

5 juin 2018

Des méthodes

d'intégration

Stéphane PASQUET

NUMERICAL

Avant propos

Cet ouvrage est assez vieux et il doit y avoir quelques améliorations...

Je suis ouvert à toute critique, toute remarque constructive, donc n'hésitez pas à me contacter à l'adresse suivante si vous en estimez le besoin :

<http://www.mathweb.fr>

En espérant que ce qui va suivre vous aidera,

Stéphane PASQUET

Sommaire

1	INTRODUCTION	1
1.1	Historique	1
1.2	L'opérateur de dérivation & d'intégration	2
1.3	Tableau des principales primitives	4
1.4	Exercices	5
2	UNE HISTOIRE D'AIRE	8
2.1	Fonctions à valeurs positives	10
2.2	Fonctions à valeurs négatives	11
2.3	Fonctions à signe non constant	12
2.4	Exercices	13
3	CALCULS DE VOLUMES	17
3.1	Engendrer un solide à partir d'une courbe	17
3.2	Calcul du volume d'une boule	18
3.3	Calcul du volume d'une ellipsoïde	18
3.4	Volume d'un cône de révolution	19
4	LONGUEUR D'UNE COURBE	20
4.1	Courbes paramétrées	20
4.2	Courbes cartésiennes	21
4.3	Courbes polaires	22
5	MÉTHODES D'INTÉGRATION	24
5.1	Intégration par parties	24
5.2	Décomposition en éléments simples	26
5.3	Changement de variable	28
6	INTÉGRALES MULTIPLES	30
6.1	Intégrales doubles	30

1 Introduction

Historique

Le calcul intégral fait partie d'une branche plus vaste des mathématiques, que l'on nomme le *calcul infinitésimal*.

Le développement du calcul infinitésimal est attribué à Archimède, Leibniz et Newton. Cependant, lorsque le calcul infinitésimal a été initialement développé, une controverse fut soulevée sur qui en avait la paternité ; Leibniz et Newton étant les principaux candidats. La vérité ne sera probablement jamais connue et de toute façon, elle importe peu de nos jours. La contribution majeure de Leibniz fut sans conteste son système de notation.

La controverse fut cependant malheureuse car elle a divisé pendant de nombreuses années les mathématiciens anglophones et ceux du reste de l'Europe. Cela a retardé le progrès de l'analyse (mathématiques basées sur le calcul infinitésimal) en Grande-Bretagne pendant longtemps. La terminologie et les notations de Newton étaient clairement moins flexibles que celles de Leibniz. Elles furent malgré tout conservées jusqu'au début du XIX^e siècle lorsque le travail de l'Analytical Society introduisit avec succès la notation de Leibniz en Grande-Bretagne.

On pense que Newton a découvert plusieurs concepts bien avant Leibniz, mais que ce dernier fut le premier à les publier. Actuellement, on considère que Leibniz et Newton ont développé le calcul infinitésimal indépendamment.

Barrow, Descartes, Fermat, Huygens et Wallis contribuèrent également dans une moindre mesure au développement du calcul infinitésimal.

Kowa Seki, un mathématicien japonais contemporain de Leibniz et Newton, a aussi énoncé quelques principes fondamentaux du calcul intégral. Cependant, son travail ne fut pas connu en Occident à cette époque suite au manque de contacts avec l'Extrême-Orient.

La justification première du développement du calcul différentiel était de trouver une solution du « problème de la tangente ».

Ce n'est qu'au XIX^e siècle que le concept de limite sera véritablement explicité. Et c'est seulement ainsi que le calcul différentiel pourra vraiment se développer.

Car, en effet, ce ne sont pas sur des rapports que travaillent Newton et Leibniz, mais bien sur des limites de rapport, et c'est ce concept qui est la base de tout le reste. C'est à cette époque que le nombre réel comme nous le connaissons est véritablement introduit chez les mathématiciens. Autant chez Newton que chez Leibniz, c'est cette conception qui manque et qui les empêche de fonder la limite sur des bases rigoureuses. Le nombre comme ils le conçoivent est encore très inspiré de la vision d'Euclide. Et sans la caractérisation de la densité et du caractère intrinsèquement infini des réels, le concept de limite ne peut voir le jour.

C'est ce qui fait que leurs détracteurs, au nombre desquels George Berkeley, seront très nombreux. On accusera aussi Leibniz d'avoir copié l'œuvre de Newton. S'en suivront de nombreuses disputes et des attaques personnelles entre les deux hommes. Nous pouvons cependant constater que leurs approches sont très différentes et c'est cette différence qui apporte toute sa richesse et toute son inventivité à ce nouveau concept. C'est aussi ces deux visions des choses, dans leurs points communs et dans leurs dissemblances, qui peuvent nous permettre, encore aujourd'hui, de mieux comprendre ce concept de valeur infinitésimale. En effet, c'est son rapport avec la physique, la philosophie ou la géométrie, qu'eux-mêmes ont dû faire pour le conceptualiser, qui nous donne la possibilité de le saisir dans son ensemble.

Malgré les critiques, les méthodes simples et claires mises au point par Newton et Leibniz, en particulier le nouveau formalisme introduit par Leibniz, permettent de résoudre le problème des tangentes et de la quadrature, qui préoccupaient beaucoup les mathématiciens de l'époque. Et c'est pourquoi elles se sont petit à petit fait accepter jusqu'à leur fondation sur des bases solides au XIX^e siècle. Nous devons encore beaucoup à ces concepts et nous utilisons encore d'ailleurs le formalisme de Leibniz de façon courante et même celui de Newton en physique. Et c'est pourquoi, encore aujourd'hui, Newton et Leibniz, au-delà de leurs querelles, sont considérés comme les fondateurs du calcul infinitésimal.

Source : <http://fr.wikipedia.org>

L'opérateur de dérivation & d'intégration

Définition 1.1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$ de variable x , dont la dérivée est f' . On appellera **opérateur de dérivation**, et on notera $\frac{d}{dx}$, l'opérateur mathématique tel que :

$$\forall x \in \mathcal{I}, \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

On reconnaît ici une notation très utilisée en sciences physiques.

Cet opérateur admet un *opérateur réciproque*, que l'on va noter « $\int$ », c'est-à-dire tel que, pour une fonction f dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$:

$$\forall x \in \mathcal{I}, \int \frac{df(x)}{dx} = \frac{d \int f(x)}{dx} = f(x)$$

Définition 1.2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$. On appelle **primitive** de f toute fonction F telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque

Il n'existe pas qu'une seule primitive à une fonction. En effet, si F est une primitive de f , alors pour tout réel k , $F + k$ est aussi une primitive de f car $(F + k)' = F' + k' = F' + 0 = F' = f$.

Exemple 1.1

1 $f(x) = x^2$ donc $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k, k \in \mathbb{R}$.

2 $f(x) = \cos x$ donc $F(x) = \sin x + k, k \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathcal{I} = [a; b]$.

