



Table des matières

1	Première approche	7
1.1	Qu'est-ce qu'une suite numérique ?	7
1.2	Un peu de vocabulaire	7
1.3	Comment définir une suite numérique ?	8
1.3.1	Définir une suite de manière explicite	8
1.3.2	Définir une suite par récurrence	8
1.3.3	Génération des termes d'une suite définie par récurrence	9
1.4	Variations d'une suite définie par récurrence	10
1.5	Majoration et minoration d'une suite	11
1.6	Convergence et divergence des suites	12
1.7	Corrigés des exercices	13
2	Raisonnement par récurrence	15
2.1	Le principe de récurrence	15
2.2	Démontrer une minoration ou une majoration	16
2.3	Corrigés des exercices	18
3	Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$	23
3.1	Limite d'une suite	23
3.2	Étude problématique (hors programme de Terminale)	24
3.3	Corrigés des exercices	27

4	Suites arithmétiques	31
4.1	Définition	31
4.2	Variations	31
4.3	Formule explicite	32
4.4	Somme des premiers termes	33
4.5	Corrigés des exercices	34
5	Suites géométriques	37
5.1	Définition	37
5.2	Variations	37
5.3	Formule explicite	38
5.4	Somme des premiers termes	39
5.5	Limite d'une suite géométrique	40
5.6	Corrigés des exercices	41
6	Suites arithmético-géométriques	43
6.1	Définition	43
6.2	Étude d'une suite arithmético-géométrique	43
7	Suites homographiques	47
7.1	Définition	47
7.2	Étude d'une suite arithmético-géométrique	47
7.3	Pour aller plus loin ... (hors programme de lycée)	50
7.4	Corrigés des exercices	51
8	Suites imbriquées linéairement	55
8.1	Définition	55
8.2	Résolution	55
8.3	Pour aller plus loin ... (hors programme)	57
8.4	Corrigé de l'exercice	58
9	Suites diverses	59
9.1	Suites de la forme $u_{n+1} = u_n + an + b$	59
9.2	Suites imbriquées	61
9.3	Corrigés des exercices	61

10	Un peu de recherche	65
10.1	Une suite non connue	65
10.2	À la recherche du terme général	65
10.3	Avec un exemple de polynôme	66
10.4	Calcul de la limite	68

Qu'est-ce qu'une suite numérique ?

Un peu de vocabulaire

Comment définir une suite numérique ?

Définir une suite de manière explicite

Définir une suite par récurrence

Génération des termes d'une suite définie par récurrence

Variations d'une suite définie par récurrence

Majoration et minoration d'une suite

Convergence et divergence des suites

Corrigés des exercices

1 — Première approche

1.1 Qu'est-ce qu'une suite numérique ?

Définition 1.1 Une suite numérique est une fonction à variables réelles, que l'on peut noter :

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u_n$$

■ **Exemple 1.1** Les nombres pairs constituent une suite numérique que l'on peut définir par :

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto 2n$$

On aura alors : $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, u_4 = 8, \dots$

■ **Exemple 1.2** Les carrés parfaits constituent une suite numérique que l'on peut définir par :

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n^2$$

On aura alors : $u_0 = 0, u_1 = 1^2 = 1, u_2 = 2^2 = 4, u_3 = 3^2 = 9, u_4 = 4^2 = 16, \dots$

R S'il n'y a pas d'ambiguïté sur les nombres n , c'est-à-dire si l'on considère que les nombres n sont dans $\mathbb{N}$, on notera les suites sous la forme : (u_n) .

Dans le cas contraire, on ajoutera la condition sur n en indice : $(u_n)_{n \geq 1}$ signifie que les nombres u_n sont définis pour tout entier naturel n plus grand ou égal à 1.

1.2 Un peu de vocabulaire

Définition 1.2 On considère une suite (u_n) . Pour tout entier naturel n , u_n est appelé un **terme** de la suite. n est alors l'**indice** de ce terme. Le **rang** du terme est sa position par rapport au début de la liste des termes.

