait que f soit strictement croissante implique que l'ordre est conservé. Mais quelques fois, nous n'aurons pas cette chance ...

■ **Exemple 3.2** On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{8 - u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

À l'aide d'un tableur, on peut calculer les premiers termes de cette suite :

	A	B
1 n		u(n)
2 0		1
3	A2+1	=RACINE(8-B2)
4		
5		
6		

Cette formule correspond à la relation $\sqrt{8 - u_n}$.
En la recopiant vers le bas, on calcule les premiers termes de la suite.

On obtient :

n	u_n
0	1
1	2,6457513111
2	2,3139249532
3	2,3845492335
4	2,3696942348
5	2,372826535
6	2,3721664075
7	2,3723055437
8	2,3722762184
9	2,3722823992
10	2,3722810965

On constate alors que la suite n'est pas monotone. En effet, $u_1 > u_0$, $u_2 < u_1$, $u_3 > u_2$, etc.
Ceci est dû au fait que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{8 - x}$ est décroissante. Ainsi, on ne peut pas étudier les variations de (u_n) . Mais pour y remédier, nous allons utiliser un résultat sur les fonctions :

Propriété 3.1 Si f est une fonction décroissante, alors la fonction g définie par :

$$g(x) = f[f(x)]$$

est croissante.

J'ai délibérément simplifié l'énoncé de cette propriété en supposant que la fonction g existe (il aurait fallu discuter de l'intervalle de définition).

Cette propriété nous pousse à considérer la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = u_0 = 1 \\ v_{n+1} = f[f(v_n)] \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Toujours à l'aide d'un tableur, on calcule les premiers termes de (v_n) :

	A	B
1 n		u(n)
2 0		1
3 =A2+1		=RACINE(8-RACINE(8-B2))

On obtient :

n	v_n	
0	1	$= u_0$
1	2,3139249532	$= u_2$
2	2,3696942348	$= u_4$
3	2,3721664075	$= u_6$
4	2,3722762184	$= u_8$
5	2,3722810965	$= u_{10}$

Cette suite est en fait une suite extraite de la suite (u_n) : dans (u_n) , on prend un terme sur deux), ce qui fait qu'elle converge deux fois plus rapidement, mais surtout, qu'elle est strictement croissante (résultat que l'on conjecture à l'aide des valeurs calculées dans le tableur et qu'il faut bien entendu démontrer par récurrence maintenant que l'on sait que la fonction g telle que $v_{n+1} = g(v_n)$ est strictement croissante).

Exercice 3.2 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est décroissante sur $] -1 ; +\infty[$.
- 2 Montrer que $f(x) > 0$ sur $] -1 ; +\infty[$.
- 3 On pose $g(x) = f[f(x)]$. Montrer que $g(x)$ existe et que g est croissante sur $] -1 ; +\infty[$.
- 4 On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- (a) Montrer que (v_n) est strictement décroissante.
- (b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
- (c) Conclure quant à la convergence de (v_n) , puis de (u_n) .

3.3 Corrigés des exercices

Correction de l'exercice 3.1

1 Si ℓ existe, alors :

$$\ell = \sqrt{5\ell + 10}$$

soit :

$$\ell^2 - 5\ell - 10 = 0.$$

Le discriminant de $\ell^2 - 5\ell - 10$ est :

$$\Delta = 25 + 40 = 65$$

donc l'équation admet deux solutions :

$$\ell' = \frac{5 - \sqrt{65}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad \ell'' = \frac{5 + \sqrt{65}}{2} > 0.$$

u_n est positif (car c'est une racine carrée) donc $\ell \geq 0$.

Par conséquent, $\ell = \frac{5 + \sqrt{65}}{2} \approx 6,53$.

2 • **Initialisation.**

$u_0 = 4 \leq \frac{5 + \sqrt{65}}{2}$. Par conséquent, l'initialisation est faite.

• **Hérédité.**

On suppose que pour un entier naturel k fixé, $u_k \leq \ell$. Alors,

$$\begin{aligned} u_k \leq \ell &\implies 5u_k \leq 5\ell \\ &\implies 5u_k + 10 \leq 5\ell + 10 \\ &\implies \sqrt{5u_k + 10} \leq \sqrt{5\ell + 10} \\ &\implies u_{k+1} \leq \ell \quad (\text{car } \ell = \sqrt{5\ell + 10}) \end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n \leq \ell$.

3 Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{5u_n + 10} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{5u_n + 10} - u_n)(\sqrt{5u_n + 10} + u_n)}{\sqrt{5u_n + 10} + u_n} \\ &= \frac{5u_n + 10 - u_n^2}{\sqrt{5u_n + 10} + u_n} \\ &= -\frac{u_n^2 - 5u_n - 10}{\sqrt{5u_n + 10} + u_n} \end{aligned}$$

D'après la question **1**, $u_n^2 - 5u_n - 10$ se factorise sous la forme :

$$u_n^2 - 5u_n - 10 = (u_n - \ell')(u_n - \ell).$$

Or, nous venons de démontrer à la question **2** que $u_n \leq \ell$ donc $u_n - \ell \leq 0$.

De plus, $\ell' < 0$ et $u_n \geq 0$ donc $u_n - \ell' \geq 0$.

Ainsi,

$$(u_n - \ell')(u_n - \ell) \leq 0,$$

donc :

$$-(u_n - \ell')(u_n - \ell) \geq 0.$$

Or, $\sqrt{5u_n + 10} + u_n \geq 0$ car $u_n \geq 0$, d'où :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Ainsi, (u_n) est strictement croissante.

4 (u_n) est strictement croissante et majorée par ℓ ; par conséquent, elle converge.

D'après le théorème 3.1, elle converge donc vers $\ell = \frac{5 + \sqrt{65}}{2}$.

Correction de l'exercice 3.2

1 La fonction $x \mapsto 1 + x$ est croissante et la fonction $X \mapsto \frac{1}{X}$ est décroissante, donc $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est décroissante sur chaque intervalle de son domaine de définition, donc en particulier sur $] -1 ; +\infty[$.

2 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. La fonction f étant strictement décroissante sur $] -1 ; +\infty[$, on en conclut que pour tout réel $x > -1$, $f(x) > 0$.

3 $f(X)$ existe si $X \neq -1$ donc $f[f(x)]$ existe si $f(x) \neq -1$, ce qui est le cas car d'après la question **2**, $f(x) > 0$ sur $] -1 ; +\infty[$.

Ainsi, $g(x)$ existe sur $] -1 ; +\infty[$.

D'après la propriété 3.1, g est croissante car f est décroissante.

4 (a) g est strictement décroissante donc, pour tout entier naturel n ,

$$g(v_n) < v_n,$$

c'est-à-dire :

$$v_{n+1} < v_n.$$

La suite (v_n) est donc décroissante.

(b) Montrons que $v_n \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ par récurrence.

