

3 septembre 2012

La proportionnalité

au collège

Stéphane PASQUET

Avant propos

La notion de proportionnalité est sérieusement abordée en France au collège selon le principe de l'enseignement en spirale : on introduit quelques notions de base en classe de 6^e, puis on continue à la traiter en 5^e, puis en 4^e et enfin en 3^e.

Ce principe d'enseignement à spirale a été adopté dans le but d'un apprentissage en douceur, même si dans la pratique, il n'est pas toujours performant, comme justement pour la proportionnalité. Tous les enseignants pourront le constater : les élèves ont du mal avec cette notion.

Il m'est d'avis que cette notion doit avant tout être perçue comme naturelle aux yeux des élèves ... et donc être traitée à travers des exemples réellement concrets pour eux, même si c'est quelques fois difficile pour les enseignants.

Dans ce qui va suivre, je vais respecter la chronologie de l'enseignement français.

Bien entendu, je suis ouvert à toute critique, toute remarque constructive donc n'hésitez pas à me contacter à l'adresse suivante si vous en estimez le besoin :

contact@mathweb.fr

Vous pouvez aussi me proposer des exercices attrayants que je me ferai un plaisir d'introduire dans cet ouvrage (en mentionnant bien entendu leur origine).

En espérant que ce qui va suivre vous aidera,

Stéphane PASQUET

Sommaire

Chap.	1	Une histoire de grandeurs	1
Chap.	2	Les tableaux de proportionnalités	7
Chap.	3	Les pourcentages	13
Chap.	4	Représentation graphique	16
Chap.	5	Proportionnalité et statistiques	21
	1	Diagrammes circulaires et semi-circulaires	21
	2	Diagrammes en bâtons et compagnie	22
Chap.	6	Quatrième proportionnelle et mouvement uniforme	24
Chap.	7	Échelle	29
Chap.	8	Produits en croix & vitesse moyenne	35
Chap.	9	Grandeurs composées	43
Chap.	10	Proportionnalité et géométrie	48
	1	Le théorème de Thalès	48
	2	Agrandissement et réduction	50

Une histoire de grandeurs

1

Imaginons-nous dans une grande surface, au rayon « Fruits & Légumes ». Avez-vous déjà remarqué qu'au-dessus de chaque catégorie de fruits et de légumes, il y a un panneau où est inscrit le prix ? Ce prix est marqué, certes, mais pas de n'importe quelle façon.



Avez-vous remarqué que le prix indiqué est celui d'un kilogramme ?

Ici, par exemple, nous pouvons voir qu'un kilogramme de tomates *bio* coûte 3,40 €.

Ici, les **grandeurs** qui interviennent sont le *prix* (exprimé en euro) et la *masse* (exprimée en kilogramme).

Dès que l'on parle de grandeurs, il faut toujours préciser leur unité.

1 Reconnaître les grandeurs



Corr. p. 6

Pour chacune des situations suivantes, nommer les grandeurs qui interviennent.

- 1 Un peintre en bâtiment utilise une certaine quantité de peinture (exprimée en kilogramme) pour recouvrir un mur (dont la surface est exprimée en m^2).
- 2 Ludovic a un forfait de téléphonie mobile à la carte. Il paie ses communications par rapport au temps qu'il passe à téléphoner.
- 3 Une puce se trouve sur une ficelle qui joint un mur à un autre. Elle fait un bond dont la longueur est égale à la moitié de la longueur qu'il y a entre elle et le mur qui est en face d'elle.
- 4 Un robinet ouvert à fond débite 15 ℓ d'eau par minute.

Revenons à l'exemple que nous avons pris au début de ce chapitre : nous souhaitons acheter 3 kg de ces magnifiques tomates *bio* dont le prix est fixé à 3,40 € le kilogramme.

Comment peut-on calculer le prix que l'on devra payer ?

Avec un peu de bon sens, on devine que dans la mesure où on prend trois fois plus que 1 kg de tomates, alors on devra multiplier par 3 le prix du kilogramme :

$$3 \times 3,40 = 10,20$$

Ainsi, 3 kg de tomates *bio* valent 10,20 €.

Nous voyons ici que si l'on multiplie la masse de tomates par un nombre, il faut multiplier le prix d'1 kg de ces tomates pour obtenir le prix total. On dit alors qu'il y a une **proportionnalité** entre les deux grandeurs.

Définition

Deux grandeurs sont proportionnelles si, quand on multiplie la première par un nombre, alors on multiplie la seconde par le même nombre.

Nous le voyons à travers cet exemple, notre bon sens est mis à contribution pour voir si deux grandeurs sont proportionnelles (dans la vie de tous les jours).

2 Reconnaître une situation de proportionnalité



Corr. p. 6

Dans chacune des situations suivantes, dire s'il y a proportionnalité ou pas en expliquant.

- 1 Un soir de pluie, Paul met un seau vide dehors pendant 1 heure. Il obtient 3 ℓ d'eau.
Le lendemain soir, il pleut encore et Paul met à nouveau le même seau vide pendant 2 heures.
Peut-il prévoir la quantité d'eau qu'il va avoir dans le seau ?
- 2 Julie a besoin de 15 cm pour ranger 10 boîtiers de DVD.
Peut-on savoir quelle longueur il lui faudra pour ranger 100 de ces boîtiers ?
- 3 Un salarié est payé 10 euro pour 1 heure de travail.
Peut-on connaître son salaire mensuel si l'on sait qu'il travaille 35 heures par semaine ?

Maintenant que nous voyons comment reconnaître une situation de proportionnalité, voyons comment nous pouvons calculer.

ACTIVITÉ

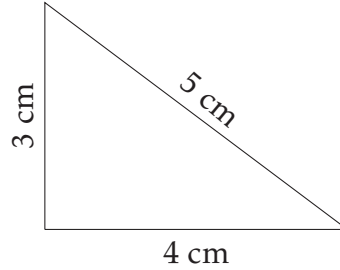
Youssef dessine un triangle dont les côtés mesurent respectivement 3 cm, 4 cm et 5 cm.

- 1 Construire ce triangle. Quelle semble être sa nature ?
- 2 Youssef agrandit ce triangle à la photocopieuse. Le côté qui mesurait 5 cm mesure maintenant 7 cm.
Quelles sont les mesures des deux autres côtés du triangle agrandi ?
- 3 Tracer le nouveau triangle. Sa nature semble-t-elle la même que le premier triangle ?

Cette activité va vous permettre de voir si votre ressenti est bon ou pas. En effet, si vous n'obtenez pas à la question 3 un triangle de même nature que celui obtenu à la question 1, c'est que votre intuition n'est pas correcte.

Voyons ce que cela donne :

- 1 Le triangle est le suivant :



Ce triangle semble rectangle.

- 2 L'élève aurait tendance à dire que, puisque le côté de longueur 5 cm mesure 7 cm après agrandissement, on ajoute 2 cm aux longueurs des deux autres côtés, ce qui donnerait un triangle de longueurs 7 cm, 6 cm et 5 cm. Nous allons voir dans la question suivante qu'il ne faut pas raisonner comme cela.

En fait, tout ce passe comme si l'on *étirait* les côtés, ce qui, de manière intuitive, revient à *multiplier* les longueurs de ces côtés.

Ainsi, on a multiplié 5 pour obtenir 7 :

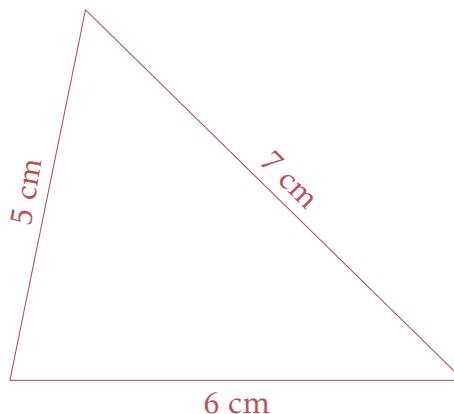
$$5 \times \square = 7$$

On trouve alors que le nombre par lequel on a multiplié est :

$$\square = \frac{7}{5} = 1,4$$

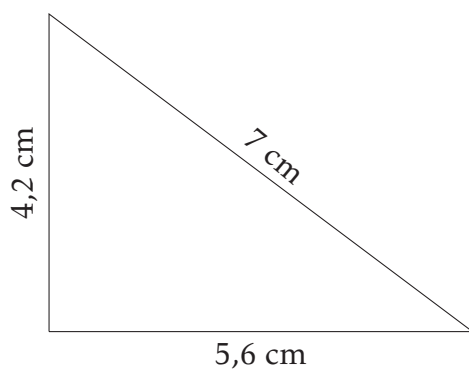
Il faut donc multiplié la longueur des autres côtés par 1,4, ce qui donne un triangle de longueurs 7 cm, 5,6 cm et 4,2 cm.

- 3 L'élève qui aura ajouté (et non multiplié) trouvera ce triangle :



Il verra donc que la nature de ce dernier triangle n'est pas la même que celle du premier et donc que son raisonnement est erroné.

Le vrai triangle est le suivant :



On peut alors constater que sa nature est identique à celle du premier.

1 Correction

- 1 Les deux grandeurs sont : la quantité de peinture (en kg) et la surface du mur (en m^2).
- 2 Les deux grandeurs sont : le temps de communication (exprimé par exemple en minute) et le prix (exprimé en euro).
- 3 Les deux grandeurs sont : la longueur de ficelle qu'il reste entre la puce et le mur (exprimée par exemple en cm) et la fraction de longueur correspondant au bond (sans unité car une fraction n'a pas d'unité).
- 4 Les deux grandeurs sont : le volume d'eau versée par le robinet (en ℓ) et le temps (en minute).