On appellera **intégrale** de f sur $\mathcal{I}$ le nombre :

$$F(b) - F(a)$$

et on notera :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Proposition 1.1 (Linéarité)

Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a; b]$, pour tout nombre réel λ , on a :

1 $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2 $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Exemple 1.2

1 $\int_0^1 (x^2 + x^3)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 x^3dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

2 $\int_0^1 (4x^2)dx = 4 \int_0^1 x^2dx = 4 \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Proposition 1.2 (Relation de Chasles)

Pour toute fonction f continue sur $[a; b]$, pour tout nombre réel $c \in [a; b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Tableau des principales primitives

Fonctions	Primitives	Remarques
λ	λx	$\lambda \in \mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$	$k \in \mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + k$	$k \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$	$x > 0, k \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$x \neq 0, k \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{2x^2} + k$	$x \neq 0, k \in \mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$x > 0, k \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k$	$k \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$k \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\ln \cos x + k$	$x \neq \frac{\pi}{2} + p\pi, p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x + k$	$k \in \mathbb{R}$
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + k$	$\lambda \in \mathbb{R}^*, k \in \mathbb{R}$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$u \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$	$n \neq 1, u \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$v' \times u' \circ v$	$u \circ v$	
$u'e^u$	e^u	

Exercices

Exercice 1.1 *Primitives de polynômes*★ Correction p. 6

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les primitives :

$$1 \quad f_1(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

$$3 \quad f_3(x) = x\sqrt{3} - x^2\sqrt{2} + 1$$

$$2 \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$4 \quad f_4(x) = 10^9 x^{10} - 10^{-10} x^9$$

Exercice 1.2 *Primitives de fonctions inverses*★ Correction p. 6

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les primitives :

$$1 \quad f_1(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}$$

$$3 \quad f_3(x) = \frac{\sqrt{10}}{x^{10}}$$

$$2 \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x^{-3} + \frac{1}{2}x^{-2}$$

$$4 \quad f_4(x) = 10^9 x^{-10} - 10^{-10} x^{-9}$$

Exercice 1.3 *Primitives de fractions rationnelles*★ Correction p. 6

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les primitives :

$$1 \quad f_1(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$3 \quad f_3(x) = \frac{5x^4+9}{(x^5+9x+1)^5}$$

$$2 \quad f_2(x) = \frac{x^2+1}{x^3+3x}$$

$$4 \quad f_4(x) = \frac{16x^7+10x^4}{(x^8+x^5+9)^7}$$

Exercice 1.4 *Primitives de fonctions composées*★ Correction p. 7

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les primitives :

$$1 \quad f_1(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$3 \quad f_3(x) = (2x+7)\sin(x^2+7x+3)$$

$$2 \quad f_2(x) = (3x^2-5)e^{x^3-5x+1}$$

$$4 \quad f_4(x) = \frac{3x+1}{x^3+x+1}$$

Exercice 1.5 *Primitives de produits*★★ Correction p. 7

Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive :

$$1 \quad f_1(x) = (5^4x+9)(x^5+9x-8)$$

$$4 \quad f_4(x) = \frac{(2x+3)\ln(x^2+3x+7)}{x^2+3x+7}$$

$$2 \quad f_2(x) = (15x-25)(x^3-5x+1)^2$$

$$5 \quad f_5(x) = (2x+1)(e^{x^2+x+1})^9$$

$$3 \quad f_3(x) = (x+1)^2\left(\frac{1}{3}x^3+x^2+x-1\right)^5$$

$$6 \quad f_6(x) = \sin x (\cos x)^3$$

Corrections

Exercice 1

- 1 $F_1(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + k, k \in \mathbb{R}.$
- 2 $F_2(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + k, k \in \mathbb{R}.$
- 3 $F_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}x^3 + x + k, k \in \mathbb{R}.$
- 4 $F_4(x) = \frac{10^9}{11}x^{11} - 10^{-11}x^{10} + k, k \in \mathbb{R}.$

Exercice 2

- 1 $F_1(x) = -x^{-1} + \frac{3}{2}x^{-2} + k = \frac{-1}{x} + \frac{3}{2x^2} + k, k \in \mathbb{R}.$
- 2 $F_2(x) = -\frac{1}{6}x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-1} + k = -\frac{1}{6x^2} - \frac{1}{2x} + k, k \in \mathbb{R}.$
- 3 $F_3(x) = -\frac{\sqrt{10}}{9}x^{-9} + k = -\frac{\sqrt{10}}{9x^9} + k, k \in \mathbb{R}.$
- 4 $F_4(x) = -\frac{10^9}{9}x^{-9} + \frac{10^{-10}}{8}x^{-8} + k, k \in \mathbb{R}.$

Exercice 3

- 1 $f_1(x)$ est de la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = x^2 + x + 1$.
Donc $F_1(x) = \ln(x^2 + x + 1) + k, k \in \mathbb{R}.$

N.B. $x^2 + x + 1 > 0$ donc on ne met pas de valeur absolue au ln.

- 2 $f_2(x)$ est de la forme $3\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = x^3 + 3x$.
Donc $F_2(x) = 3\ln|x^3 + 3x| + k, x > 0$ et $k \in \mathbb{R}.$
- 3 $f_3(x)$ est de la forme $\frac{u'}{u^5}$, avec $u(x) = x^5 + 9x + 1$.
Donc $F_3(x) = -\frac{1}{4(x^5 + 9x + 1)^4} + k, k \in \mathbb{R}.$
- 4 $f_4(x)$ est de la forme $2\frac{u'}{u^7}$, où $u(x) = x^8 + x^5 + 9$.
Donc $F_4(x) = -\frac{1}{3(x^8 + x^5 + 9)^6} + k, k \in \mathbb{R}.$

Exercice 4

- 1 $f_1(x)$ est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, avec $u(x) = x^2 + x + 1$.
Donc $F_1(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + k, k \in \mathbb{R}$.
- 2 $f_2(x)$ est de la forme $u'e^u$, avec $u(x) = x^3 - 5x + 1$.
Donc $F_2(x) = e^{x^3 - 5x + 1} + k, k \in \mathbb{R}$.
- 3 $f_3(x)$ est de la forme $u' \sin u$, avec $u(x) = x^2 + 7x + 3$.
Donc $F_3(x) = -\cos(x^2 + 7x + 3) + k, k \in \mathbb{R}$.
- 4 $f_4(x)$ est de la forme $2\frac{u'}{u}$, où $u(x) = x^3 + x + 1$.
Donc $F_4(x) = \ln|x^3 + x + 1| + k, k \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