• **Initialisation.**

$$v_0 = 1 \text{ et } \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \text{ donc } v_0 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

L'initialisation est alors vérifiée.

• **Hérédité.**

Supposons que pour un entier k fixé, $v_k \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

La fonction g étant strictement croissante, cela implique :

$$g(v_k) \geq g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Or,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) &= f\left[f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right] \\ &= f\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) \\ &= f\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{1}{1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\ &= \frac{3+2\sqrt{5}-5}{9-5} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$v_{k+1} \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $v_n \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(c) Nous avons montré que (v_n) était minorée par $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et strictement décroissante.

Par conséquent, elle converge.

Or, (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n) donc (u_n) converge aussi. Sa limite ℓ est telle que $\ell = f(\ell)$ d'après le théorème 3.1.

Or,

$$\begin{aligned} x = f(x) &\iff x = \frac{1}{1+x} \\ &\iff x + x^2 = 1 \\ &\iff x^2 + x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 + x - 1$ est : $\Delta = 5$ donc il admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ (en effet, $u_0 > 0$ et si $u_k > 0$, alors $u_{k+1} = f(u_k) > 0$ d'après la question **1**). Donc $\ell > 0$, donc $\ell \neq x_1$ car $x_1 < 0$.

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

4 — Suites arithmétiques

Nous avons vu dans le chapitre précédent que certaines suites pouvaient être définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Nous allons traiter dans ce chapitre le cas où $f : x \mapsto x + r$, où $r \in \mathbb{R}^*$.

4.1 Définition

Définition 4.1 On dit qu'une suite (u_n) , de premier terme u_0 , est **arithmétique de raison r** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

R On constate que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = r$, donc que la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est cette différence que l'on nomme la « raison » de la suite.

■ **Exemple 4.1** Si $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$. C'est la suite des entiers naturels.

■ **Exemple 4.2** Si $u_0 = -9$ et $u_{n+1} = u_n - 2$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$.

4.2 Variations

Propriété 4.1 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors (u_n) est constante.

D Pour connaître les variations d'une suite, on doit trouver le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n .

Or, dans le cas d'une suite arithmétique,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r.$$

Ainsi,

- Si $r > 0$, la suite est croissante ;
- Si $r < 0$, la suite est décroissante ;
- Si $r = 0$, la suite est constante.



4.3 Formule explicite

Propriété 4.2 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

D On démontre cette propriété par récurrence.

• **Initialisation.**

$u_0 + 0 \times r = u_0$ donc la formule est vraie pour $n = 0$. L'initialisation est alors faite.

• **Hérédité.**

Supposons que pour un entier naturel k fixé, $u_k = u_0 + kr$.

Alors,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + r && \text{(par définition)} \\ &= (u_0 + kr) + r && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_0 + (k+1)r. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.



■ **Exemple 4.3** Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = -2$, alors pour tout entier naturel n , $u_n = 3 - 2n$.

Exercice 4.1 Exprimer en fonction de n le terme général de chacune des suites arithmétiques suivantes de raison r donnée.

1 $u_0 = 5, r = 2.$

3 $u_0 = -1, r = -1.$

2 $u_0 = 10, r = \frac{1}{2}.$

4 $u_0 = -5, r = -\frac{1}{3}.$

Quelques fois, les suites ne commencent pas à u_0 . Par conséquent, nous aurons besoin de la propriété suivante :

Propriété 4.3 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p + (n - p)r.$$

D La démonstration de cette propriété est similaire à la démonstration de la propriété 4.2.



Exercice 4.2 Pour chacune des suites arithmétiques de raison r suivantes, exprimer leur terme général en fonction de n .

1 $u_2 = -1, r = -2.$

3 $u_7 = 7, r = -1.$

2 $u_5 = 3, r = 2.$

4 $u_1 = 0, r = 4.$

À l'aide de la propriété 4.3, connaissant deux termes d'une suite arithmétique, on peut en trouver la raison.

■ **Exemple 4.4** Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et si $u_5 = 6$ et $u_8 = 10$, alors, la propriété 4.3 nous dit (en prenant $n = 8$ et $p = 5$:

$$u_8 = u_5 + (8 - 5)r,$$

soit :

$$10 = 6 + 3r.$$

On en déduit alors que $r = \frac{4}{3}$.

Exercice 4.3 Pour chacune des questions suivantes, (u_n) est une suite arithmétique de raison r . Trouver r .

1 $u_0 = -1$ et $u_8 = -10$.

2 $u_4 = 8$ et $u_8 = 4$.

3 $u_5 = 10$ et $u_{15} = 30$.

4.4 Somme des premiers termes

Propriété 4.4 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \left(u_0 + \frac{n}{2} r \right).$$

D Nous avons :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr) \text{ (d'après la propriété 4.2)} \\ &= (n+1)u_0 + (1+2+3+\cdots+n)r \\ &= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} r \text{ (d'après l'exemple 2.1)} \\ &= (n+1) \left(u_0 + \frac{n}{2} r \right) \text{ (en factorisant par } n+1). \end{aligned}$$

R Il est préférable de retenir cette propriété sous la forme :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (\text{nombre de termes}) \times \left(\text{1er terme} - \frac{\text{dernier indice}}{2} \times \text{raison} \right).$$

Propriété 4.5 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

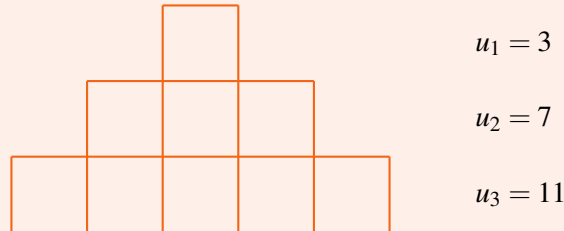
D Nous reprenons le résultat de la propriété 4.4 :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_n &= (n+1) \left(u_0 + \frac{n}{2} r \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{2u_0 + nr}{2} \right) \\ &= (n+1) \times \frac{u_0 + (u_0 + nr)}{2} \\ &= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}. \end{aligned}$$

■ **Exemple 4.5** La suite (u_n) est arithmétique de raison 10 et de premier terme $u_0 = 5$. La somme des 100 premiers termes est :

$$\begin{aligned} u_0 + \cdots + u_{99} &= 100 \times \frac{5 + (5 + 99 \times 10)}{2} \\ &= 100 \times \frac{10 + 990}{2} \\ &= 100 \times 500 \\ &= 50\,000. \end{aligned}$$

Exercice 4.4 Avec des allumettes, on décide de construire une pyramide comme le montre le schéma suivant :



On note u_n le nombre d'allumettes nécessaires pour construire l'étage n .

- 1 Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
- 2 Combien d'allumettes faut-il pour construire une telle pyramide à 100 étages ?