Dans l'exemple 1.1, le terme de rang 4 est u_3 (c'est le 4^e terme dans la liste en partant du début, donc à partir de u_0). L'indice du terme de rang 4 est donc 3.

et montrons, grâce à cela, que :

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (\text{en mettant en facteur } k+1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Nous avons ici démontré que si $\mathcal{P}_k$ était vraie, alors $\mathcal{P}_{k+1}$ l'était aussi, ce qui se note mathématiquement : $\mathcal{P}_k \implies \mathcal{P}_{k+1}$ (si $\mathcal{P}_k$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{k+1}$ aussi).

L'hérédité est alors démontrée. Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 2.1 Démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 2.2 Démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2.2 Démontrer une minoration ou une majoration

■ **Exemple 2.2** Reprenons la suite (u_n) définie dans l'exercice 1.3 :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1.$$

- **Initialisation.**

$u_0 = 2 \geq 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. L'initialisation est alors vérifiée.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier k fixé, $u_k \geq 1$.

Montrons alors que $u_{k+1} \geq 1$, c'est-à-dire : $\sqrt{2u_k - 1} \geq 1$.

3.3 Corrigés des exercices

Correction de l'exercice 3.1

1 Si ℓ existe, alors :

$$\ell = \sqrt{5\ell + 10}$$

soit :

$$\ell^2 - 5\ell - 10 = 0.$$

Le discriminant de $\ell^2 - 5\ell - 10$ est :

$$\Delta = 25 + 40 = 65$$

donc l'équation admet deux solutions :

$$\ell' = \frac{5 - \sqrt{65}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad \ell'' = \frac{5 + \sqrt{65}}{2} > 0.$$

u_n est positif (car c'est une racine carrée) donc $\ell \geq 0$.

Par conséquent, $\ell = \frac{5 + \sqrt{65}}{2} \approx 6,53$.

2 • **Initialisation.**

$u_0 = 4 \leq \frac{5 + \sqrt{65}}{2}$. Par conséquent, l'initialisation est faite.

• **Hérédité.**

On suppose que pour un entier naturel k fixé, $u_k \leq \ell$. Alors,

$$\begin{aligned} u_k \leq \ell &\implies 5u_k \leq 5\ell \\ &\implies 5u_k + 10 \leq 5\ell + 10 \\ &\implies \sqrt{5u_k + 10} \leq \sqrt{5\ell + 10} \\ &\implies u_{k+1} \leq \ell \quad (\text{car } \ell = \sqrt{5\ell + 10}) \end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n \leq \ell$.

3 Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{5u_n + 10} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{5u_n + 10} - u_n)(\sqrt{5u_n + 10} + u_n)}{\sqrt{5u_n + 10} + u_n} \\ &= \frac{5u_n + 10 - u_n^2}{\sqrt{5u_n + 10} + u_n} \\ &= -\frac{u_n^2 - 5u_n - 10}{\sqrt{5u_n + 10} + u_n} \end{aligned}$$

D'après la question **1**, $u_n^2 - 5u_n - 10$ se factorise sous la forme :

$$u_n^2 - 5u_n - 10 = (u_n - \ell')(u_n - \ell).$$

4 — Suites arithmétiques

Nous avons vu dans le chapitre précédent que certaines suites pouvaient être définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Nous allons traiter dans ce chapitre le cas où $f : x \mapsto x + r$, où $r \in \mathbb{R}^*$.

4.1 Définition

Définition 4.1 On dit qu'une suite (u_n) , de premier terme u_0 , est **arithmétique de raison r** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

R On constate que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = r$, donc que la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est cette différence que l'on nomme la « raison » de la suite.

■ **Exemple 4.1** Si $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$. C'est la suite des entiers naturels.

■ **Exemple 4.2** Si $u_0 = -9$ et $u_{n+1} = u_n - 2$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$.

4.2 Variations

Propriété 4.1 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors (u_n) est constante.

D Pour connaître les variations d'une suite, on doit trouver le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n .

Or, dans le cas d'une suite arithmétique,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r.$$