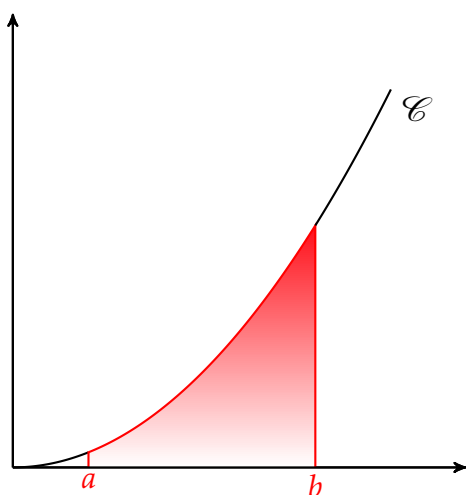
- 1 $f_1(x)$ est de la forme $u'u$, où $u(x) = x^5 + 9x - 8$.
Donc $F_1(x) = \frac{1}{2}(x^5 + 9x - 8)$.
- 2 $f_2(x)$ est de la forme $5u'u^2$, où $u(x) = x^3 - 5x + 1$.
Donc $F_2(x) = \frac{5}{3}(x^3 - 5x + 1)^3$.
- 3 $f_3(x)$ est de la forme $u'u^5$, où $u(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 1$.
Donc $F_3(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 1\right)^6$.
- 4 $f_4(x)$ est de la forme $u'u$, où $u(x) = \ln(x^2 + 3x + 7)$.
Donc $F_4(x) = \frac{1}{2}(\ln(x^2 + 3x + 7))^2$.
- 5 $f_5(x)$ est de la forme $u'u^8$, où $u(x) = e^{x^2 + x + 1}$.
Donc $F_5(x) = \frac{1}{9}(e^{x^2 + x + 1})^9$.
- 6 $f_6(x)$ est de la forme $-u'u^3$, où $u(x) = \cos x$.
Donc $F_6(x) = -\frac{1}{4}(\cos x)^4$.

Une histoire d'aire

Activité 2.1

Nous allons calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous, représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, où $b > a > 0$.

On divise $[a; b]$ en n subdivisions de même amplitude $\frac{b-a}{n}$, notées $I_k = \left[a; a + \frac{b-a}{n}k \right]$, pour $1 \leq k \leq n$.



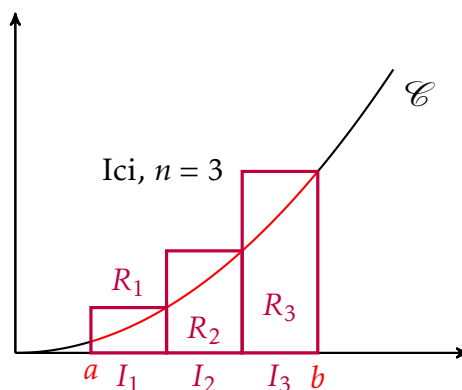
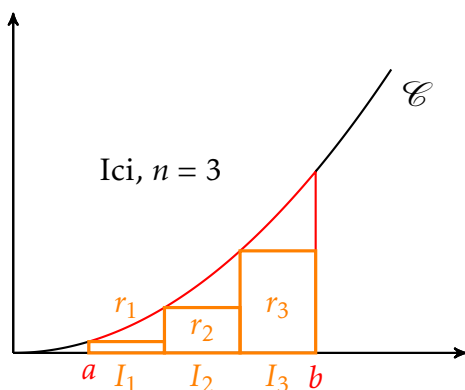
- On considère la famille de rectangles r_k de base I_k et de hauteur $f\left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\right)$, d'aire a_k , puis la famille de rectangles R_k de base I_k et de hauteur $f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$, d'aire A_k , pour $1 \leq k \leq n$.

Montrer que $\sum_{k=1}^n a_k \leq \mathcal{A} \leq \sum_{k=1}^n A_k$.

- Exprimer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n A_k$ et en déduire une expression de $\mathcal{A}$.

- Exprimer $\int_a^b f(x)dx$. Comparer avec le résultat précédent.

- Voyons sur deux schémas ce qui se passe :



Nous voyons alors que la somme des aires des r_k est toujours inférieure à $\mathcal{A}$, alors que la somme des aires des R_k est toujours supérieure à $\mathcal{A}$, d'où l'encadrement demandé.

2

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{b-a}{n} \times f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) \\
 &= \frac{b-a}{n} \times \left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right)^2 \\
 &= \frac{b-a}{n} \times \left[a^2 + 2a(k-1)\frac{b-a}{n} + (k-1)^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right] \\
 &= a^2\frac{b-a}{n} + 2a(k-1)\frac{(b-a)^2}{n^2} + (k-1)^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^3
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n a^2\frac{(b-a)^2}{n} + \sum_{k=1}^n 2a(k-1)\frac{b-a}{n^2} + \sum_{k=1}^n (k-1)^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \\
 &= a^2\frac{b-a}{n} \times n + 2a\frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \\
 &= a^2(b-a) + 2a\frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\
 &= a^2b - a^3 + \frac{a(b-a)^2n^2 - a(b-a)^2n}{n^2} + \frac{2(b-a)^3n^3 - 3(b-a)^3n^2 + (b-a)^3n}{6n^3}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k &= a^2b - a^3 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} \\
 &= \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3
 \end{aligned}$$

On pourrait alors démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n A_k = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\mathcal{A} = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$.

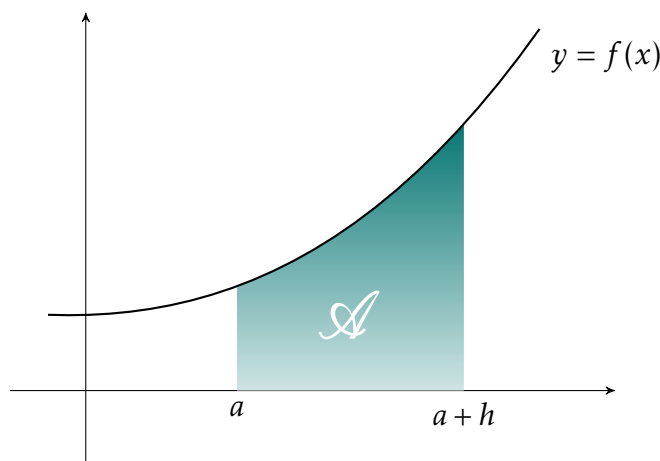
$$\boxed{3} \quad \int_a^b x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3 = \mathcal{A}.$$

Fonctions à valeurs positives

Considérons une fonction f , continue sur un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathcal{I}, f(x) \geq 0$$

Notons alors $\mathcal{A}(a)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$. Ainsi, l'aire du domaine représenté ci-dessous :



est égale à :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a) \quad , \quad h \geq 0$$

Or, le rectangle de longueur h et de largeur $\max(f(a); f(a+h))$ a une aire supérieure à $\mathcal{A}$ et le rectangle de longueur h et de largeur $\min(f(a); f(a+h))$ a une aire inférieure à $\mathcal{A}$. D'où :

$$h \times \min(f(a); f(a+h)) \leq \mathcal{A} \leq h \times \max(f(a); f(a+h))$$

Ainsi :

$$\min(f(a); f(a+h)) \leq \frac{\mathcal{A}}{h} \leq \max(f(a); f(a+h))$$

ou encore :

$$\min(f(a); f(a+h)) \leq \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(h)}{h} \leq \max(f(a); f(a+h))$$

On en déduit alors, par passage à la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(h)}{h} = f(a)$$

Ce dernier résultat est valable pour tout a , donc la fonction $\mathcal{A} : x \mapsto \mathcal{A}(x)$ est une primitive de f .