4.5 Corrigés des exercices

Correction de l'exercice 4.1

- 1 $u_0 = 5, r = 2$. Alors, $u_n = 5 + 2r$.
- 2 $u_0 = 10, r = \frac{1}{2}$. Alors, $u_n = 10 + \frac{1}{2}r$.
- 3 $u_0 = -1, r = -1$. Alors, $u_n = -1 - r$.
- 4 $u_0 = -5, r = -\frac{1}{3}$. Alors, $u_n = -5 - \frac{1}{3}r$.

Correction de l'exercice 4.2

- 1 $u_2 = -1, r = -2$. Alors, $u_n = -1 - 2(n - 2) = 3 - 2n$.
- 2 $u_5 = 3, r = 2$. Alors, $u_n = 3 + 2(n - 5) = -7 + 2n$.
- 3 $u_7 = 7, r = -1$. Alors, $u_n = 7 - (n - 7) = 14 - n$.
- 4 $u_1 = 0, r = 4$. Alors, $u_n = 0 + 4(n - 1) = 4n - 4$.

Correction de l'exercice 4.3

1 $u_0 = -1$ et $u_8 = -10$. On a alors :

$$u_8 = u_0 + 8r$$

soit :

$$-10 = -1 + 8r.$$

D'où :

$$r = -\frac{9}{8}.$$

2 $u_4 = 8$ et $u_8 = 4$. On a alors :

$$u_8 = u_4 + (8 - 4)r$$

soit :

$$4 = 8 + 4r.$$

On trouve alors :

$$r = -1.$$

3 $u_5 = 10$ et $u_{15} = 30$. On a alors :

$$u_{15} = u_5 + (15 - 5)r$$

soit :

$$30 = 10 + 10r.$$

On a donc :

$$r = 2.$$

Correction de l'exercice 4.4

1 Pour construire un étage, on voit que l'on doit prendre le nombre d'allumettes de l'étage précédent et ajouter 4 allumettes. Ainsi, $u_{n+1} = u_n + 4$. La suite (u_n) est donc arithmétique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $r = 4$.

2 Pour construire 100 étages, le nombre d'allumettes doit être :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= 100 \times \frac{3 + (3 + 99 \times 4)}{2} \\ &= 100 \times \frac{402}{2} \\ &= 20\,100. \end{aligned}$$

Il faut donc 20 100 allumettes pour construire une telle pyramide à 100 étages.

5 — Suites géométriques

Nous avons vu dans le chapitre 3 que certaines suites pouvaient être définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Nous allons traiter dans ce chapitre le cas où $f : x \mapsto qx$, où $q \in \mathbb{R}^*$.

5.1 Définition

Définition 5.1 On dit qu'une suite (u_n) , de premier terme u_0 , est **géométrique de raison q** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

R On constate que pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, donc que le rapport entre deux termes consécutifs est constant. C'est ce rapport que l'on nomme la « raison » de la suite.

■ **Exemple 5.1** Si $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$, alors (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$. C'est la suite des puissances de 2.

■ **Exemple 5.2** Si $u_0 = -9$ et $u_{n+1} = -3u_n$, alors (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -3$.

5.2 Variations

Propriété 5.1 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme u_0 strictement positif.

- Si $q > 1$, alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante ;
- Si $q = 1$, alors (u_n) est constante.

D Pour connaître les variations d'une suite, on doit trouver le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n .

Or, dans le cas d'une suite géométrique,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = (q - 1)u_n.$$

On peut démontrer par récurrence que $u_n > 0$ (car nous avons pris $u_0 > 0$). Ainsi,

- Si $q > 1$, $(q - 1) > 0$ et donc la suite est croissante ;
- Si $0 < q < 1$, $(q - 1) < 0$ et donc la suite est décroissante ;
- Si $q = 1$, $q - 1 = 0$ et donc $u_{n+1} = u_n$ pour tout entier naturel n ; la suite est alors constante ;
- Si $q < 0$, alors $u_1 = qu_0 < 0$, $u_2 = qu_1 > 0$, etc. On peut montrer par récurrence que si p est pair, $u_p > 0$ et si p est impair, $u_p < 0$ donc la suite n'a pas de sens de variation. ■

R Si on prend $u_0 < 0$, alors la conclusion change :

- Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, alors la suite est décroissante ;
- Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite est croissante.

5.3 Formule explicite

Propriété 5.2 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n.$$

D On démontre cette propriété par récurrence.

• **Initialisation.**

$u_0 \times q^0 = u_0 \times 1 = u_0$ donc la formule est vraie pour $n = 0$. L'initialisation est alors faite.

• **Hérédité.**

Supposons que pour un entier naturel k fixé, $u_k = u_0 \times q^k$.

Alors,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= q \times u_k && \text{(par définition)} \\ &= q \times (u_0 \times q^k) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_0 \times q^{k+1}. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$. ■

■ **Exemple 5.3** Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 1,08$, alors pour tout entier naturel n , $u_n = 3 \times (1,08)^n$.

Exercice 5.1 Exprimer en fonction de n le terme général de chacune des suites géométriques suivantes de raison q donnée.

1 $u_0 = 5, q = 2.$

3 $u_0 = -1, q = -1.$

2 $u_0 = 10, q = \frac{1}{2}.$

4 $u_0 = -5, q = -\frac{1}{3}.$

Quelques fois, les suites ne commencent pas à u_0 . Par conséquent, nous aurons besoin de la propriété suivante :

Propriété 5.3 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

D La démonstration de cette propriété est similaire à la démonstration de la propriété 5.2. ■

Exercice 5.2 Pour chacune des suites géométriques de raison q suivantes, exprimer leur terme général en fonction de n .

1 $u_2 = -1, q = -2.$

3 $u_7 = 7, q = -1.$

2 $u_5 = 3, q = 2.$

4 $u_1 = 4, q = 4.$

À l'aide de la propriété 5.3, connaissant deux termes d'une suite arithmétique, on peut en trouver la raison si $n - p = 2$.

■ **Exemple 5.4** Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et si $u_5 = 6$ et $u_7 = 10$, alors, la propriété 5.3 nous dit (en prenant $n = 7$ et $p = 5$) :

$$u_7 = u_5 \times q^{7-5},$$

soit :

$$10 = 6 \times q^2.$$

On en déduit alors que $q^2 = \frac{5}{3}$, soit $q = \sqrt{\frac{5}{3}}$ ou $q = -\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Exercice 5.3 Pour chacune des questions suivantes, (u_n) est une suite arithmétique de raison q . Trouver q .