2 Correction

- 1 Il n'y a pas proportionnalité ici car le débit de la pluie le lendemain soir n'est peut-être pas le même que le premier soir.
- 2 Il y a proportionnalité entre le nombre de boitiers et la longueur nécessaire pour les ranger. En effet, si 1 boitier a une certaine largeur, il faudra le double pour en ranger 2, le triple pour en ranger 3, etc.
- 3 Il y a proportionnalité entre le nombre d'heures travaillées et le salaire. En effet, si le salarié travaille 1 heure, il gagne 10 € donc s'il travaille 2 heures, il gagnera le double, s'il travaille 3 heures, il gagnera le triple, etc.

Les tableaux de proportionnalités

2

Définition

Un **tableau de proportionnalité** est un tableau dans lequel seront écrites les différentes valeurs des deux grandeurs proportionnelles.

Exemple

Reprenons l'exemple du chapitre 1 (avec les courgettes *bio*). Nous allons calculer les différents prix à payer selon la quantité de légumes prise.

- 1 1 kg coûte 3,35 €
- 2 Prix pour 2 kg de courgettes : $3,35 \times 2 = 6,70$ €
- 3 Prix pour 3,5 kg de courgettes : $3,35 \times 3,5 = 11,725$ €
- 4 Prix pour 5,2 kg de courgettes : $3,35 \times 5,2 = 17,42$ €

Nous pouvons alors mettre ces résultats dans un tableau :

Masse de courgettes (en kg)	1	2	3,5	5,2
Prix (en €)	3,35	6,70	11,725	17,42

Dans cet exemple, nous avons vu une façon (assez intuitive) de calculer les différents montants correspondant aux différentes quantités de courgettes prises. Schématiquement, on a :

Masse de courgettes (en kg)	1	2	3,5	5,2
Prix (en €)	3,35	6,70	11,725	17,42

Mais nous pouvons aussi constater autre chose : si l'on prend n'importe quel nombre de la première ligne et qu'on le multiplie par 3,35, on obtient le nombre de la seconde ligne :

Masse de courgettes (en kg)	1	2	3,5	5,2
Prix (en €)	3,35	6,70	11,725	17,42

Ce nombre est appelé le **coefficient de proportionnalité** du tableau.

Définition

Le **coefficient de proportionnalité** d'un tableau de proportionnalité est le nombre par lequel on multiplie tous ceux de la première ligne pour obtenir ceux de la seconde.

Ainsi, lorsque l'on a un tableau représentant différentes valeurs de deux grandeurs, on sait si ces deux grandeurs sont proportionnelles si le coefficient de proportionnalité existe.

Méthode

Pour savoir si un tableau est un tableau de proportionnalité, on calcule les quotients « $\frac{\text{nombre du bas}}{\text{nombre du haut}}$ ». Si on trouve toujours le même nombre, alors, nous avons un tableau de proportionnalité et le nombre obtenu est le coefficient de proportionnalité.

Exemple

Le tableau suivant est-il un tableau de proportionnalité ?

1,3	5	12,7	20,9
2,639	10,15	25,781	42,427

Les quotients sont :

$$\frac{2,639}{1,3} = 2,03; \frac{10,15}{5} = 2,03; \frac{25,781}{12,7} = 2,03; \frac{42,427}{20,9} = 2,03$$

Donc ce tableau est un tableau de proportionnalité et son coefficient de proportionnalité est égal à 2,03.

1 Reconnaître un tableau de proportionnalité



Corr. p. 12

Dans les cas suivants, dire si nous avons un tableau de proportionnalité ou pas.
Dans l'affirmative, donner son coefficient de proportionnalité.

1

1	5	3	15
7	35	21	105

2

2,5	3,7	4,8	5,9
5	7,4	9,6	11,8

3

8	12,5	13	40
24	37,5	39	130



Pour chaque question, compléter le tableau de proportionnalité qui est donné.

1

8	50		
24		21	120

2

1	12,5		50
1,5		45	

Propriété

Dans un tableau de proportionnalité, on peut ajouter deux ou plusieurs colonnes.

Exemple

Soit le tableau de proportionnalité suivant :

1	3	7	10
4	12	28	40

Pour obtenir le nombre bleu, on peut constater que $10 = 3 + 7$ donc on ajoute 12 et 28, ce qui donne 40.



Pour chaque tableau de proportionnalité, compléter à l'aide de la propriété précédente.

1

1	6	7	13
2,5	15		

2

2,8	1,2	4	5,2
4,48	1,92		

Propriété

Dans une situation de proportionnalité, on peut calculer une valeur manquante en passant à l'unité. C'est la **règle de trois**.

Exemple

Louis-Émile parcourt 400 mètres en 5 minutes en marchant. On cherche la distance qu'il parcourt en 12 minutes.

On peut avant tout calculer la distance parcourue en 1 minute ; pour cela, on calcule :

$$400 \div 5 = 80$$

Ainsi, il parcourt 80 mètres en 1 minute.

Maintenant, on calcule :

$$80 \times 12$$

pour savoir la distance qu'il a fait en 12 minutes ; on trouve 960 mètres.

Si on construit un tableau de proportionnalité représentant cette situation, on aura :

		$\div 5$	$\times 12$
Durée du parcours (en min)	5	1	12
Distances parcourues (en m)	400	80	960
		$\div 5$	$\times 12$

Si on ne veut faire qu'une opération, on a :

$$\frac{400}{5} \times 12 = 960$$



Remarque

La règle de trois et, ce que l'on va appeler plus tard, « l'égalité des produits en croix » sont un seule et même principe.

1 Correction

- 1 Les quotients sont tous égaux à 7 donc c'est un tableau de proportionnalité de coefficient de proportionnalité égal à 7.
- 2 Les quotients sont tous égaux à 2 donc c'est un tableau de proportionnalité de coefficient de proportionnalité égal à 2.
- 3 Les quotients ne sont pas tous égaux (le dernier diffère des autres) donc ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

2 Correction

- 1 Le coefficient de proportionnalité est ici égal à 3. D'où :

8	50	7	40
24	150	21	120

- 2 Le coefficient de proportionnalité est ici égal à 1,5. D'où :

1	12,5	30	50
1,5	18,75	45	75

3 Correction

- 1

1	6	7	13
2,5	15	$2,5 + 15 = 17,5$	$15 + 17,5 = 32,5$
- 2

2,8	1,2	4	5,2
4,48	1,92	$4,48 + 1,92 = 6,4$	$1,92 + 6,4 = 8,32$

Les pourcentages

3

Définition

Un **pourcentage** est une partie de quelque chose (on dit aussi que c'est une fraction d'un tout).

Quand on parle d'un pourcentage, il y a proportionnalité. Voyons cela sur un exemple :

Exemple

30% d'un groupe de 1 200 personnes aiment le chocolat noir. Si l'on traduit ceci par un tableau de proportionnalité, cela donne :

La partie	30	?
Le tout	100	1 200

Nous pouvons déterminer la valeur avec la règle de trois (par exemple) :

$$\frac{30}{100} \times 1\,200 = \frac{30 \times 1\,200}{100} = 360$$

1 Transports



Corr. p. 15

Dans un collège de 400 élèves, 20% viennent en bus, 50% à pieds et le reste à vélo.

Calculer le nombre d'élèves pour chaque transport.

2 Jogging

Corr. p. 15

Sophie fait son jogging à vitesse constante. Elle se chronomètre sur une distance égale à 4% du parcours total et elle obtient 20 secondes.
Combien de temps mettra-t-elle pour l'effectuer en entier ?

3 Le fromage

Corr. p. 15

Un fromage contient 35 % d'eau. Quelle est la masse d'eau contenue dans 250 grammes de ce fromage.

1 Correction

Faisons un tableau de proportionnalité pour les élèves venant en bus :

La partie	20	80
Le tout	100	400

$$\frac{20}{100} \times 400 = 80$$

Il y a donc 80 élèves qui viennent en bus.

Pour les élèves qui viennent à pieds, inutile de construire un tableau de proportionnalité. En effet, 50% équivaut à la moitié, et la moitié de 400 est égale à 200.

Il y a donc 200 élèves qui viennent à pieds.

Pour le reste, il suffit de faire

$$400 - 80 - 200 = 200 - 80 = 120$$

Il y a donc 120 élèves qui viennent à vélo.

2 Correction

Le tableau de proportionnalité est le suivant :

La partie	4	20
Le tout	100	500

On multiplie par 5 pour passer de 4 à 20 donc on multiplie 100 par 5 pour obtenir le temps total.

Sophie mettra 500 secondes, soit 8 min 20 s, pour effectuer son parcours.

3 Correction

Le tableau de proportionnalité est le suivant :

La partie	35	87,5
Le tout	100	250

$$\frac{35}{100} \times 250 = 87,5$$

Il y a donc 87,5 g d'eau dans ce fromage.

Représentation graphique

4

ACTIVITÉ

On considère un carré de côté x cm, où x est un nombre positif.
On note $\mathcal{A}$ son aire et $\mathcal{P}$ son périmètre.

- 1 Recopier et compléter le tableau suivant :

Valeurs de x (en cm)	1	2	3	4	5	6
Valeurs de $\mathcal{A}$ (en cm^2)						
Valeurs de $\mathcal{P}$ (en cm)						

- 2 $\mathcal{A}$ est-elle proportionnelle à x ? $\mathcal{P}$ est-il proportionnel à x ?