On peut alors écrire :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(h) = \int_a^{a+h} f(x) dx$$

On peut alors écrire le théorème suivant :

Théorème 2.1

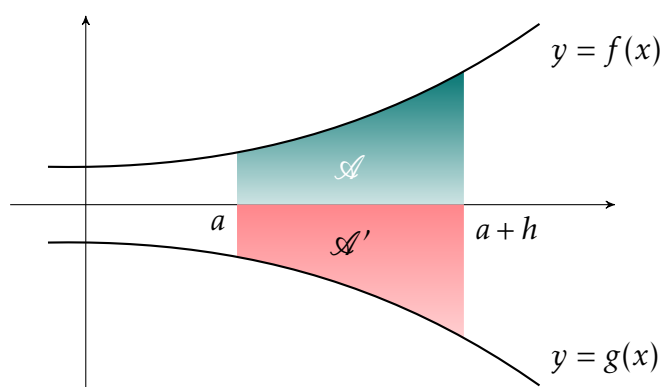
Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, de courbe représentative $\mathcal{C}$, telle que $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$.

L'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$$

Fonctions à valeurs négatives

Considérons la fonction f , positive sur $\mathcal{I}$, et la fonction g telle que $g(x) = -f(x)$ sur $\mathcal{I}$.



On a alors :

$$\mathcal{A}' = \int_a^{a+h} g(x) dx = \int_a^{a+h} (-f(x)) dx = - \int_a^{a+h} f(x) dx = -\mathcal{A}$$

De plus, par rapport à ce qui a été écrit dans la section précédente, on peut affirmer que $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

D'où le théorème suivant :

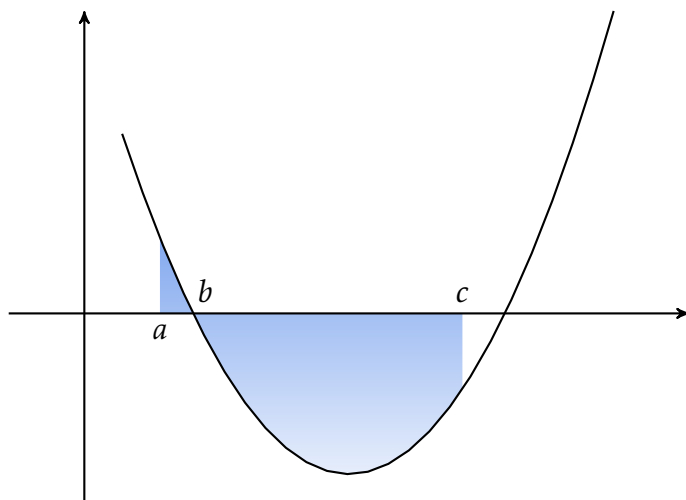
Théorème 2.2

Soit f une fonction continue négative sur $[a; b]$, de courbe représentative $\mathcal{C}$, telle que $f(x) \leq 0$ sur $[a; b]$.

L'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$$

Fonctions à signe non constant



J'ai représenté ci-dessus la courbe représentative d'une fonction f sur un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$. Sur $[a; c] \subseteq \mathcal{I}$, $f(x)$ n'est pas de signe constant. Ainsi, pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine représenté en bleu, nous devons utiliser la relation de Chasles :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c (-f(x))dx$$

Dans un cas général, on peut énoncer le théorème suivant :

Proposition 2.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$, de courbe représentative $\mathcal{C}$, telle que :

$$\begin{cases} \mathcal{I} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_n \oplus \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \dots \mathcal{N}_p \\ \forall x \in \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n, f(x) \geq 0 \\ \forall x \in \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_p, f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Alors, l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^n \int_{\mathcal{P}_k} f(x)dx - \sum_{k=1}^p \int_{\mathcal{N}_k} f(x)dx$$

où $\int_A f(x)dx$ représente l'intégrale de f sur l'intervalle A .

Exercices

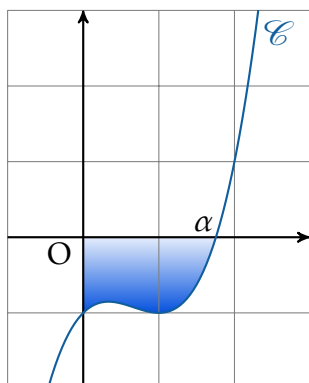
Exercice 2.1 (Calcul d'aires)

★★

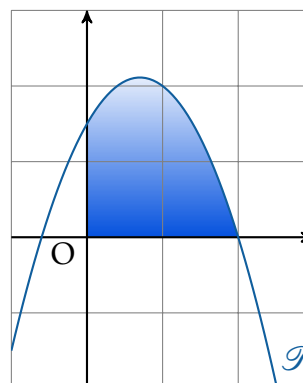
Correction p. 14

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'aire du domaine colorié.
Un carreau a toujours 1 unité de côté.

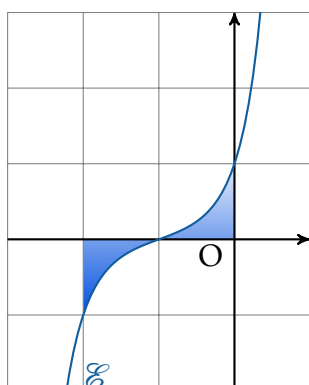
- 1 $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 1$, où $f(\alpha) = 0$, avec $\alpha \approx 1,7548$.



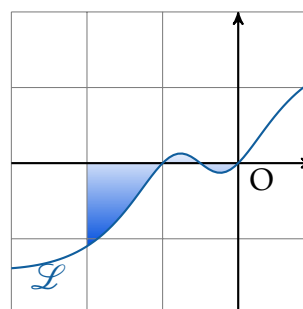
- 2 $\mathcal{P}$ est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto -\frac{5}{4}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{3}{2}$.



- 3 $\mathcal{E}$ est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto (x+1)e^{x^2+2x}$.



- 4 $\mathcal{L}$ est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{(2x+1)}{x^2+x+1} \ln(x^2+x+1)$.

**Exercice 2.2** (Limite d'une somme)

★★

Correction p. 15

Montrer que :

$$\forall \lambda \geq 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k \frac{\lambda}{n}} \right) = e^\lambda - 1$$

Exercice 2.3 (Constante d'Euler)

★★★

Correction p. 15

On considère la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

Montrez qu'elle converge.