1 $u_0 = -1$ et $u_2 = -10.$

2 $u_4 = 8$ et $u_6 = 4.$

3 $u_5 = 10$ et $u_7 = 30.$

5.4 Somme des premiers termes

Propriété 5.4 Soit un réel q différent de 1. Alors,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

D Posons :

$$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

Alors,

$$qS = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}.$$

Ainsi,

$$qS = S - 1 + q^{n+1},$$

d'où :

$$(q - 1)S = q^{n+1} - 1.$$

Par conséquent, puisque $q - 1 \neq 0$, on a :

$$S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

■

Propriété 5.5 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \begin{cases} (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

D Nous avons :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 + (u_0 \times q) + (u_0 \times q^2) + \cdots + (u_0 \times q^n) \text{ (d'après la propriété 5.2)}$$

$$= u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$$

Si $q = 1$, alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$.

Si $q \neq 1$, on se sert de la propriété 5.4 et on obtient :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

■

R Il est préférable de retenir cette propriété sous la forme :

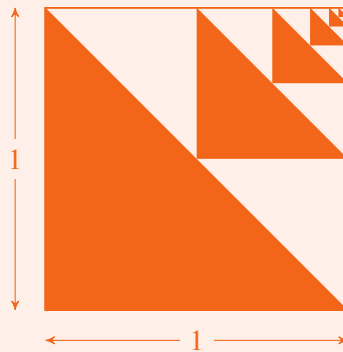
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

■ **Exemple 5.5** La suite (u_n) est géométrique de raison 10 et de premier terme $u_0 = 5$. La somme des 100 premiers termes est :

$$u_0 + \cdots + u_{99} = 100 \times \frac{1 - 10^{100}}{1 - 100}$$

$$= \frac{100}{99} \times (10^{100} - 1).$$

Exercice 5.4 — Extrait du livre « Ainsi de suite » (Stéphane PASQUET).



Sachant qu'il y a une infinité de triangles coloriés, calculer l'aire de la surface totale qu'ils occupent.

5.5 Limite d'une suite géométrique

Propriété 5.6 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 strictement positif.

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$;

- Si $q < -1$, alors (u_n) est divergente.

■ **Exemple 5.6** Si (u_n) est telle que $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

■ **Exemple 5.7** Si (u_n) est telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

5.6 Corrigés des exercices

Correction de l'exercice 5.1

1 $u_0 = 5, q = 2$. Alors, $u_n = 5 \times 2^n$.

2 $u_0 = 10, q = \frac{1}{2}$. Alors, $u_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{10}{2^n}$.

3 $u_0 = -1, q = -1$. Alors, $u_n = -1 \times (-1)^n = (-1)^{n+1}$.

4 $u_0 = -5, q = -\frac{1}{3}$. Alors, $u_n = -5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5 \times (-1)^{n+1}}{3^n}$.

Correction de l'exercice 5.2

1 $u_2 = -1, q = -2$. Alors, $u_n = -1 \times (-2)^{n-2} = -(-2)^{n-2}$.

2 $u_5 = 3, q = 2$. Alors, $u_n = 3 \times 2^{n-5}$.

3 $u_7 = 7, q = -1$. Alors, $u_n = 7 \times (-1)^{n-7}$.

4 $u_1 = 4, q = 4$. Alors, $u_n = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$.

Correction de l'exercice 5.3

1 $u_0 = -1$ et $u_2 = -10$. On a alors :

$$u_2 = u_0 \times q^{2-0}$$

soit :

$$-10 = -1 \times q^2.$$

D'où :

$$q^2 = 10.$$

Ainsi, $q = \sqrt{10}$ ou $q = -\sqrt{10}$.

2 $u_4 = 8$ et $u_6 = 4$. On a alors :

$$u_6 = u_4 \times q^{6-4}$$

soit :

$$4 = 8 \times q^2.$$

D'où

$$q^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } q = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } q = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (car } \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

3 $u_5 = 10$ et $u_7 = 30$. On a alors :

$$u_7 = u_5 \times q^{7-5}$$

soit :

$$30 = 10 \times q^2.$$

On a donc :

$$q^2 = 3.$$

$$\text{Ainsi, } q = \sqrt{3} \text{ ou } q = -\sqrt{3}.$$

Correction de l'exercice 5.4

Le premier triangle (le plus grand) a pour côté 1 ; son aire est donc égale à $\frac{1}{2}$.

Le second triangle a pour côté $\frac{1}{2}$; son aire est donc égale à $\frac{1}{8}$.

Le troisième triangle a pour côté $\frac{1}{4}$; son aire est donc égale à $\frac{1}{32}$.

La surface totale $\mathcal{S}$ est donc la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique (celle de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{4}$). D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

La surface totale est donc égale à $\frac{2}{3}$.

6 — Suites arithmético-géométriques

R Ces suites sont au programme des cours de Terminale ES mais pas de Terminale S. Cependant, en Terminale S, on les aborde dans des exercices.

6.1 Définition

Définition 6.1 On dit qu'une suite (u_n) est arithmético-géométrique si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b, \quad a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0.$$

■ **Exemple 6.1** La suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est une suite arithmético-géométrique.

6.2 Étude d'une suite arithmético-géométrique

Méthode 6.1 Pour étudier une suite arithmético-géométrique, on considère toujours une suite (dite *suite auxiliaire*) qui se trouve être géométrique.

■ **Exemple 6.2** Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 4.$$

Alors, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 2 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 4) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

De plus, d'après la propriété 5.6, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$.

Or, $v_n = u_n - 4$ donc $u_n = v_n + 4$. Ainsi, nous pouvons dire :

- d'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n + 4 = 4$;
- d'autre part, $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \underbrace{-3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{=v_n} + 4.$$

R En général, on donnera toujours la suite (v_n) , mais il est assez facile de la trouver car elle est toujours définie par la relation :

$$v_n = u_n - k \quad , \quad \text{avec } k = \frac{b}{1-a}.$$

Exercice 6.1 — Inspiré d'un sujet de baccalauréat, série ES. Dans une réserve, on a constaté une diminution annuelle constante de 10 % de l'effectif des cabris. Au 1^{er} janvier 2014, il y avait 30 000 cabris.

Pour sauvegarder l'espèce, on décide d'introduire chaque année 1 000 cabris.

On pose pour tout entier naturel n ,

- u_n le nombre de cabris au 1^{er} janvier de l'année 2014 + n ;
- $v_n = u_n - 10\,000$.

- 1 Expliquer pourquoi $u_{n+1} = 0,9u_n + 1\,000$.
- 2 Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 3 Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .
- 4 Calculer la limite de (u_n) .

Correction de l'exercice 6.1

- 1 D'une année à l'autre, il disparaît 10 % de cabris ; il en reste donc 90 %. Donc pour passer de u_n à u_{n+1} , on multiplie par 0,9. Mais à cela, on ajoute ensuite 1 000 cabris,

donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 1\,000$.

2 Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10\,000 \\ &= 0,9u_n + 1\,000 - 10\,000 \\ &= 0,9u_n - 9\,000 \\ &= 0,9\left(u_n - \frac{9\,000}{0,9}\right) \\ &= 0,9(u_n - 10\,000) \\ &= 0,9v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$.