On note M_1 le point d'abscisse 1 et d'ordonnée égale à la valeur de $\mathcal{A}$ quand $x = 1$, et N_1 celui d'abscisse 1 et d'ordonnée égale à la valeur de $\mathcal{P}$ quand $x = 1$, puis on fait de même pour les autres valeurs de x de sorte à définir les points $M_2, M_3, \dots, M_6$ et $N_2, \dots, N_6$.

- 3 Construire un repère orthonormé $(O; I, J)$ dans lequel seront placés les points M_i (en bleu) et N_i (en rouge), pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6.
- 4 Que remarque-t-on pour les deux grandeurs proportionnelles ? Et pour les deux autres ?
- 5 Quelle conjecture peut-on alors faire ?

(SUITE)

- 4 Jean-Rachid s'abonne à un service de location de DVD. Il paie 10 € en début de mois puis 1,5 € par DVD loué.

Construire un tableau de valeurs représentant les montants qu'il devra payer pour 1, 2, 3, 4, 5 et 6 DVD dans le mois, puis construire le graphique correspondant, comme précédemment.

Peut-on dire qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité? Affiner alors, si besoin est, la conjecture émise à la question précédente.

- 1 Le tableau donne :

Valeurs de x (en cm)	1	2	3	4	5	6
Valeurs de $\mathcal{A}$ (en cm^2)	1	4	9	16	25	36
Valeurs de $\mathcal{P}$ (en cm)	4	8	12	16	20	24

- 2 On a :

$$\frac{4}{2} \neq \frac{9}{3}$$

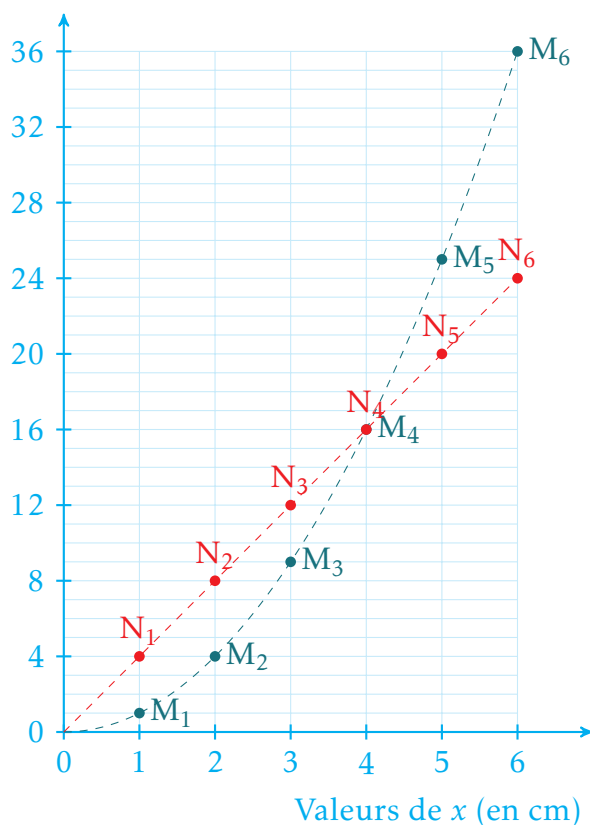
Donc l'aire n'est pas proportionnelle à x .

De plus, on a :

$$\frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5} = \frac{24}{6} = 4$$

Donc le périmètre est proportionnel à x et le coefficient de proportionnalité est égal à 4.

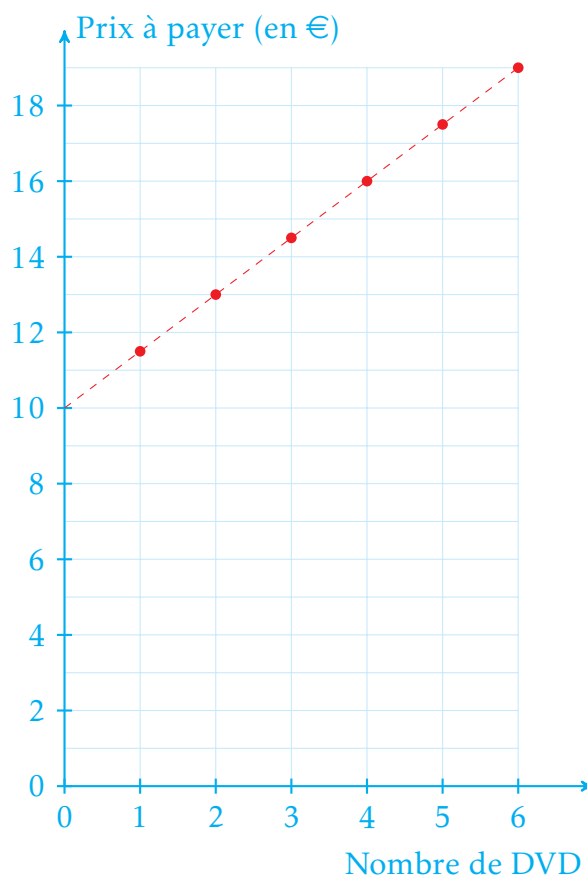
- 3 Le graphique est le suivant :



- 4 On remarque que les points représentant les deux grandeurs proportionnelles (en rouge) sont alignés sur une droite alors que ceux représentant les deux autres grandeurs, celles qui ne sont pas proportionnelles, ne sont pas alignés.
- 5 On peut émettre la conjecture suivante :
« Une situation de proportionnalité sera représentée dans un repère cartésien par une droite. »
- 6 Le tableau de valeurs est le suivant :

Nombre de DVD loués	1	2	3	4	5	6
Prix à payer (en €)	11,5	13	14,5	16	17,5	19

D'où le graphique suivant :



Si l'on regarde les quotients $\frac{13}{2}$ et $\frac{16}{4}$ (par exemple), on remarque qu'ils ne sont pas égaux. Donc les grandeurs ne sont pas proportionnelles. Or, nous obtenons une droite dans le repère ; la différence réside dans le fait qu'ici, la droite ne passe pas par l'origine du repère alors qu'elle y passait pour le périmètre du carré. On peut alors préciser la conjecture émise précédemment et énoncer la propriété suivante :

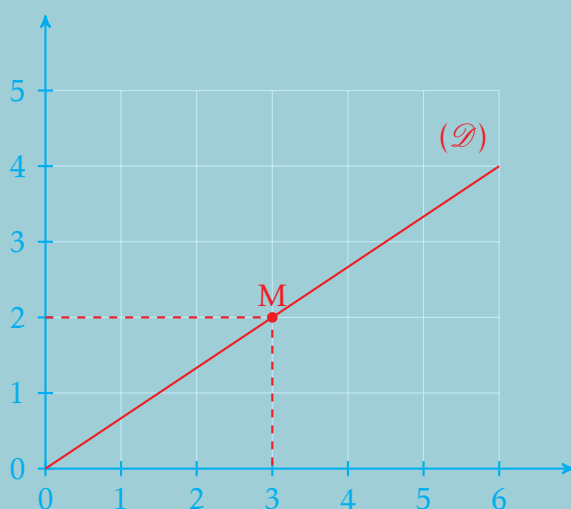
Propriété

Une situation de proportionnalité est représentée dans un repère cartésien uniquement par une droite passant par l'origine de ce repère.

Cela suppose donc qu'une droite passant par l'origine d'un repère représentera toujours une situation de proportionnalité.

Définition

Le **coefficient directeur** d'une droite passant par l'origine du repère dans lequel elle est tracée est le coefficient de proportionnalité des deux grandeurs, c'est-à-dire le nombre par lequel on a multiplié l'abscisse d'un point quelconque de cette droite pour en obtenir son ordonnée.

Exemple

Le point M, qui appartient à la droite (D), a pour coordonnées (3;2). Ainsi, le coefficient directeur est égal à $\frac{3}{2}$.

Proportionnalité et statistiques

5

Lorsque l'on représente des données sous forme de graphiques (diagrammes en bâtons, circulaires, semi-circulaires, cartésiens), nous sommes obligés de faire intervenir la notion de proportionnalité.

1

DIAGRAMMES CIRCULAIRES ET SEMI-CIRCULAIRES

Supposons que nous observions une population composée de 1 200 personnes. Le tableau suivant donne la répartition de cette population selon la couleur de leur cheveux :

Couleur	Noir	Brun	Châtain	Blond	Roux	Total
Nombre de personnes	100	500	300	250	50	1 200

Si l'on souhaite représenter cette répartition à l'aide d'un diagramme circulaire, cela signifie que la totalité des personnes est représentée par un secteur angulaire de 360° . Ainsi, l'angle au centre d'un secteur angulaire qui représente un certain nombre de personnes devra être proportionnel à l'effectif qu'il représente.