Corrections

Exercice 1

- 1 Une primitive de $f(x)$ est $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - x$ et la fonction est négative sur $[0; \alpha]$. Donc l'aire du domaine est :

$$\begin{aligned} -\int_0^{\alpha} f(x)dx &= F(0) - F(\alpha) \\ &= -\frac{1}{4}\alpha^4 + \frac{2}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha + \alpha \\ &\approx 2,8522 \end{aligned}$$

- 2 f est positive sur $[0; 2]$ et une primitive de f est la fonction F définie par $F(x) = -\frac{5}{12}x^3 + \frac{7}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$. Donc l'aire du domaine est :

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= F(2) - F(0) \\ &= -\frac{5}{12} \times 8 + \frac{7}{8} \times 4 + \frac{3}{2} \times 2 \\ &= -\frac{10}{3} + \frac{7}{2} + 3 \\ &= \frac{-20 + 21 + 18}{6} \\ &= \frac{19}{6} \end{aligned}$$

- 3 f est négative sur $[-2; -1]$ puis positive sur $[-1; 0]$, et une primitive de f est définie par $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+2x}$. Donc l'aire du domaine est :

$$\begin{aligned} -\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^0 f(x)dx &= F(-2) - F(-1) + F(0) - F(-1) \\ &= \frac{1}{2} - e^{-1} + \frac{1}{2} \\ &= 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

- 4 f est négative sur $[-2; -1[$ et sur $]-\frac{1}{2}; 0]$, puis positive sur $]-1; -\frac{1}{2}[$. De plus, une primitive de f est la fonction définie par $F(x) = \frac{1}{2}[\ln(x^2 + x + 1)]^2$. Donc l'aire du domaine est :

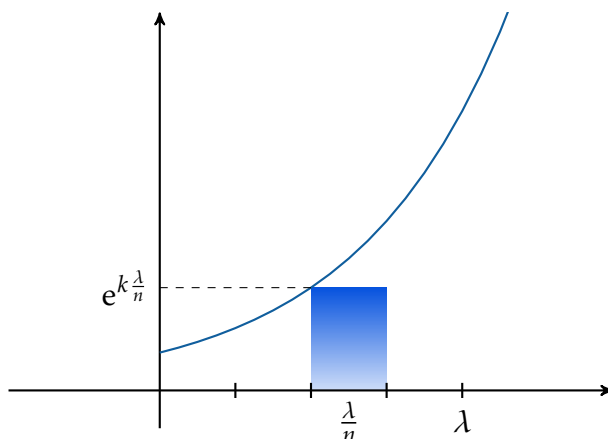
$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-2} f(x)dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_0^{-\frac{1}{2}} f(x)dx &= F(-2) - 2F(-1) + 2F\left(-\frac{1}{2}\right) - F(0) \\ &= \frac{1}{2}(\ln 3)^2 + \left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

Exercice 2

Posons $f(x) = e^x$ définie sur $[0; \lambda]$, où $\lambda \geq 0$.

Subdivisons l'intervalle $[0; \lambda]$ en n sous-intervalles de même amplitude.

Alors, $\frac{\lambda}{n} e^{k \frac{\lambda}{n}}$ est l'aire du rectangle de base $k \frac{\lambda}{n}$ et de hauteur $e^{k \frac{\lambda}{n}}$:



Ainsi, on a :

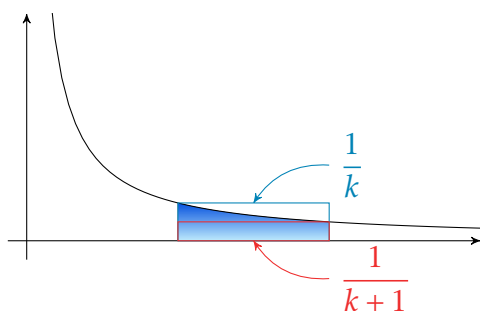
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k \frac{\lambda}{n}} \right) &= \int_0^\lambda e^x dx \\ &= [e^x]_0^\lambda \\ &= e^\lambda - 1 \end{aligned}$$

Exercice 3

Posons $f(x) = \frac{1}{x}$. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} f(x) dx < \frac{1}{k}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de regarder le graphique suivant :



La partie colorée (■) représente $\int_k^{k+1} f(x) dx$; elle est « encadrée » par les deux rectangles de base 1 et de hauteur respective k et $k+1$.

On a alors, pour tout entier naturel non nul k :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k} \\
 \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \\
 \Leftrightarrow & -1 < \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} < -\frac{1}{n+1} \\
 \Leftrightarrow & 0 < \frac{1}{n+1} < \gamma_{n+1} < 1
 \end{aligned}$$

Ainsi, $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

De plus,

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

La fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Donc $g(x) < 0$ sur $[1; +\infty[$.

Ainsi,

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n < 0$$

La suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante, donc elle converge puisqu'elle est bornée.

Cette limite est appelée la **constante d'Euler**, et est notée γ . On ne sait toujours pas si γ est transcendant ou pas.

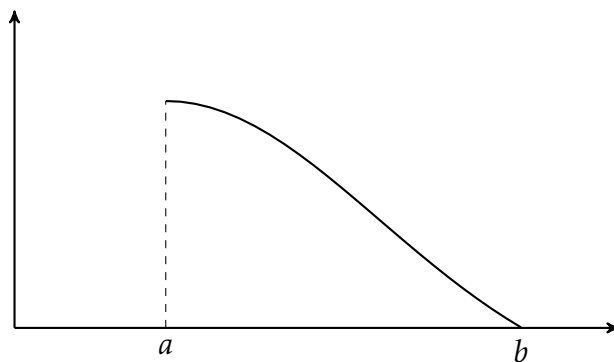
Une approximation est :

$$\gamma \approx 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,431\,042\,159\,335\,939\,923$$

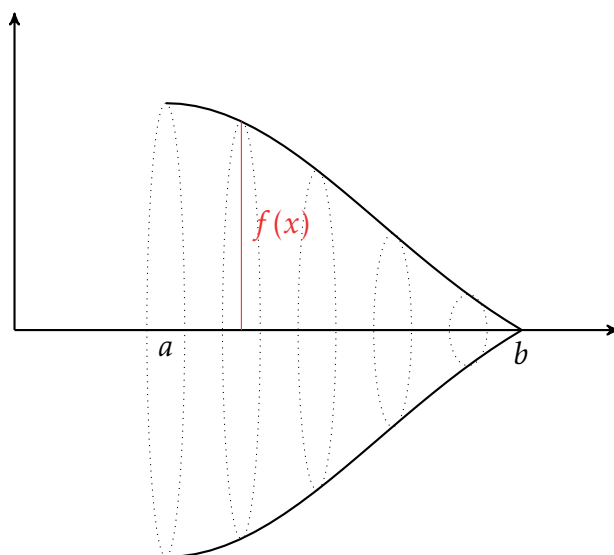
3 Calculs de volumes

Engendrer un solide à partir d'une courbe

Considérons une courbe $\mathcal{C}$ quelconque d'équation $y = f(x)$ sur un intervalle $[a; b]$. :



En faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de l'axe des abscisses, et en gardant la trace du mouvement, on engendre un solide :



le volume du solide ainsi formé peut donc se voir comme une accumulation de disques à rayons variables.