Son premier terme est : $v_0 = u_0 - 10\,000 = 30\,000 - 10\,000 = 20\,000$.

3 De la question précédente, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times q^n = 20\,000 \times (0,9)^n.$$

Or,

$$v_n = u_n - 10\,000$$

donc :

$$u_n = v_n + 10\,000.$$

Ainsi,

$$u_n = 20\,000 \times (0,9)^n + 10\,000.$$

4 On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ car $0 < 0,9 < 1$, et $u_n = v_n + 10\,000$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n + 10\,000 = 10\,000.$$

 L'étude de telles suites suit toujours le même schéma. Il est donc important de refaire cet exercice au moins 5 fois pour s'imprégner de la méthode utilisée.

Définition

Étude d'une suite arithmético-géométrique

Pour aller plus loin ... (hors programme de lycée)

Corrigés des exercices

7 — Suites homographiques

R Ces suites ne sont pas explicitement au programme de Terminale ES et S. Cependant, en Terminale S, on les aborde dans des exercices.

7.1 Définition

Définition 7.1 On dit qu'une suite (u_n) est homographique si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}, \quad a \neq 0, c \neq 0.$$

■ **Exemple 7.1** La suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{-u_n + 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est une suite homographique.

7.2 Étude d'une suite arithmético-géométrique

Méthode 7.1 Pour étudier une suite homographique, on considère toujours une suite (dite *suite auxiliaire*) qui se trouve être arithmétique ou géométrique (selon les valeurs de a , b , c et d).

■ **Exemple 7.2** Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Afin de vérifier que (u_n) existe, il faut s'assurer que pour tout entier naturel n , $u_n > \frac{1}{2}$. On peut le faire par récurrence en remarquant que $u_n = 1 + \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.

- On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{u_n - 1}.$$

Alors, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} - 1} \\ &= \frac{2u_n - 1}{3u_n - 2 - (2u_n - 1)} \\ &= \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} \quad \left(= \frac{2(u_n - 1) + 1}{u_n - 1} \right) \\ &= 2 + \frac{1}{u_n - 1} \\ &= 2 + v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = 1$.

On en conclut alors que $v_n = 1 + 2n$. Or, de l'égalité $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$, on déduit que $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$ et donc : $u_n = 1 + \frac{1}{1 + 2n}$.

- Avec l'expression de u_n en fonction de n , on peut déterminer la limite de la suite. En effet,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 2n) = +\infty,$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 2n} = 0, \quad \text{soit :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1 + 2n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 7.1 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2$.

On pourra d'abord vérifier que $u_{n+1} = 2 - \frac{u_n - 2}{u_n - 3}$.

- 2** On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$.

- (a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
- (b) Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .
- (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

■ **Exemple 7.3** On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- On s'assure, dans un premier temps, que (u_n) existe en montrant par récurrence que $u_n \geq 0$ (par exemple).
- On pose alors $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$ pour tout entier naturel n . Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} \\ &= \frac{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} - 2}{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} + 3} \\ &= \frac{u_n + 6 - 2u_n - 4}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{u_n + 6 + 3u_n + 6} \\ &= \frac{-u_n + 2}{4u_n + 12} \\ &= -\frac{1}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 3} \\ &= -\frac{1}{4} v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et de premier terme :

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = -\frac{1}{4}.$$

Donc,

$$v_n = -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

- $0 < q < 1$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - 2}{u_n + 3} = 0.$$

Cela signifie alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 2) = 0,$$

soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Exercice 7.2 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 12}{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1 Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$. En déduire que (u_n) existe bien.
- 2 On pose $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 4}$ pour tout entier naturel n .
 - (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - (b) Montrer alors que (u_n) converge et donner sa limite.

7.3 Pour aller plus loin ... (hors programme de lycée)

Nous l'avons vu à travers les deux exemples précédents, il y a des cas qui se ramènent à des suites arithmétiques et d'autres à des suites géométriques. Mais les suites auxiliaires ne se trouvent pas au hasard ...

Définition 7.2 Soit (u_n) une suite définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

On appelle *polynôme caractéristique* de (u_n) le polynôme défini par :

$$\chi(x) = cx^2 + (d - a)x - b.$$

R Ce polynôme est obtenu à partir l'équation :

$$x = \frac{ax + b}{cx + d},$$

qui devient :

$$x(cx + d) = ax + b$$

puis :

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

Le polynôme caractéristique est le membre de gauche de l'équation.

Propriété 7.1 — Choix de la suite auxiliaire.

- Si $\chi(x)$ admet deux racines distinctes α et β , alors la suite auxiliaire sera géométrique et définie par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}, \quad \text{avec} \quad 0 < \left| \frac{a - c\alpha}{a - c\beta} \right| < 1.$$

- Si $\chi(x)$ admet une racine double α , alors la suite auxiliaire sera arithmétique et définie par la relation :

$$v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}.$$

- Si $\chi(x)$ n'admet aucune racine réelle, alors la suite (u_n) diverge.

Bien entendu, je ne vais pas démontrer cette propriété, qui est présente ici uniquement pour inciter les élèves curieux à approfondir le sujet.

7.4 Corrigés des exercices

Correction de l'exercice 7.1

1 Montrons par récurrence que $u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .

- **Initialisation.**

$u_0 = 1 \leq 2$ donc l'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier naturel k fixé, $u_k \leq 2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{u_k - 4}{u_k - 3} \\ &= \frac{2(u_k - 3) - u_k + 2}{u_k - 3} \\ &= 2 - \frac{u_k - 2}{u_k - 3}. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$u_k - 2 \leq 0$$

et donc

$$u_k - 3 \leq 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{u_k - 2}{u_k - 3} \geq 0.$$

On en déduit donc que :

$$-\frac{u_k - 2}{u_k - 3} \leq 0$$

et donc que :

$$u_{k+1} = 2 - \frac{u_k - 2}{u_k - 3} \leq 2.$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2$, ce qui implique que la suite (u_n) est bien définie (car $u_n \neq 3$ quel que soit l'entier naturel n).

$$\begin{aligned} \text{2 (a)} \quad v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 2} \\ &= \frac{1}{\frac{u_n - 4}{u_n - 3} - 2} \\ &= \frac{u_n - 3}{u_n - 4 - 2(u_n - 3)} \\ &= \frac{u_n - 3}{-u_n + 2} \\ &= \frac{-u_n + 3}{u_n - 2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-(u_n - 2) + 1}{u_n - 2}$$

$$= -1 + \frac{1}{u_n - 2}$$

$$= -1 + v_n.$$

Ainsi, (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{1}{-1} = -1.$$

(b) De la question précédente, on déduit que :

$$v_n = -1 - n,$$

et donc :

$$u_n = 2 + \frac{1}{v_n} = 2 - \frac{1}{1 + n}.$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n) = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + n} = 0.$$

$$\text{Par conséquent, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Correction de l'exercice 7.2

1 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

- **Initialisation.**

$u_0 = 2 \geq 0$ donc l'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier naturel k fixé, $u_k \geq 0$.