Il ajoute donc au tableau précédent une ligne de sorte à ce qu'il devienne un tableau de proportionnalité :

Couleur	Noir	Brun	Châtain	Blond	Roux	Total
Nombre de personnes	100	500	300	250	50	1 200
Angle (en degré)	30	150	90	75	15	360

TROISIÈME

QUATRIÈME

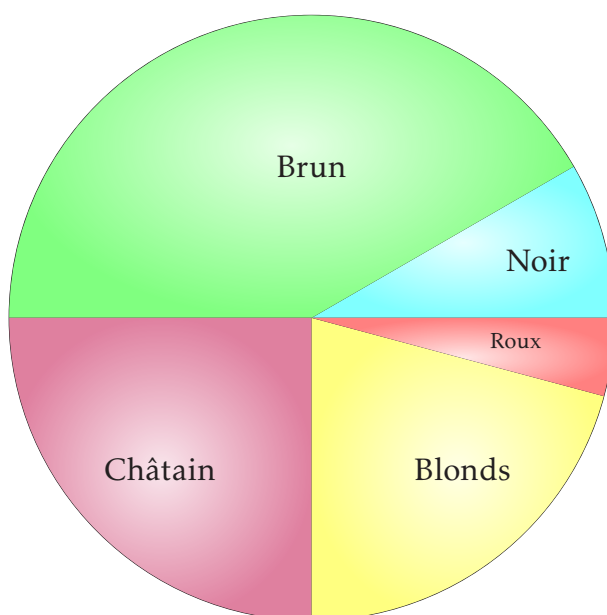
CINQUIÈME

SIXIÈME

Exemple de calculs : pour obtenir le nombre de la première colonne, on regarde ce que fait « 100 » par rapport au nombre total de personnes « 1 200 » (ce qui revient à faire $\frac{100}{1\,200}$, puis on multiplie par 360 :

$$\frac{100}{1\,200} \times 360 = \frac{120\,000}{360} = 30$$

On obtient alors le diagramme suivant :



Remarque

Pour un diagramme semi-circulaire, il suffit de prendre « 180° » à la place de « 360° ».

2

DIAGRAMMES EN BÂTONS ET COMPAGNIE

Pour tout ce qui est représentation « en hauteur » (donc les histogrammes, les diagrammes en tuyaux d'orgue, les diagrammes en bâtons), la proportionnalité intervient lorsque l'on veut calculer la hauteur (des bâtons, des tuyaux ou des

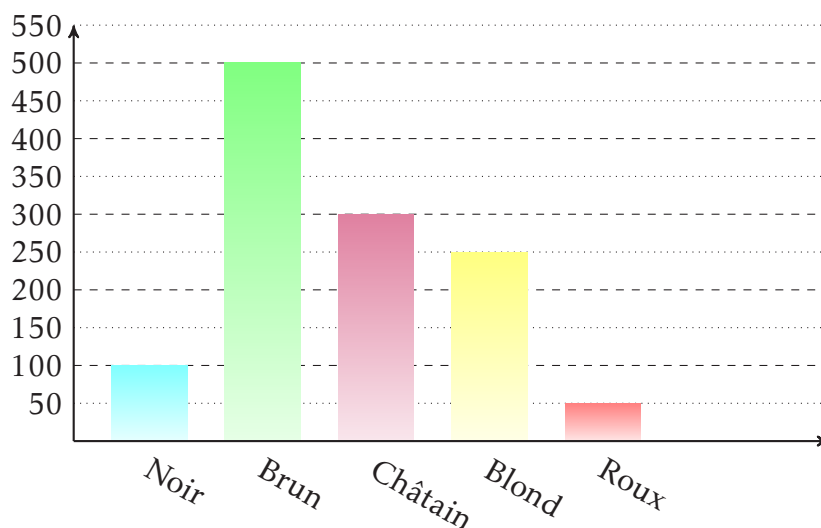
rectangles).

Quand on veut construire un diagramme « en hauteur », il suffit de fixer une **unité en ordonnées**. Et ce choix nous est presque dicté par la hauteur totale que l'on souhaite consacrer à notre diagramme.

Supposons que l'on ne dispose que de 6 cm en hauteur pour représenter la répartition de l'exemple précédent. On peut alors décréter que 1 cm en ordonnées représentera 100 personnes. Ainsi, on a le tableau suivant :

Couleur	Noir	Brun	Châtain	Blond	Roux
Nombre de personnes	100	500	300	250	50
Hauteur (en cm)	1	5	3	2,5	0,5

Ce qui donnera le diagramme en tuyaux d'orgue suivant :



Rappels

- Un **diagramme en tuyau d'orgue**, c'est quand les données sont des mots (comme notre exemple)
- Un **diagramme en bâton**, c'est quand les données sont des nombres distincts (par exemple, quand on regarde le nombre d'enfants par famille)
- Un **histogramme**, c'est quand les données sont des intervalles (par exemple, quand on regarde la taille d'une personne, on va mettre cette taille dans un intervalle $[160;170[$, ou $[170;180[$, etc.)

Quatrième proportionnelle et mouvement uniforme

6

Définition

Lorsque l'on a un tableau de proportionnalité à quatre cases où seulement trois valeurs sont connues, la valeur manquante est appelée la **quatrième proportionnelle**.

Exemple

5	12
6	x

La quatrième proportionnelle de ce tableau est x .

Pour passer de 5 à 6, on a multiplié par $\frac{6}{5} = 1,2$ donc :

$$x = 12 \times 1,2$$

$$x = 14,4$$

Définition

Un **mouvement** est qualifié d'**uniforme** lorsque la distance parcourue au cours de ce mouvement est proportionnelle à la durée de ce parcours.

Exemple

On a relevé la distance parcourue par un train par rapport à la durée qu'il a mis et on a mis les résultats dans le tableau suivant :

Durée du parcours (en h)	1	1,5	2
Distance parcourue (en km)	140	210	280

On a :

$$\frac{140}{1} = \frac{210}{1,5} = \frac{280}{2} = 140$$

Donc le mouvement du train est uniforme.

On dit ici que la vitesse du train est de 140 km/h (notée aussi $140 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$).

1 Mouvement d'un train



Corr. p. 27

Le tableau suivant donne la distance parcourue par un train en fonction de la durée :

Durée du parcours (en h)	0,5	1	2	3
Distance parcourue (en km)	70	140	280	320

Le mouvement du train est-il uniforme ?

2 À la piscine



Corr. p. 27

Clara a effectué 10 longueurs en 4 min 24s selon un mouvement uniforme.

- 1 Convertir 4 min 24 s en nombre décimal de minutes.
- 2 Recopier et compléter le tableau suivant :

Durée du parcours (en min)			11
Nombre de longueurs	10	15	

3 Le vélo de Valoche



Corr. p. 27

Valérie se promène à vélo et relève tous les quarts d'heure la distance qu'elle a parcourue :

Durée (en h)	0,25	0,5	0,75	1
Distance parcourue (en km)	3	6	10	12

Peut-on dire que Valérie a roulé à vitesse constante ?

4 Paulo l'escargot



Corr. p. 27

Paulo l'escargot parcourt 5 mètres en 6 minutes quand il est pressé, et se déplace toujours à vitesse constante.

- 1 Calculer la distance qu'il parcourt en 10 minutes.
- 2 Combien de temps lui faudra-t-il pour faire 1 km ?

5 Batman sur l'autoroute



Corr. p. 28

Batman est respectueux du code de la route et aujourd'hui, il roule à une vitesse constante de 130 km/h.

- 1 Combien de temps mettra-t-il pour faire 500 km (arrondir à la minute la plus proche) ?
- 2 Quelle distance parcourra-t-il en 2 heures et 45 minutes ?

1 Correction

Les quotients ne sont pas tous égaux (le dernier diffère des précédents) donc le mouvement n'est pas uniforme.

2 Correction

1 $4 \text{ min } 24 \text{ s} = 4 \text{ min} + \frac{24}{60} \text{ min} = 4,4 \text{ min}.$

2	Durée du parcours (en min)	4,4	6,6	11
	Nombre de longueurs	10	15	25

Explications : Pour passer de « 10 » à « 15 », on multiplie par 1,5, donc on multiplie 4,4 par 1,5 pour avoir « 6,6 ».

Pour passer de « 4,4 » à 11, on a divisé par 4 (ce qui donne 1,1) puis on a multiplié par 10. On fait donc la même chose à 10 pour obtenir 25.

3 Correction

Les quotients ne sont pas tous égaux : $\frac{10}{0,75}$ diffère des autres. Ainsi, le mouvement n'est pas uniforme donc la vitesse de Valérie n'a pas été constante.

4 Correction

1	Durée (en min)	6	10
	Distance parcourue (en m)	5	

Le coefficient de proportionnalité est égal à : $\frac{5}{6}$ donc le nombre manquant est :

$$\frac{5}{6} \times 10 \approx 8,33$$

Paulo parcourt donc à peu près 8,33 mètres en 10 minutes.

2

Durée (en min)	6	
Distance parcourue (en m)	5	1 000

$$\frac{6}{5} \times 1\,000 = 1\,200$$

De plus, $1\,200 \text{ min} = \frac{1\,200}{60} \text{ h} = 20 \text{ h}$.

Il faut donc 20 heures à Paulo pour parcourir 1 km.

5 Correction

1

Durée (en h)	1	3,846
Distance parcourue (en km)	130	500

$$\frac{500}{130} \approx 3,846$$

De plus, $3,846 \text{ h} = 3 \text{ h} + 0,846 \times 60 \text{ min} \approx 3 \text{ h } 51 \text{ min}$.

Batman mettra donc 3h51min pour parcourir 500 km.

2

Durée (en h)	1	2,75
Distance parcourue (en km)	130	357,5

$$2,75 \times 130 = 357,5$$

Batman parcourra donc 357,5 km en 2h45min.

Vous l'avez sans doute remarqué, mais lorsque l'on décide de représenter un monument par un dessin, on ne le fait pas en grandeur nature ... On le dessine en plus petit.

De même, quand on dessine ce que l'on observe au microscope, on agrandit ce que l'on voit.