Prenons le disque situé à l'abscisse $x \in [a; b]$: il aura un rayon égal à $f(x)$. Ainsi, son aire est égale à $\pi [f(x)]^2$. Par conséquent, le volume du solide peut s'exprimer par :

$$\mathcal{V} = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Calcul du volume d'une boule

Une sphère est obtenue par rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe représentative de la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

et par symétrie par rapport au plan perpendiculaire à l'axe des abscisses contenant l'axe des ordonnées.

Le volume de la boule ainsi formée est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= 2 \int_0^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= 2 \times \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^r \\ &= 2\pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) \\ &= 2\pi \times \frac{2}{3} r^3 \\ \mathcal{V} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Calcul du volume d'une ellipsoïde

Une ellipse a pour équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ainsi, pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a :

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Donc, le volume de l'ellipsoïde est :

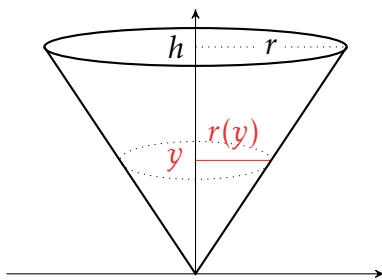
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= 2 \times \pi \int_0^a \left(b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^2 dx \\ &= 2b^2 \pi \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\ &= 2b^2 \pi \left[x - \frac{1}{3a^2} x^3 \right]_0^a \\ &= 2b^2 \pi \times \left(a - \frac{1}{3} a \right) \\ &= \frac{4}{3} ab^2 \pi \end{aligned}$$

Remarque

Dans un cas général, une ellipsoïde d'équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a un volume égal à $\frac{4}{3}abc\pi$ mais dans notre cas, $b = c$.

Volume d'un cône de révolution

Considérons un cône de révolution de hauteur h et dont la base a un rayon r .

Le disque passant par l'ordonnée $y \in [0; h]$ a un rayon égal à $r(y)$, que l'on peut calculer à l'aide du théorème de Thalès :

$$\frac{y}{h} = \frac{r(y)}{r} \Rightarrow r(y) = \frac{ry}{h}$$

Ainsi, le volume de ce cône est :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \pi \int_0^h (r(y))^2 dy \\ &= \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} y^2 dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} \times \frac{r^2}{h^2} y^3 \right]_0^h \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \end{aligned}$$

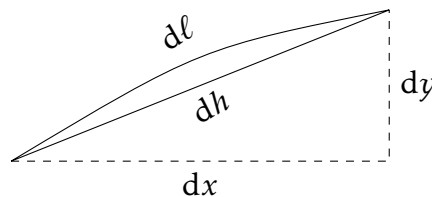
Longueur d'une courbe

L'intégrale est une somme infinitésimale : quand on calcule $\int_a^b f(x)dx$, c'est comme si on faisait une somme infinie des longueurs $f(x)$, longueurs qui forment l'aire sous la courbe sur $[a; b]$.

Ainsi, on pourrait se dire qu'il est possible, à l'aide d'une intégrale, de calculer la longueur d'une courbe en la voyant comme une somme infinie de points mis bout-à-bout.

Courbes paramétrées

Considérons une courbe paramétrée d'équation $(x(t); y(t))$, $t \in [a; b]$. Considérons alors le zoom de cette courbe suivant :



À une telle échelle, on peut assimiler la portion de courbe de longueur $d\ell$ au segment de longueur dh .

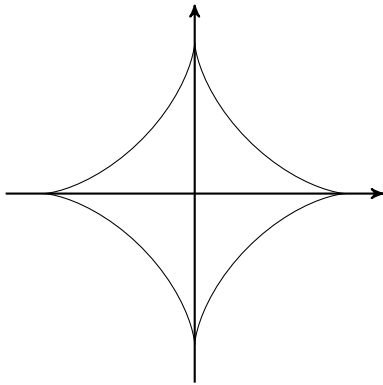
Ainsi, la longueur totale de la courbe peut être exprimée par :

$$\mathcal{L} = \int_a^b d\ell = \int_a^b dh = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt$$

Proposition 4.1

Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée d'équation $(x(t); y(t))$, $t \in [a; b]$. Alors, sa longueur est ;

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Exemple 4.1 (Astroïde)

L'astroïde a pour équation paramétrique :

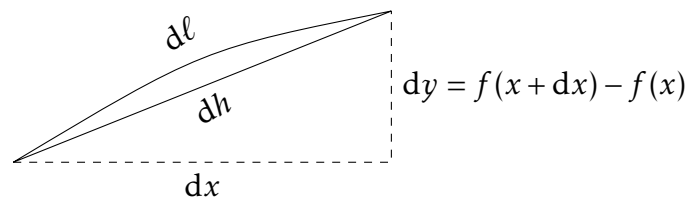
$$\begin{cases} x(t) = a(\cos t)^3 \\ y(t) = a(\sin t)^3 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}_+, t \in [0; 2\pi]$$

Ainsi,

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} dt$$

$$\mathcal{L} = 2\pi$$

Courbes cartésiennes

Sur une partie infinitésimale de la courbe, nous pouvons assimiler la courbe à un segment de longueur $dh = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$.

Dans la mesure où dx est négligeable devant x , nous pouvons écrire une approximation linéaire de $f(x)$ au voisinage de x :

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$$

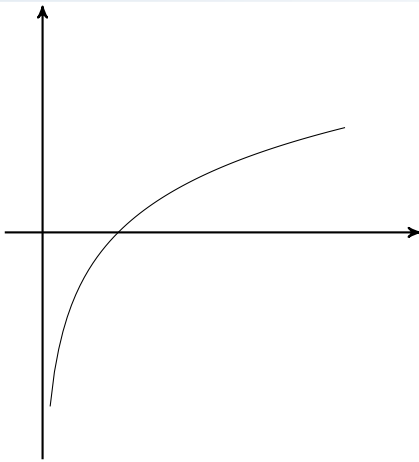
Ainsi, $dy = f'(x)dx$ et donc $dh = \sqrt{(dx)^2 + [f'(x)dx]^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$.
D'où le résultat suivant :

Proposition 4.2

Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équation $y = f(x)$ sur $[a; b]$.