Alors, $u_k + 12 \geq 0$ et $u_k + 2 \geq 0$, ce qui implique que $u_{k+1} = \frac{u_k + 12}{u_k + 2} \geq 0$.

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$, ce qui assure le fait que $u_n \neq -2$ et donc que la suite (u_n) existe bien.

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \quad (a) \quad v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 4} \\ &= \frac{\frac{u_n + 12}{u_n + 2} - 3}{\frac{u_n + 12}{u_n + 2} + 4} \\ &= \frac{u_n + 12 - 3(u_n + 2)}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{u_n + 12 + 4(u_n + 2)} \\ &= \frac{-2u_n + 6}{5u_n + 20} \\ &= -\frac{2}{5} \times \frac{u_n - 3}{u_n + 4} \\ &= -\frac{2}{5} v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{5}$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 + 4} = \frac{-1}{6}.$$

(b) $0 < q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - 3}{u_n + 4} = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 3) = 0$.

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3.$$

8 — Suites imbriquées linéairement

R Ces suites ne sont pas explicitement au programme de Terminale ES et S. Cependant, en Terminale S, on peut les rencontrer dans certains exercices.

8.1 Définition

Définition 8.1 On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont imbriquées si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

■ **Exemple 8.1** On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 5$ et $v_0 = 1$ et par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ v_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \end{cases}$$

Ici, $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{3}{4}$ et $d = \frac{1}{4}$.

8.2 Résolution

Méthode 8.1 Pour trouver l'expression de deux suites imbriquées (u_n) et (v_n) , on considère deux suites auxiliaires (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} a_n = \alpha u_n + \beta v_n \\ b_n = \gamma u_n + \delta v_n \end{cases}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$$

de sorte que l'une soit constante et l'autre géométrique.

■ **Exemple 8.2** Reprenons l'exemple 8.1 et posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n = u_n + v_n \\ b_n = u_n - v_n \end{cases}$$

• **Montrons que (a_n) est constante.**

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= \frac{u_n + 3v_n}{4} + \frac{3u_n + v_n}{4} \\ &= \frac{4u_n + 4v_n}{4} \\ &= u_n + v_n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

La suite (a_n) est donc bien constante.

On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a_0 = u_0 + v_0 = 6.$$

• **Montrons que (b_n) est géométrique.**

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{3u_n + v_n}{4} \\ &= \frac{-2u_n + 2v_n}{4} \\ &= -\frac{1}{2}(u_n - v_n) \\ &= -\frac{1}{2}b_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (b_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $b_0 = u_0 - v_0$, soit $b_0 = 4$.

On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 4 \left(-\frac{1}{2} \right)^n.$$

• **Conclusion.**

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n = u_n + v_n = 6 \\ b_n = u_n - v_n = 4 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \end{cases}$$

► En ajoutant les deux égalités, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_n = 6 + 4 \left(-\frac{1}{2} \right)^n,$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n.$$

► En soustrayant la 1^{re} égalité à la deuxième, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2v_n = 6 - 4 \left(-\frac{1}{2} \right)^n,$$

soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 3 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n.}$$

R On donnera toujours dans un énoncé de devoir surveillé les suites auxiliaires.

Exercice 8.1 On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases}.$$

- 1** On pose, pour tout entier naturel n , $a_n = u_n + v_n$.
Montrer que (a_n) est une suite constante, dont on donnera la valeur.
- 2** On pose, pour tout entier naturel n , $b_n = u_n - 2v_n$.
Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 3** En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n .

8.3 Pour aller plus loin ... (hors programme)

Si vous prenez au hasard a , b , c et d , vous allez avoir quelques problèmes, et pour cause ! Cette méthode ne fonctionne pas pour toutes les suites imbriquées linéairement.

En effet, si on pose $a_n = \alpha u_n + \beta v_n$, alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha(au_n + bv_n) + \beta(cu_n + dv_n) \\ &= (a\alpha + c\beta)u_n + (b\alpha + d\beta)v_n. \end{aligned}$$

Si l'on veut que (a_n) soit constante ou géométrique, il faut alors que :

$$\begin{cases} a\alpha + c\beta = k\alpha \\ b\alpha + d\beta = k\beta \end{cases}$$

où $k = 1$ si on veut qu'elle soit constante et $k \neq 1$ sinon.

On a alors :

$$\begin{cases} (a-k)\alpha = -c\beta \\ (b-k)\alpha = -d\beta \end{cases}$$

Ainsi, il y a des conditions sur a , b , c et d , et si ces conditions ne sont pas remplies, aucune chance pour que (a_n) soit constante ou géométrique.

8.4 Corrigé de l'exercice

Correction de l'exercice 8.1

1 Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= -u_n + 4v_n + 2u_n - 3v_n \\ &= u_n + v_n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

La suite (a_n) est donc constante et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a_0 = u_0 + v_0 = 5 + (-2) = 3.$$

2 Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= u_{n+1} - 2v_{n+1} \\ &= -u_n + 4v_n - 2(2u_n - 3v_n) \\ &= -u_n + 4v_n - 4u_n + 6v_n \\ &= -5u_n + 10v_n \\ &= -5(u_n - 2v_n) \\ &= -5b_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (b_n) est géométrique de raison $q = -5$ et de premier terme $b_0 = u_0 - 2v_0 = 5 + 4 = 9$.

3 On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} (L_1) & a_n = u_n + v_n = 3 \\ (L_2) & b_n = u_n - 2v_n = 9 \times (-5)^n \end{cases}$$

- En faisant $(L_2) + 2(L_1)$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3u_n = 9 \times (-5)^n + 6,$$

soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 + 3 \times (-5)^n.}$$

- En faisant $(L_1) - (L_2)$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3v_n = 3 - 9 \times (-5)^n,$$

soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1 - 3(-5)^n.}$$

9 — Suites diverses

R Ces suites ne sont pas explicitement au programme de Terminale ES et S. Cependant, on peut les rencontrer dans certains exercices (il y a plus de chance de les voir en Terminale S qu'en ES).

9.1 Suites de la forme $u_{n+1} = u_n + an + b$

Par la suite, on notera $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure de x (par exemple, $\lceil \pi \rceil = 4$).

D'un premier coup d'œil, on remarque que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = an + b.$$

Ainsi,

- si $a > 0$ et $-\frac{b}{a} > 0$, $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante à partir de $n = \left\lceil -\frac{b}{a} \right\rceil$ (car $x \mapsto ax + b$ est une fonction croissante et positive à partir de $x = -\frac{b}{a}$).

Si $-\frac{b}{a} < 0$, $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante à partir de $n = 0$.