On dit alors que l'on utilise une *échelle* pour faire notre représentation.

Définition

L'**échelle** d'une représentation est la proportion du dessin par rapport au modèle. C'est donc un nombre sans unité défini par une fraction :

$$e = \frac{\text{une longueur sur le dessin}}{\text{cette même longueur en vraie grandeur}}$$



Attention

Les deux longueurs doivent être dans la même unité.

Exemple

Paf le photographe a pris en photo un monument qui mesure 150 mètres de hauteur. Sur la photo, le monument mesure 5 cm. L'échelle de la photo est donc :

$$e = \frac{5}{15\,000} = \frac{1}{3\,000}$$

Ici, nous avons d'abord exprimé toutes les longueurs en cm.



Remarque

Si l'échelle d'une représentation est une fraction de la forme $\frac{a}{b}$, cela signifie que a cm sur le dessin représentent b cm en réalité.

1 L'armoire de Grégoire



Corr. p. 32

La largeur de l'armoire de Grégoire est 75 cm. Il l'a dessiné sur une feuille ; cette largeur mesure alors sur son dessin 5 cm.

- 1 Calculer l'échelle du dessin de Grégoire.
- 2 La hauteur réelle de cette armoire est de 1,80 m. Quelle est sa longueur sur le dessin ?
- 3 Sur le dessin, la hauteur des pieds est de 6 mm. Quelle est la longueur réelle des pieds de l'armoire ?

2 La carte de Marthe



Corr. p. 32

Marthe possède une carte dont l'échelle est $\frac{1}{5\,000}$.

- 1 Que signifie cette échelle ?
- 2 Recopier et compléter le tableau suivant :

Distance sur le plan (en cm)	1	3,7			12
Distance réelle (en cm)			7 000	11 500	

3 Baby-foot



Corr. p. 32

Un terrain de football a la forme d'un rectangle de largeur 90 m et de longueur 120 m.

Un baby-foot est une réduction d'un terrain de football.

Calculer la longueur d'un baby-foot dont la largeur est égale à 54 cm.

4 La tour Eiffel



Corr. p. 33

- 1 Rechercher la hauteur de la tour Eiffel, ainsi que sa largeur aux pieds (sur un dictionnaire ou sur Internet). Arrondir à l'unité la plus proche si besoin.
- 2 Sarah souhaite représenter la tour Eiffel sur toute la hauteur d'une feuille A4 (dont les dimensions sont 21 cm par 29,7 cm). Aura-t-elle la place pour dessiner les pieds ?

5 Échelle d'un graphique



Corr. p. 34

On souhaite représenter dans un repère cartésien différents points dont les ordonnées varient entre -50 et 300 .

On ne dispose qu'un espace vertical de 10 cm.

- 1 Combien représentera 1 cm en ordonnée sur ce graphique ?
- 2 Combien de centimètres seront nécessaire pour représenter une ordonnée égale à 50 ?

1 Correction

- 1 L'échelle du dessin de Grégoire est :

$$e = \frac{5}{75} = \frac{1}{15}$$

- 2 La hauteur réelle est de 180 cm, et :

$$180 \times \frac{1}{15} = \frac{180}{15} = 12$$

La hauteur de l'armoire est égale à 12 cm sur le dessin.

- 3 Sur le dessin, la hauteur des pieds est de 0,6 cm et :

$$0,6 \times 15 = 9$$

Ainsi, les pieds de l'armoire ont une hauteur réelle de 9 cm.

2 Correction

- 1 Cette échelle signifie que 1 cm sur la carte de Marthe représente 5 000 m dans la réalité.
- 2 Le coefficient de proportionnalité de ce tableau est 5 000 (nombre par lequel on multiplie les nombres de la première ligne pour obtenir ceux de la seconde). D'où :

Distance sur le plan (en cm)	1	3,7	1,4	2,3	12
Distance réelle (en cm)	5 000	18 500	7 000	11 500	60 000

3 Correction

Avant tout, calculons l'échelle de ce baby-foot :

$$e = \frac{54}{9\,000} = \frac{3}{500}$$

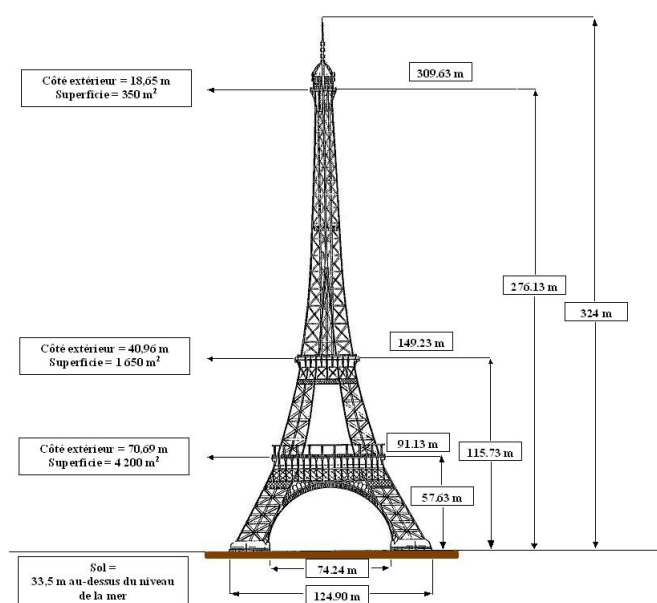
De plus, on a :

$$12\,000 \times \frac{3}{500} = \frac{360}{500} = 72$$

La longueur du baby-foot est donc égale à 72 cm.

4 Correction

- 1 Sur la page http://fr.wikipedia.org/wiki/Donn%C3%A9es_techniques_de_la_tour_Eiffel, on trouve le dessin suivant :



On voit alors que la hauteur de la tour Eiffel est égale à 324 m et sa largeur aux pieds est de 125 m.

- 2 On cherche la quatrième proportionnelle du tableau suivant :

Longueur sur le papier (en cm)	29,7	
Longueur réelle (en cm)	32 400	12 500

$$\frac{29,7}{32\,400} \times 12\,500 \approx 11,48$$

On trouve alors que 11,5 cm sont nécessaires pour dessiner la base de la tour Eiffel avec cette échelle.

Sarah aura donc la place de dessiner la tour Eiffel sur une feuille A4.

5 Correction

- 1 Nous devons trouver la quatrième proportionnelle du tableau suivant :

Longueur sur le papier (en cm)	10	1
Ordonnée	350	35

On divise par 10 pour passer de 10 à 1 donc on divise 350 par 10.
Ainsi, 1 cm en ordonnée représente 35.

- 2 Nous devons trouver la quatrième proportionnelle du tableau suivant :

Longueur sur le papier (en cm)	1,4	1
Ordonnée	50	35

Le coefficient de proportionnalité est égal à 35 donc on doit diviser 50 par 35, ce qui fait à peu près 1,4 cm.

Produits en croix & vitesse moyenne

8

Définition

Dans un tableau de proportionnalité à quatre cases de la forme :

a	b
c	d

les **produits en croix** sont les produits :

$$a \times d \quad \text{et} \quad c \times b$$

Propriété

Dans un tableau de proportionnalité à quatre cases, les produits en croix sont égaux.

Exemple

Les produits en croix sont égaux donc :

$$5 \times x = 6 \times 12$$

soit :

$$5x = 60$$

D'où :

$$x = \frac{60}{5}$$

$$x = 12$$

5	12
6	x

TROISIÈME

QUATRIÈME

CINQUIÈME

SIXIÈME

1 Trouver une quatrième proportionnelle



Corr. p. 39

Pour chacune des questions suivantes, déterminer la quatrième proportionnelle :

1

6	9
8	

3

	56
27	72

2

10	
25	35

4

50	80
	30

2 Le café de René



Corr. p. 39

Avec 250 grammes de café, René prépare 32 expressos.
Quelle masse de café lui faut-il pour préparer 20 expressos ?

3 La fontaine de Brigitte



Corr. p. 39

Le débit de la fontaine de Brigitte est de 240 ℓ/h.
Combien de temps faut-il pour remplir un seau de 12 ℓ à cette fontaine ?

Définition

La **vitesse moyenne** (notée v) est le rapport de la distance parcourue (notée d) par la durée totale du trajet (notée t).

$$v = \frac{d}{t}$$

Exemple

Une voiture parcourt 40 km en 20 minutes (soit $\frac{1}{3}$ h).

$$v = \frac{40}{\frac{1}{3}} = 40 \times 3 = 120$$

Sa vitesse moyenne est donc de 120 km/h.

4 Sur le vélo d'Alfredo



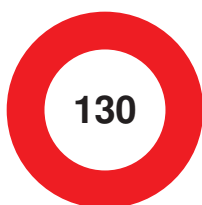
Corr. p. 39

Alfredo fait du vélo sur une route bien lisse. Il roule à vitesse uniforme et met un quart d'heure pour faire 4 250 mètres.
Calculer sa vitesse moyenne en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, puis en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

5 Sur l'autoroute



Corr. p. 40



Sur l'autoroute, sauf contre-indication, la vitesse est limitée à 130 km/h.

À quelle heure un automobiliste étant rentré sur une autoroute à 13h45 sortira-t-il 325 km plus loin s'il roule à vitesse maximale de façon constante ?

6 Téléphérique



Corr. p. 40

La vitesse d'une cabine de téléphérique est de 12,5 m/s. Sachant que la distance entre les deux gares est de 2 875 m, calculer la durée de trajet d'une cabine.