Alors, sa longueur est :

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Exemple 4.2

J'ai représenté ci-contre la courbe d'équation $y = \ln x$. Sa longueur sur $[1; 3]$ est :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_1^3 \ln x \, dx \\ &= [x \ln x - x]_1^3 \\ &= 3 \ln 3 - 3 + 1 \\ \mathcal{L} &= 3 \ln 3 - 2\end{aligned}$$

Courbes polaires

Le principe est le même que pour les courbes paramétrées : en effet, $(x(t); y(t)) = (r \cos t; r \sin t)$, avec :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \cos t - r(t) \sin t \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \sin t + r(t) \cos t \end{cases}$$

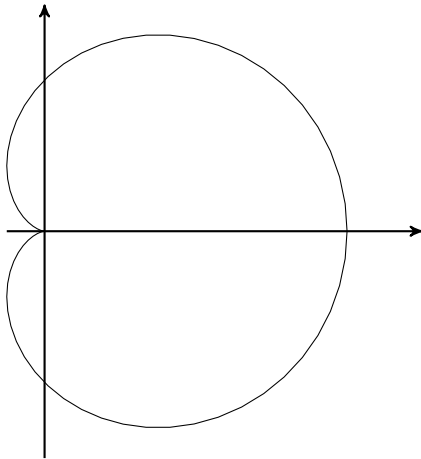
Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + r^2(t) (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 + r^2(t)} dt\end{aligned}$$

Proposition 4.3

Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équation $(t; r(t))$ sur $[a; b]$.
Alors, sa longueur est :

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{r^2(t) + [r'(t)]^2} dt$$

Exemple 4.3

L'équation d'une cardioïde est :

$$r(t) = a(1 + \cos t) \quad , \quad a \in \mathbb{R}^*, t \in [0; 2\pi]$$

Donc sa longueur est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}} dt \quad (*) \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt \quad (**) \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt \\ &= 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt \\ &= 4a \left[2 \sin \frac{t}{2} \right]_0^{\pi} \\ \mathcal{L} &= 8a \end{aligned}$$

(*) en faisant appel à la formule : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

(**) en faisant appel à la formule : $1 - \sin^2 a = \cos^2 a$

Méthodes d'intégration

Intégration par parties

La dérivée d'un produit se trouve à l'aide de la formule :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

De cette formule, on déduit :

$$\int (uv)' = \int u'v + \int uv'$$

Et donc :

$$\int u'v = \int (uv)' - \int uv'$$

D'où la proposition suivante :

Proposition 5.1

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exemple 5.1

Soit $f(x) = xe^x$. Posons $v(x) = x$ et $u'(x) = e^x$.

Ainsi, $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - (e - 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser l'intégration par parties dans un sens qui, au premier abord, n'est pas à notre avantage mais qui, au final, nous donnera une égalité intéressante, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 5.2

On pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, I = \int_0^t e^x dx$$

On peut ainsi poser : $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$, donc $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Ainsi, par intégration par parties, on a :

$$I = [xe^x]_0^t - \int_0^t xe^x dx$$

Soit :

$$I = te^t - \int_0^t xe^x dx$$

Posons $I_1 = \int_0^t xe^x dx$. En posant $u'(x) = x$ et $v(x) = e^x$, on a $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v'(x) = e^x$ et donc, par une seconde intégration par parties, on obtient :

$$I = te^t - \left(\left[\frac{x^2}{2} e^x \right]_0^t - \int_0^t \frac{x^2}{2} e^x dx \right)$$

Soit :

$$I = te^t - \frac{t^2}{2} e^t + \frac{1}{2} \int_0^t x^2 e^x dx$$

En posant $I_3 = \int_0^t x^2 e^x dx$, $u'(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$, on a $u(x) = \frac{x^3}{3}$ et $v'(x) = e^x$, d'où :

$$I = te^t - \frac{t^2}{2} e^t + \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} e^x \right]_0^t - \frac{1}{2 \times 3} \int_0^t x^3 e^x dx$$

Soit :

$$I = te^t - \frac{t^2}{2} e^t + \frac{t^3}{3!} e^t - \frac{1}{3!} \int_0^t x^3 e^x dx$$

On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I = e^t \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k!} + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n!} \int_0^t x^n e^x dx$$

On pourrait démontrer cette égalité par récurrence sur n mais à la vue de ce qui a été fait, on peut affirmer sa véracité.

Or, on peut calculer I directement : $I = [e^x]_0^t = e^t - 1$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e^t - 1 = e^t \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k!} + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n!} \int_0^t x^n e^x dx$$

Soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 = e^t \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k!} + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n!} \int_0^t x^n e^x dx$$

Exemple 5.2 (suite)

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 = e^t \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^k}{k!} + \frac{(-1)^n t^n}{n!} \int_0^t x^n e^x dx$$

Et donc, en multipliant les deux membres par e^{-t} :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e^{-t} = \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} + \int_0^t \frac{(-t)^n}{n!} e^{-t} x^n e^x dx \quad (1)$$

Or,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = 0$$

Ainsi, par passage à la limite dans l'égalité (1), on a :

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!}$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$$

Cette dernière somme est appelée **le développement en série entière** de e^t .

Décomposition en éléments simples

Considérons une fraction rationnelle $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, où $\deg A \leq \deg B$.

Afin de pouvoir calculer $\int_a^b f(x) dx$, on factorise au maximum $B(x)$ de sorte à écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - a_i)^{m_i}} + \sum_j \frac{\beta_j x + \gamma_j}{(x^2 + b_j x + c_j)^{p_j}}$$

Exemple 5.3

Soit $f(x) = \frac{1}{x^3 + 4x^2 + 3x}$.

On peut factoriser le dénominateur :

$$x^3 + 4x^2 + 3x = x(x+1)(x+3)$$

Donc :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+3}$$

Exemple 5.3 (suite)

$$\bullet \quad xf(x) = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{x+3}.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = \frac{1}{3} = a.$$

$$\bullet \quad (x+1)f(x) = \frac{1}{x(x+3)} = \frac{a(x+1)}{x} + b + \frac{c(x+1)}{x+3}.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = -\frac{1}{2} = b.$$

$$\bullet \quad (x+3)f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+3)}{x+1} + \frac{b(x+3)}{x+1} + c.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow -3} (x+3)f(x) = \frac{1}{6} = c.$$

On obtient donc :

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+3}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln|x+3| \end{aligned}$$

Exemple 5.4

$$\text{Soit } f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

On peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+4}$$

$$\bullet \quad (x^2+1)f(x) = \frac{1}{x^2+4} = ax+b + \frac{(cx+d)(x^2+1)}{x^2+4}.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow i} (x^2+1)f(x) = \frac{1}{3} = ai+b. \text{ Donc } a=0 \text{ et } b=\frac{1}{3}.$$

$$\bullet \quad (x^2+4)f(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{(ax+b)(x^2+4)}{x^2+1} + cx+d.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow 2i} (x^2+4)f(x) = -\frac{1}{3} = ci+d. \text{ Donc } c=0 \text{ et } d=-\frac{1}{3}.$$

On obtient donc :

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} \right)$$

D'où :

$$\int f(x)dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{3} \arctan x - \frac{1}{6} \arctan \frac{t}{2}$$

Changement de variable

Théorème 5.1

Soit φ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[a; b]$. Soit f une fonction continue sur $\varphi([a; b])$. Alors,

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

Démonstration

La fonction G définie sur $[a; b]$ par :

$$G(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(u) du$$

est dérivable sur $[a; b]$ et $G'(x) = (f \circ \varphi)\varphi'$.