- si $a < 0$ et $-\frac{b}{a} > 0$, $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante à partir de $n = \left\lceil -\frac{b}{a} \right\rceil$ (car $x \mapsto ax + b$ est une fonction décroissante et négative à partir de $x = -\frac{b}{a}$).

Si $-\frac{b}{a} < 0$, $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante à partir de $n = 0$.

En regardant la relation qui définit la suite, on peut très vite supposer que sa limite sera infinie. Nous allons donc directement nous intéresser à l'expression de son terme général en fonction de n . Pour cela, on part de l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = an + b,$$

que l'on peut aussi voir comme ceci :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} - u_k = ak + b.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^n (ak + b).$$

Je rappelle ici que :

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = (u_{0+1} - u_0) + (u_{1+1} - u_1) + (u_{2+1} - u_2) + \cdots + (u_{(n-1)+1} - u_{n-1}) + (u_{n+1} - u_n)$$

et donc :

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (ak + b) &= (a \times 0 + b) + (a \times 1 + b) + (a \times 2 + b) + \cdots + (a \times n + b) \\ &= a(0 + 1 + 2 + \cdots + n) + \underbrace{b + b + b + \cdots + b}_{(n+1) \text{ fois}} \\ &= \frac{an(n+1)}{2} + b(n+1) \\ &= (n+1) \left(\frac{an}{2} + b \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_0 = (n+1) \left(\frac{an}{2} + b \right),$$

soit :

$$u_{n+1} = (n+1) \left(\frac{an}{2} + b \right) + u_0,$$

ou encore :

$$u_n = n \left(\frac{a(n-1)}{2} + b \right) + u_0.$$

En écrivant le terme sous la forme d'un polynôme du second degré, on obtient :

$$u_n = \frac{a}{2}n^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)n + u_0.$$



On pourrait généraliser cette méthode aux suites définies par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + P(n),$$

où P est un polynôme de degré p .

À l'aide de ce que l'on appelle les *polynômes de Bernoulli*, on démontrerait que u_n est un polynôme de degré $p+1$. Mais ceci dépasse allègrement le niveau du lycée ...

Exercice 9.1 On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 2n + 3 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
 Exprimer u_n en fonction de n .

9.2 Suites imbriquées

Nous avons parlé des suites imbriquées linéairement dans le chapitre précédent, mais il existe de multiples façons de construire des suites imbriquées.

Un des exemples les plus répandus est celui des suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$$

Exercice 9.2 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies précédemment.

- 1** (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
 (b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 \geq 0$, puis conclure que $u_n \geq v_n$.
- 2** Montrer alors que (u_n) est décroissante.
- 3** Montrer ensuite que (u_n) est croissante.
- 4** Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.
- 5** Montrer alors que les deux suites ont la même limite.

9.3 Corrigés des exercices

Correction de l'exercice 9.1

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 2n + 3 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} - u_k = -2k + 3,$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^n (-2k + 3),$$

ou :

$$u_{n+1} - u_0 = -2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1).$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = -2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) + u_0,$$

et donc :

$$u_n = -n(n-1) + 3n + 2,$$

puis finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -n^2 + 4n + 2.}$$

Correction de l'exercice 9.2

1 (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

• **Initialisation.**

$u_0 = 5 \geq 0$ et $v_0 = 3 \geq 0$ donc l'initialisation est vérifiée.

• **Hérédité.**

Supposons que pour un entier naturel k fixé, $u_k \geq 0$ et $v_k \geq 0$.

Alors, $u_{k+1} = \frac{u_k + v_k}{2} \geq 0$ comme moyenne de deux nombres positifs ou nuls, et $u_k v_k \geq 0$ comme produit de deux nombres positifs ou nuls, donc $v_{k+1} = \sqrt{u_k v_k}$ existe et est positif ou nul.

Ainsi, l'hérédité est démontrée.

Par conséquent, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

(b) Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 &= \left(\frac{u_n + v_n}{2} \right)^2 - (\sqrt{u_n v_n})^2 \\ &= \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4} - u_n v_n \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{4} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{4} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1}^2 \geq v_{n+1}^2$, donc $u_{n+1} \geq v_{n+1}$ car d'après la question précédente, $u_{n+1} \geq 0$ et $v_{n+1} \geq 0$.

Ce qui est vrai au rang $n+1$ est vrai au rang n donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq v_n.}$$

2 Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n}{2} \\ &= \frac{v_n - u_n}{2}. \end{aligned}$$

Or, $u_n \geq v_n$ donc $v_n - u_n \leq 0$, ce qui prouve que (u_n) est décroissante.

3 Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 - v_n^2 &= u_n v_n - v_n^2 \\ &= v_n(u_n - v_n). \end{aligned}$$

Or, $u_n - v_n \geq 0$ d'après la question 1 (b) et $v_n \geq 0$ d'après la question 1 (a).

Ainsi, $v_{n+1}^2 \geq v_n^2$, soit $v_{n+1} \geq v_n$ car $v_n \geq 0$ pour tout entier naturel n .

La suite (v_n) est ainsi croissante.

4 Nous avons vu que pour tout entier naturel n , $u_n \geq v_n$, donc en particulier, $u_n \geq v_0$.

Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

De même, (v_n) est croissante et majorée (par u_0 car $v_n \leq u_0$), donc elle converge aussi.

5 Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

De la relation $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n}{2},$$

soit :

$$\ell = \frac{\ell + \ell'}{2},$$

ou encore :

$$2\ell = \ell + \ell',$$

soit finalement :

$$\ell = \ell'.$$

 La limite commune aux deux suites est appelée la *moyenne arithmético-géométrique* de u_0 et v_0 . À l'aide d'un tableur, on peut donner une approximation de cette limite :

$$\ell \approx 3,936\,235\,503\,6.$$

10 — Un peu de recherche

R Ce chapitre est destiné aux passionné(e)s des suites.

Nous avons vu jusqu'à présent quelques types de suites connues du monde mathématique. Mais qu'advient-il lorsque nous avons une suite qui ne rentre pas dans les types connus ?

À travers un exemple, nous allons voir une démarche plutôt classique pour étudier une suite.

10.1 Une suite non connue

Nous allons considérer la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \lambda u_n + P(n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et où P est un polynôme de degré quelconque.

A priori, cette suite n'est pas une suite dont on connaît immédiatement les variations ni l'expression de son terme général en fonction de n .

Avant de s'intéresser aux variations, nous allons trouver une expression de u_n en fonction de n . En effet, les variations de (u_n) sont difficilement concevables à l'aide de la seule relation de récurrence donnée.