7 L'itinéraire de Pierre



Corr. p. 40

Pierre a un excellent ami à Nantes. Il souhaite lui rendre visite et prépare donc son itinéraire.

- De chez lui à l'autoroute, il y a 4,2 km à faire en ville ; il pense qu'il roulera en moyenne à 30 km/h.
- Il y a 246 km d'autoroute qu'il pense faire avec une vitesse moyenne de 120 km/h.
- Ensuite, il a 7 km en ville, qu'il compte faire à 25 km/h.

1 Estimer le temps moyen que Pierre mettra pour aller de chez lui à chez son ami.

2 Calculer la vitesse moyenne (notée v) de son trajet, arrondie à l'unité et exprimée en km/h puis la moyenne des trois nombres « 30 », « 120 » et « 25 ».

Que constate-t-on ?

3 Calculer la moyenne pondérée des vitesses. Que constate-t-on ?

4 Calculer $\frac{4,2 + 246 + 7}{v}$ d'une part, puis $\frac{4,2}{50} + \frac{246}{120} + \frac{7}{25}$ d'autre part.

Que constate-t-on ?

5 S'inspirer de la question précédente pour calculer rapidement la vitesse moyenne d'Étienne, qui a fait 5 km à 40 km/h, 90 km à 100 km/h puis 20 km à 50 km/h.

8 Orage ! Oh désespoir !



Corr. p. 42

La vitesse de la lumière (célérité) est à peu près égale à 3×10^8 m/s. Celle du son est à peu près égale à 340 m/s.

Lucile aperçoit un éclair dans le ciel et 3 secondes plus tard, elle entend le tonnerre.

À quelle distance de Lucile se trouve l'orage ?

1 Correction

1

6	9
8	$\frac{9 \times 8}{6} = 12$

2

10	$\frac{10 \times 35}{25} = 14$
25	35

3

$\frac{56 \times 27}{72} = 21$	56
27	72

4

50	80
$\frac{30 \times 50}{80} = 18,75$	30

2 Correction

On cherche la quatrième proportionnelle du tableau suivant :

Masse (en g)	250	x
Nombre d'expressos	32	20

L'égalité des produits en croix nous donne :

$$x = \frac{250 \times 20}{32} = 156,25$$

Il faut donc 156,25 g de café pour préparer 20 expressos.

3 Correction

On cherche la quatrième proportionnelle du tableau suivant :

Volume (en ℓ)	240	12
Durée (en min)	60	x

L'égalité des produits en croix nous donne : $x = \frac{12 \times 60}{240} = 3$.

Il faut donc 3 minutes pour remplir le seau.

4 Correction

Nous devons trouver la quatrième proportionnelle du tableau suivant :

Distance parcourue (en km)	4,25	17
Temps du parcours (en h)	0,25	1

$$\frac{1 \times 4,25}{0,25} = 17$$

Donc Alfredo roule à $17 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Pour convertir en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, on complète le tableau de proportionnalité suivant :

Distance parcourue (en m)	17 000	4,72
Temps du parcours (en s)	3 600	1

$$\frac{1 \times 17\,000}{3\,600} \approx 4,722$$

Donc Alfredo roule à $4,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

5 Correction

Il nous faut remplir le tableau de proportionnalité suivant :

Distance parcourue (en km)	130	325
Temps du parcours (en min)	60	150

$$\frac{325 \times 60}{130} = 150$$

Il faut donc 150 min, soit 2h30min, à cet automobiliste pour sortir. Il sortira donc à 16h15.

6 Correction

Il faut trouver la quatrième proportionnelle du tableau suivant :

Distance (en m)	12,5	2 875
Durée (en s)	1	230

$$\frac{2\,875 \times 1}{12,5} = 230$$

La durée du trajet est donc 230 s, soit 3 min 50 s.

7 Correction

1 Complétons le tableau suivant :

Distances parcourues (en km)	50	4,2	120	246	25	7
Temps (en h)	1	0,084	1	2,05	1	0,28

Le temps total est donc 2,414 h, soit 2h et $0,414 \times 60$ min, c'est-à-dire à peu près 2 h 25 min.

Pierre mettra donc à peu près 2 h 25 min pour aller chez son ami.

- 2 Calculons la vitesse moyenne du trajet :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{4,2 + 246 + 7}{2,414} \approx 106,55$$

La vitesse moyenne de Pierre est donc à peu près 106 km/h.

La moyenne des trois nombres est : $\bar{x} = \frac{30+120+25}{3} \approx 58,33$.

On peut donc constater que la moyenne classique (appelée *moyenne arithmétique*) des vitesses ne donne pas la vitesse moyenne du trajet.

- 3 La moyenne pondérée des vitesses est :

$$\frac{30 \times 4,2 + 120 \times 246 + 25 \times 7}{4,2 + 246 + 7} \approx 115,94$$

Cette dernière valeur n'est toujours pas égale à la vitesse moyenne du trajet.

- 4 Nous avons d'une part :

$$\frac{4,2 + 246 + 7}{v} = \frac{4,2 + 246 + 7}{106,55} \approx 2,414$$

D'autre part :

$$\frac{4,2}{50} + \frac{246}{120} + \frac{7}{25} \approx 2,414$$

On constate alors que les deux résultats sont égaux.

- 5 De la question précédente, on peut supposer que si l'on parcourt x km à v_1 km/h, y km à v_2 km/h et z km à v_3 km/h, la vitesse moyenne $\bar{v}$ est telle que :

$$\frac{x + y + z}{\bar{v}} = \frac{x}{v_1} + \frac{y}{v_2} + \frac{z}{v_3}$$

Dans notre cas, on a :

$$\begin{aligned} \frac{5 + 90 + 20}{\bar{v}} &= \frac{5}{40} + \frac{90}{100} + \frac{20}{50} \\ \frac{115}{\bar{v}} &= 1,425 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{115}{1,425} \\ &\approx 80,7\end{aligned}$$

La vitesse moyenne d'Étienne est donc à peu près 81 km/h

On dit que la vitesse moyenne est obtenue par moyenne harmonique pondérée des vitesses.

8 Correction

Il faut 1 seconde pour que le son fasse 340 mètres. Lucile a attendu 4 secondes donc le son a parcouru $4 \times 340 = 1\,320$ mètres.

L'orage est donc à 1 320 mètres de Lucile.

Grandeurs composées

9

Définition

Une **grandeur composée** est une grandeur dont l'unité est le produit ou le quotient de deux unités différentes.

Exemples

- 1 Le débit d'un robinet est une grandeur quotient : elle peut s'exprimer en ℓ/min (par exemple), ou en m^3/h .
- 2 La vitesse est une grandeur quotient : elle peut être exprimée en km/h ou en m/s .
- 3 L'énergie d'un appareil électroménager est une grandeur produit (elle est obtenue avec la formule : $E = P \times t$ où P est la puissance (exprimée en kilowatt) et t la durée de fonctionnement (exprimée en heure). Dans ce cas, l'unité est le kWh (kilowatt heure).

Méthode

Pour convertir une grandeur composée d'une unité à une autre, on peut trouver le coefficient de proportionnalité.

En effet, il y a proportionnalité lorsque l'on parle de grandeurs composées. Voyons cela sur un exemple classique.

Exemple

Convertir 50 m/s en km/h.

$$1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$$

$$1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$$

$$\text{Donc } 1 \text{ km/h} = 1\,000 \text{ m} / 3\,600 \text{ s} = \frac{10}{36} \text{ m/s.}$$

Le coefficient de proportionnalité est donc égal à 3,6 pour convertir des m/s en km/h.

$$50 \times 3,6 = 180$$

Donc 50 m/s = 180 km/h.

1 Conversion d'unités



Corr. p. 46

Convertir :

1 78 m/s en km/h

2 234 km/h en m/s

3 $18 \text{ m}^3/\text{h}$ en ℓ/s

4 9 Wh en kWmin

5 $0,3 \text{ kg/m}^3$ en g/cm^3

6 450 Wj en kWh (Wj = Wattjour)

2 Vitesse d'une roue



Corr. p. 46

Le diamètre d'une roue de voiture est de 14 pouces. Un pouce est égal à 2,54 cm.

- 1 Calculer la circonférence d'une roue exprimée en mètre (arrondir au centième).

On suppose que la voiture roule à la vitesse moyenne de 90 km/h.

- 2 Exprimer cette vitesse en m/min.

- 3 Déterminer la vitesse de rotation d'une roue en tour par minute (tr/min) (arrondir au dixième).

3 Connexion Internet



Corr. p. 46

En informatique, l'unité de taille utilisée est l'octet et celle des débits est le bits par seconde.

1 octet = 8 bits.

- 1 Un F.A.I. propose une connexion ADSL à 28 méga, c'est-à-dire un débit maximal de 28 mégabits par seconde (28 Mb/s).
 - a Sachant que 1 Mb = 1 024 Kb, convertir ce débit en kilobits par seconde (Kb/s).
 - b Sachant que 1 Ko = 1024 octets et que 1 Mo = 1024 Ko, convertir ce débit en mégaoctets par seconde (Mo/s).
 - c Quel temps faut-il pour télécharger un fichier de 250 Mo avec le débit maximal ?
- 2 En réalité, le temps de téléchargement de ce fichier est de 2 minutes. Déterminer le débit effectif de téléchargement en Ko/s, en Kb/s puis en Mb/s.

4 Vitesse d'un bateau



Corr. p. 47

La vitesse d'un bateau est fréquemment exprimée en nœuds.