Considérons maintenant la fonction F définie sur $[a; b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x) dx$$

Alors, $F' = G'$, donc $F - G$ est une fonction constante sur $[a; b]$.

Or, $F(a) = G(a) = 0$ donc $F = G$ sur $[a; b]$. ■

Exemple 5.5

Soit $g(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}$.

On pose alors $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ et $\varphi(x) = e^x$.

Ainsi, $g(x) = (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x)$. Donc :

$$\int_0^t g(x) dx = \int_{e^0}^{e^t} \frac{1}{u^2 + 3u + 2} du = \int_1^{e^t} \frac{1}{(u+1)(u+2)} du = \int_1^{e^t} \frac{1}{u+2} du - \int_1^{e^t} \frac{1}{u+1} du$$

Ainsi,

$$\int_0^t g(x) dx = \ln(e^t + 2) - \ln 3 - \ln(e^t + 1) + \ln 2$$

Soit :

$$\int_0^t g(x) dx = \ln\left(\frac{e^t + 2}{e^t + 1}\right) + \ln \frac{2}{3}$$

Exemple 5.6

Soit $h(x) = \frac{1}{\sin x}$.

On peut écrire $h(x) = \frac{-\sin x}{\cos^2 x - 1}$. Ainsi, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ et $\varphi(x) = \cos x$, avec $\varphi'(x) = -\sin x$, et on peut alors écrire :

$$h(x) = (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx &= \int_{\cos \frac{\pi}{4}}^{\cos \frac{\pi}{2}} \frac{1}{u^2 - 1} du \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right]_{\cos \frac{\pi}{4}}^{\cos \frac{\pi}{2}} \\ &= -\ln \left(\tan \frac{\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

Méthode

Dans un cas général, lorsque l'on a des fonctions trigonométriques, on peut utiliser les relations suivantes :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

où $t = \tan \frac{x}{2}$ et $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$.

Intégrales multiples

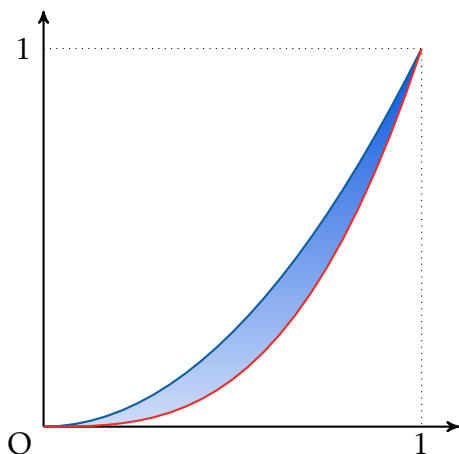
Intégrales doubles

Théorème 6.1 (de Fubini)

Soit f une fonction continue sur $[a; b] \times [c; d]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Exemple 6.1



Soit $\mathcal{D} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2\}$, représenté ci-contre.

Soit $f(x, y) = x^2 y$. Alors,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^3}^{y=x^2} x^2 y dx dy \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{x^3}^{x^2} dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{1}{2} x^6 - x^8 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{7} x^7 - \frac{1}{9} x^9 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{63} \end{aligned}$$

Attention

L'intégrale double calculée dans cet exemple ne correspond nullement à l'aire du domaine $\mathcal{D}$, que l'on peut calculer avec une intégrale simple : $\int_0^1 (x^2 - x^3) dx$.

Définition 6.1

Soit φ une application bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On note alors $\varphi(x; y) = (u; v)$. On appelle **déterminant Jacobien** de φ le nombre :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Exemple 6.2

Considérons l'application :

$$\varphi : (r; \theta) \mapsto (r \cos \theta; r \sin \theta)$$

Alors,

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

Proposition 6.1

Soit φ une application bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On note alors $\varphi(x; y) = (u; v)$. Alors,

$$du dv = |J| dx dy$$

Exemple 6.3

Considérons l'application :

$$\varphi : (r; \theta) \mapsto (r \cos \theta; r \sin \theta) = (x; y)$$

Alors,

$$dx dy = r dr d\theta$$

Théorème 6.2 (Changement de variable)

Soit φ une application bijective de $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ étant ouverts. On note alors $\varphi(x; y) = (u; v)$.

Soient $\mathcal{D}$ et Δ deux fermés de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$ et $\Delta \subset \mathcal{V}$ tels que $\varphi(\mathcal{D}) = \Delta$.

Alors,

$$\iint_{\Delta} f(x; y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \varphi(x; y) |J| du dv$$

Exemple 6.4 (Coordonnées polaires)

On pose :

$$\varphi(r; \theta) = (r \cos \theta; r \sin \theta)$$

puis $f(x; y) = xy$ et $\mathcal{D} = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Alors, $\varphi(\mathcal{D}) = \{\theta \in [0; \frac{\pi}{2}], r \in [0; 1]\}$.

D'où :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} f(x; y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r \cos \theta)(r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \int_0^1 r^3 dr d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Intégrales triples

Définition 6.2 (Jacobien)

Soit φ une application bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. On note alors $\varphi(x; y; z) = (u, v, w)$. On appelle **déterminant Jacobien** de φ le nombre :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Exemple 6.5 (Coordonnées cylindriques)

Soit $\varphi(r; \theta; z) = (r \cos \theta; r \sin \theta; z)$.

Alors :

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Exemple 6.6 (Coordonnées sphériques)

Soit le changement de variables :
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}.$$

Alors,

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

Le calcul d'une intégrale triple sur un domaine est comparable à celui que l'on effectue pour calculer une intégrale double. Voyons cela sur un exemple :

Exemple 6.7 (Changement de variable en coordonnées cylindriques)

On considère le domaine $\mathcal{D} = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$ et posons :

$$I = \iiint_{\mathcal{D}} z e^{x^2 + y^2} dx dy dz$$

Mettons nous en coordonnées cylindriques :
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}.$$
 Alors :

$$\begin{aligned} I &= \int_{z=0}^{z=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=1}^{r=2} z e^{r^2} r dr d\theta dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} z e^{r^2} \right]_1^2 d\theta dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e^4 - e) z d\theta dz \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (e^4 - e) z [\theta]_0^{2\pi} dz \\ &= \int_0^1 \pi (e^4 - e) z dz \\ &= \pi (e^4 - e) \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi (e^4 - e)}{2} \end{aligned}$$

Voyons un autre exemple maintenant :

Exemple 6.8 (Changement de variable en coordonnées sphériques)

Soit $\mathcal{D} = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Posons :

$$I = \iiint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} dx dy dz$$

Alors,

$$\begin{aligned} I &= \int_{r=0}^{r=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} (r^2)^{\frac{3}{2}} r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^5 \sin \varphi d\varphi \right) d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^5 [-\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^5 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 r^5 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) [\theta]_0^{2\pi} dr \\ &= \int_0^1 \pi r^5 (2 - \sqrt{2}) dr \\ &= \pi (2 - \sqrt{2}) \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi (2 - \sqrt{2})}{6} \end{aligned}$$