10.2 À la recherche du terme général

Une méthode efficace est de calculer les 1^{er} termes successifs de (u_n) en gardant tout en fonction de u_0 de sorte à mettre en relief une formule.

$$u_1 = \lambda u_0 + P(0)$$

$$u_2 = \lambda u_1 + P(1) = \lambda [\lambda u_0 + P(0)] + P(1) = \lambda^2 u_0 + \lambda P(0) + P(1)$$

$$u_3 = \lambda u_2 + P(2) = \lambda [\lambda^2 u_0 + \lambda P(0) + P(1)] + P(2) = \lambda^3 u_0 + \lambda^2 P(0) + \lambda P(1) + P(2)$$

$$u_4 = \lambda u_3 + P(3) = \lambda [\lambda^3 u_0 + \lambda^2 P(0) + \lambda P(1) + P(2)] + P(3) = \lambda^4 u_0 + \lambda^3 P(0) + \lambda^2 P(1) + \lambda P(2) + P(3)$$

On voit alors se dessiner la formule. On peut conjecturer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \lambda^n u_0 + \lambda^{n-1} P(0) + \lambda^{n-2} P(1) + \cdots + \lambda P(n-2) + P(n-1),$$

que l'on peut écrire :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \lambda^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} P(k).$$

Bien entendu, cette formule doit être démontrée (par récurrence) :

- **Initialisation.**

$$\lambda^1 u_0 + \sum_{k=0}^0 \lambda^{1-0-1} P(0) = \lambda u_0 + P(0) = u_1, \text{ donc l'initialisation est vérifiée.}$$

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier relatif p , la formule soit vraie, c'est-à-dire que :

$$u_p = \lambda^p u_0 + \sum_{k=0}^{p-1} \lambda^{p-k-1} P(k).$$

Alors,

$$\begin{aligned} u_{p+1} &= \lambda u_p + P(p) \\ &= \lambda \left[\lambda^p u_0 + \sum_{k=0}^{p-1} \lambda^{p-k-1} P(k) \right] + P(p) \\ &= \lambda^{p+1} u_0 + \lambda \sum_{k=0}^{p-1} \lambda^{p-k-1} P(k) + P(p) \\ &= \lambda^{p+1} u_0 + \sum_{k=0}^{p-1} \lambda \times \lambda^{p-k-1} P(k) + P(p) \\ &= \lambda^{p+1} u_0 + \sum_{k=0}^{p-1} \lambda^{p-k} P(k) + P(p) \\ &= \lambda^{p+1} u_0 + \left(\lambda^p P(0) + \lambda^{p-1} P(1) + \cdots + \lambda^{p-(p-1)} P(p-1) \right) + P(p) \\ &= \lambda^{p+1} u_0 + \left(\lambda^p P(0) + \lambda^{p-1} P(1) + \cdots + \lambda P(p-1) + P(p) \right) \\ &= \lambda^{p+1} u_0 + \sum_{k=0}^p \lambda^{p-k} P(k) \\ &= \lambda^{p+1} u_0 + \sum_{k=0}^{p+1-1} \lambda^{p+1-k-1} P(k). \end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

La formule est ainsi vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

10.3 Avec un exemple de polynôme

Dans cette section, voyons ce que donne la formule précédente lorsque $P(n) = an + b$:

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1, \quad u_n &= \lambda^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} P(k) \\
&= \lambda^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} (ak + b) \\
&= \lambda^n u_0 + a \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} k + b \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1}.
\end{aligned}$$

Intéressons-nous à la somme :

$$\begin{aligned}
S(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n-1} k \lambda^{n-k-1} \\
&= \lambda^{n-2} + 2\lambda^{n-3} + \dots + (n-2)\lambda + (n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \lambda^{k-n+1}.
\end{aligned}$$

Considérons alors la fonction f définie par :

$$f_k(x) = x^{n-k}.$$

Alors,

$$f'_k(x) = (n-k)x^{n-k-1}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\forall x \neq 1, \quad \sum_{k=1}^{n-1} f(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k} \\
&= x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x \\
&= x(1 + x + \dots + x^{n-2}) \\
&= x \times \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall x \neq 1, \quad \left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) \right)' &= \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} + x \times \frac{-(n-1)x^{n-2}(1-x) - (-1)(1-x^{n-1})}{(1-x)^2} \\
\sum_{k=1}^{n-1} f'_k(x) &= \frac{(1 - x^{n-1}) + (1-n)x^{n-1}(1-x) + x(1 - x^{n-1})}{(1-x)^3} \\
\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)x^{n-k-1} &= \frac{(1 - x^{n-1})(1+x) + (1-n)x^{n-1}(1-x)}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

En prenant $x = \lambda^{-1}$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) (\lambda^{-1})^{n-k-1} = \frac{(1 - (\lambda^{-1})^{n-1})(1 + \lambda^{-1}) + (1-n)(\lambda^{-1})^{n-1}(1 - \lambda^{-1})}{(1 - \lambda^{-1})^3}$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \lambda^{-n+k+1} = \frac{(1 - \lambda^{-n+1})(1 + \lambda^{-1}) + (1-n)\lambda^{-n+1}(1 - \lambda^{-1})}{(1 - \lambda^{-1})^3}.$$

Donc :

$$S(\lambda) = \frac{(1 - \lambda^{-n+1})(1 + \lambda^{-1}) + (1 - n)\lambda^{-n+1}(1 - \lambda^{-1})}{(1 - \lambda^{-1})^3}.$$

Posons maintenant :

$$\begin{aligned} s(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} \\ &= \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 \\ &= \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \quad (\lambda \neq 1) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \lambda^n u_0 + \frac{(1 - \lambda^{1-n})(1 + \lambda^{-1}) + (1 - n)\lambda^{1-n}(1 - \lambda^{-1})}{(1 - \lambda^{-1})^3} a + \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} b.$$

10.4 Calcul de la limite

Reprenons la formule trouvée précédemment et considérons deux cas :

- $0 < \lambda < 1$.

Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^{1-n} = +\infty$.

Si on développe le numérateur du terme central, on obtient :

$$\lambda^{1-n} [-1 - \lambda^{-1} + (1 - n)(1 - \lambda^{-1})] + 1 + \lambda^{-1},$$

où $1 - \lambda^{-1} < 0$.

On a :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n)(1 - \lambda^{-1}) &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^{1-n} &= +\infty \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda^{1-n} [-1 - \lambda^{-1} + (1 - n)(1 - \lambda^{-1})] + 1 + \lambda^{-1}) = +\infty.$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 - \lambda}$.

Ainsi, si on fait le bilan,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty.$$

(le signe dépend de celui de a)

- $\lambda > 1$.

Ici, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = +\infty$. Quant au terme central, il tend vers une constante : $\frac{1 + \lambda^{-1}}{(1 - \lambda^{-1})^3} a$. Le

troisième terme, lui, tend vers un infini (dont le signe dépend de b).

Ainsi, à l'infini, on peut considérer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda^n \left(u_0 - \frac{b}{1 - \lambda} \right).$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty.$$

Dans un cas comme dans l'autre, (u_n) diverge.