Un nœud correspond à un mille marin par heure et un mille marin est la longueur de l'arc terrestre dont l'angle au centre de la Terre mesure $\frac{1}{60}^{\circ}$ de degré.

- 1 Sachant que la circonférence de la Terre mesure environ 40 000 km, déterminer la longueur d'un mille marin (au mètre près) et la correspondance d'un nœud en km/h.
- 2 Certains navires à grande vitesse (NGV) assurent la liaison Nice-Ajaccio, soit une traversée de 247 km. Leur vitesse est de 37 nœuds. Quelle est la durée, en heures et minutes, de cette traversée ?

1 Correction

- 1 $78 \text{ m/s} = 78 \times 3,6 \text{ km/h} = 280,8 \text{ km/h}$.
- 2 $234 \text{ km/h} = 234 \div 3,6 \text{ m/s} = 65 \text{ m/s}$.
- 3 $18 \text{ m}^3/\text{h} = 18 \times 1\,000\ell / 3\,600 \text{ s} = 5 \ell/\text{s}$.
- 4 $9 \text{ Wh} = 9 \text{ W} \times 60 \text{ min} = 0,009 \text{ kW} \times 60 \text{ min} = 0,54 \text{ kWmin}$.
- 5 $0,3 \text{ kg/m}^3 = 0,3 \times 1\,000 \text{ g} / 1\,000\,000 \text{ cm}^3 = 0,000\,3 \text{ g/cm}^3$.
- 6 $450 \text{ Wj} = 450 \text{ W} \times 24 \text{ h} = 450 \times 0,001 \text{ kW} \times 24 \text{ h} = 10,8 \text{ kWh}$.

2 Correction

- 1 La circonférence d'un cercle est donnée par la formule : $\pi \times D$, où D est le diamètre.

$$\pi \times 14 \times 2,54 = 111,71$$

Une roue aura donc pour circonférence 112 cm, soit 1,12 m.

- 2 $90 \text{ km/h} = 90 \times 1\,000 \text{ m} / 60 \text{ min} = 1\,500 \text{ m/min}$.
- 3 1 tour = 1,12 m donc $1\,500 \text{ m/min} = 1\,500 \div 1,12 \text{ tr/min}$, soit **1 339,3 tr/min**.

3 Correction

- 1
 - a $28 \text{ Mb/s} = 28 \times 1\,024 \text{ Kb/s} = 28\,672 \text{ Kb/s}$.
 - b $28 \text{ Mb/s} = 28 \times 1\,024^2 \text{ b/s} = 28 \times 1\,024^3 \div 8 \text{ o/s} = 28 \div 8 \text{ Mo/s} = 3,5 \text{ Mo/s}$.
 - c $250 \div 3,5 \approx 71,4$.
Il faut donc à peu près 71 secondes, soit 1 min 11 s pour télécharger le fichier.
- 2 Il faut 120 secondes pour télécharger 250 Mo, donc le débit est $250 \div 120 \text{ Mo/s}$, soit 2,083 Mo/s ou encore $2,083 \times 1\,024 \text{ Ko/s}$, soit **2 133 Ko/s** ou $2\,133 \times 8 \text{ Kb/s}$, soit **17 064 Kb/s**, ou encore $17\,064 \div 1\,024 \text{ Mb/s}$, soit à peu près **17 Mb/s**.

4 Correction

- 1 La longueur d'un arc de cercle dont l'angle au centre est $\frac{1}{60}^{\text{e}}$ de degré est :

Longueur (en m)	40 000	x
Angle au centre (en degré)	360	$\frac{1}{60}$

$$x = \frac{40\,000 \times \frac{1}{60}}{360} = 1,852$$

Un mille marin est donc égal à 1 852 mètres.

On en déduit alors : **1 nœud = 1,852 km/h**

- 2 37 nœuds = $37 \times 1,852 \text{ km/h} = 68,524 \text{ km/h}$.

Distance (en km)	68,524	247
Durée (en h)	1	x

$$x = \frac{247}{68,524} \approx 3,604576499$$

Donc $x = 3 \text{ h} + 0,604576499 \times 60 \text{ min}$,
soit $x = 3 \text{ h } 36 \text{ min}$.

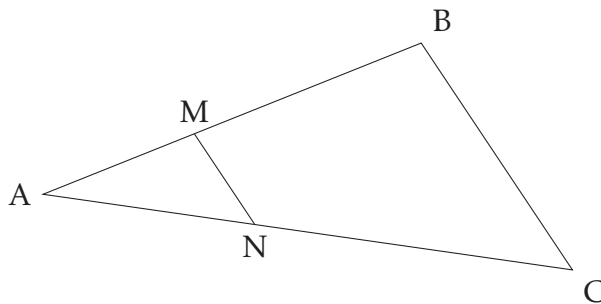
Il faut donc 3 h 36 min à un NGV pour effectuer le trajet Nice-Ajaccio.

Proportionnalité et géométrie

10

1 LE THÉORÈME DE THALÈS

Observons la figure suivante :



On sait que :

- 1 A, M et B sont alignés dans cet ordre
- 2 A, N et C sont alignés dans cet ordre
- 3 (MN) et (BC) sont parallèles

Le tableau suivant est alors un tableau de proportionnalité :

AM	AN	MN
AB	AC	BC

ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

C'est le **théorème de Thalès**.

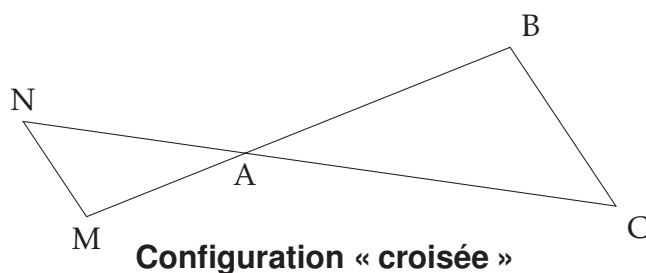
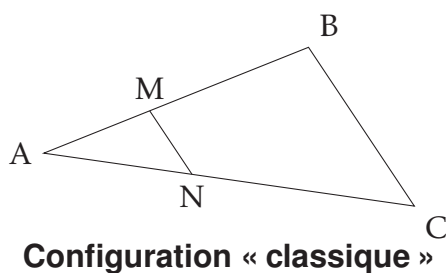
Propriété

Si les points A, M et B d'une part, A, N et C d'autre part, sont alignés dans cet ordre, et si (MN) est parallèle à (BC), alors nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

1. Le théorème de Thalès

Il existe deux configurations du théorème de Thalès :



Propriété

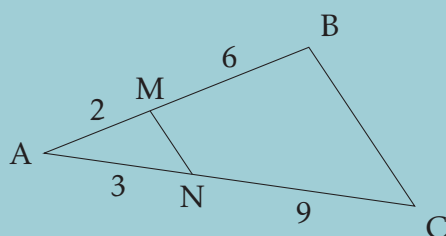
Si les points A, M et B d'une part, A, N et C d'autre part, sont alignés dans cet ordre, et si nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

alors (MN) est parallèle à (BC).

C'est la **réci-proque du théorème de Thalès**.

Exemple



$$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) et (BC) sont parallèles.

2

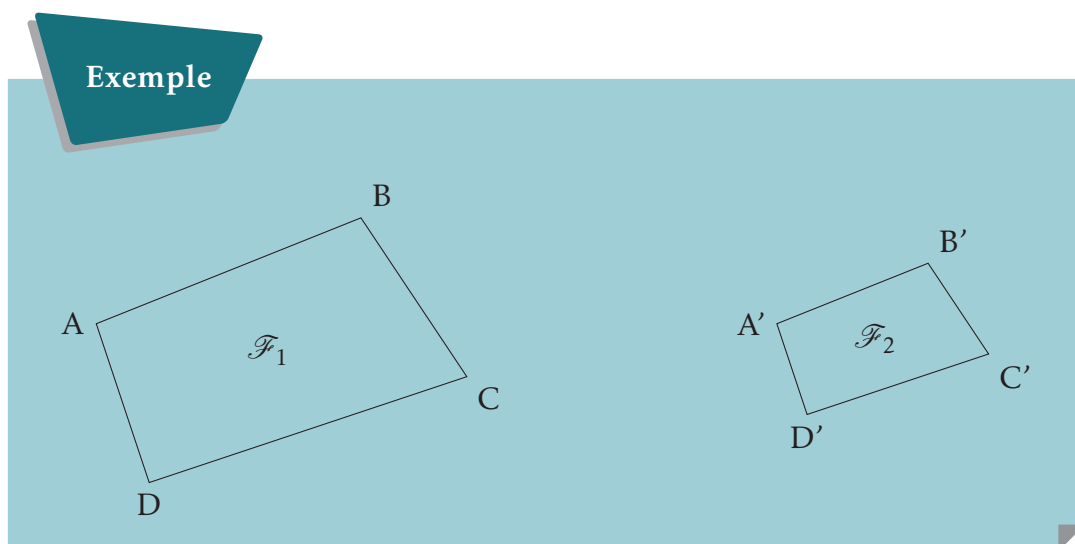
AGRANDISSEMENT ET RÉDUCTION

Définition

Une figure $\mathcal{F}_2$ est un **agrandissement** ou une **réduction** d'une autre figure $\mathcal{F}_1$ lorsque leurs longueurs sont proportionnelles.

Si le coefficient de proportionnalité de $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_2$ est strictement supérieur à 1, on parle d'**agrandissement**. S'il est strictement inférieur à 1, on parle de **réduction**.

Exemple



Propriété

Soient ABC et AMN deux triangles tels que AMN est une réduction de ABC de coefficient k .

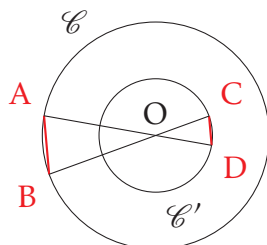
Alors,

$$\text{aire}(AMN) = k^2 \text{aire}(ABC)$$

1 Une histoire de cercles



Corr. p. 53



$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 5 cm.

$\mathcal{C}'$ est un cercle de centre O.

A et B sont deux points de $\mathcal{C}$, C et D sont deux points de $\mathcal{C}'$.

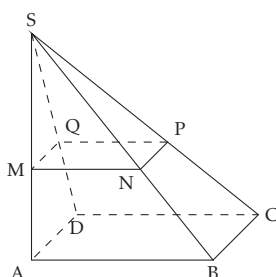
(AD) et (BC) se coupent en O. De plus, $AB = 45$ mm et $CD = 20$ mm.

- 1 Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles.
- 2 Déterminer le rayon de $\mathcal{C}'$ en millimètre.

2 Au brevet Juin 2006, Groupe 3



Corr. p. 53



SABCD est une pyramide à base carrée de hauteur [SA] telle que $AB = 9$ cm et $SA = 12$ cm.

Le triangle SAB est rectangle en A. Soit M un point de [SA] tel que $SM = x$ cm, où x est compris entre 0 et 12.

On appelle MNPQ la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base passant par M.

- 1 Montrer que $MN = 0,75x$.
- 2 Soit $A(x)$ l'aire du carré MNPQ en fonction de x . Montrer que $A(x) = 0,5625x^2$.
- 3 Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	2	4	6	8	10	12
$A(x)$							

- 4 Placer dans un repère orthogonal les points d'abscisse x et d'ordonnée $A(x)$ donnés par le tableau.
On placera l'origine en bas à gauche et on prendra 1 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée.
- 5 L'aire de MNPQ est-elle proportionnelle à la longueur SM? Justifier à l'aide du graphique.

3 Triplets pythagoriciens



Corr. p. 55

On considère un triangle ABC rectangle en A, et on note $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

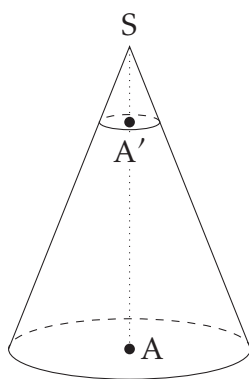
- 1 Montrer que si l'on multiplie a , b et c par un nombre k non nul, alors on obtient les dimensions d'un triangle rectangle.
- 2 Sachant que le triangle de dimensions 3 cm, 4 cm et 5 cm est rectangle, celui de dimensions 4,8 cm, 6,4 cm et 8 cm est-il rectangle ?

4 Au brevet Juin 2005, Groupe Nord



Corr. p. 55

Sur la figure ci-contre, on a un cône de révolution tel que $SA = 12$ cm. Un plan parallèle à la base coupe ce cône tel que $SA' = 3$ cm. (La figure n'est pas à l'échelle)



- 1 Le rayon du disque de base du grand cône est de 7 cm. Calculer la valeur exacte du volume du grand cône.
- 2 Quel est le coefficient de réduction qui permet de passer du grand cône au petit cône ?
- 3 Calculer la valeur exacte du volume de ce petit cône, puis en donner une valeur arrondie au centimètre cube.

1 Correction

- 1 C et D sont sur $\mathcal{C}'$ donc $OC = OD$.
De même, $OA = OB$, donc nous pouvons écrire :

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OA}$$

De plus, C, O et B d'une part, D, O et A d'autre part, sont alignés dans cet ordre.

Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (AB) et (CD) sont parallèles.

- 2 D'après ce qui précède, et d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OC}{OB} = \frac{CD}{AB}$$

D'où :

$$\frac{OC}{50} = \frac{20}{45}$$

On peut donc écrire :

$$OC = \frac{50 \times 20}{45} = \frac{200}{9}$$

Le rayon de $\mathcal{C}'$ est donc égal à $\frac{200}{9}$ mm.

2 Correction

- 1 Dans le triangle SAB,
- S, M et A sont alignés dans cet ordre
 - S, N et B sont alignés dans cet ordre
 - (MN) et (AB) sont parallèles

Ainsi, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB}$$

Donc :

$$\frac{x}{12} = \frac{MN}{9}$$

Par conséquent, $MN = \frac{9x}{12} = 0,75x$.

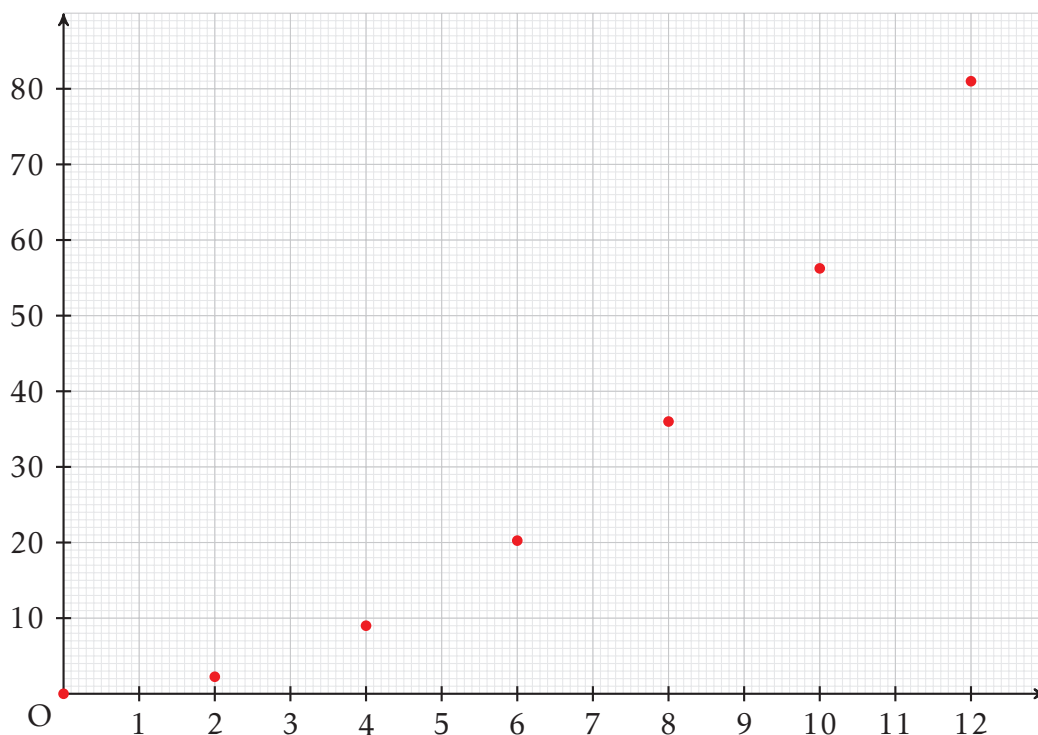
2 MNPQ est une réduction de ABCD donc MNPQ est un carré. Ainsi :

$$\begin{aligned} A(x) &= MN^2 \\ &= (0,75x)^2 \\ &= 0,75^2 x^2 \\ A(x) &= 0,5625x^2 \end{aligned}$$

3 On a :

x	0	2	4	6	8	10	12
$A(x)$	0	2,25	9	20,25	36	56,25	81

4 Le graphique est le suivant :



- 5 Les points obtenus sur le graphique précédent ne sont pas alignés. Ainsi, x et $A(x)$ ne sont pas des grandeurs proportionnelles.

3 Correction

- 1 ABC est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Le nouveau triangle a pour dimensions ka , kb et kc . Or,

$$\begin{aligned}(kb)^2 + (kc)^2 &= k^2b^2 + k^2c^2 \\ &= k^2(b^2 + c^2) \\ &= k^2a^2 \quad \text{car } a^2 = b^2 + c^2 \\ &= (ka)^2\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le nouveau triangle (qui est une réduction ou un agrandissement de ABC) est aussi rectangle.

- 2 On a :

$$\frac{4,8}{3} = \frac{6,4}{4} = \frac{8}{5} = 1,6$$

Ainsi, on a multiplié les dimensions du premier triangle par 1,6 et donc, d'après la question précédente, le second triangle est aussi rectangle.

4 Correction

- 1 La formule qui donne le volume d'un cône est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

où R est le rayon de la base et h la hauteur du cône. Ainsi, ici, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{1}{3}\pi \times 7^2 \times 12 \\ &= \frac{1}{3}\pi \times 49 \times 12 \\ \mathcal{V} &= 196\pi\end{aligned}$$

Le volume du grand cône est donc égal à $196\pi \text{ cm}^3$.

- 2 La hauteur du grand cône est 12 cm ; celle du petit est 3 cm. Par conséquent, on a multiplié par $\frac{1}{4}$ la hauteur du grand cône pour obtenir celle du petit.

Ainsi, le coefficient de réduction qui permet de passer du grand cône au petit cône est $\frac{1}{4}$.

- 3 D'après le cours, si $\mathcal{V}'$ représente le volume du petit cône, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}' &= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \mathcal{V} \\ &= \frac{1}{4^3} \times 196\pi \\ &= \frac{49}{16}\pi\end{aligned}$$

Le volume exact du petit cône est donc $\frac{49}{16}\pi \text{ cm}^3$, ce qui donne à peu près 10 cm^3 .