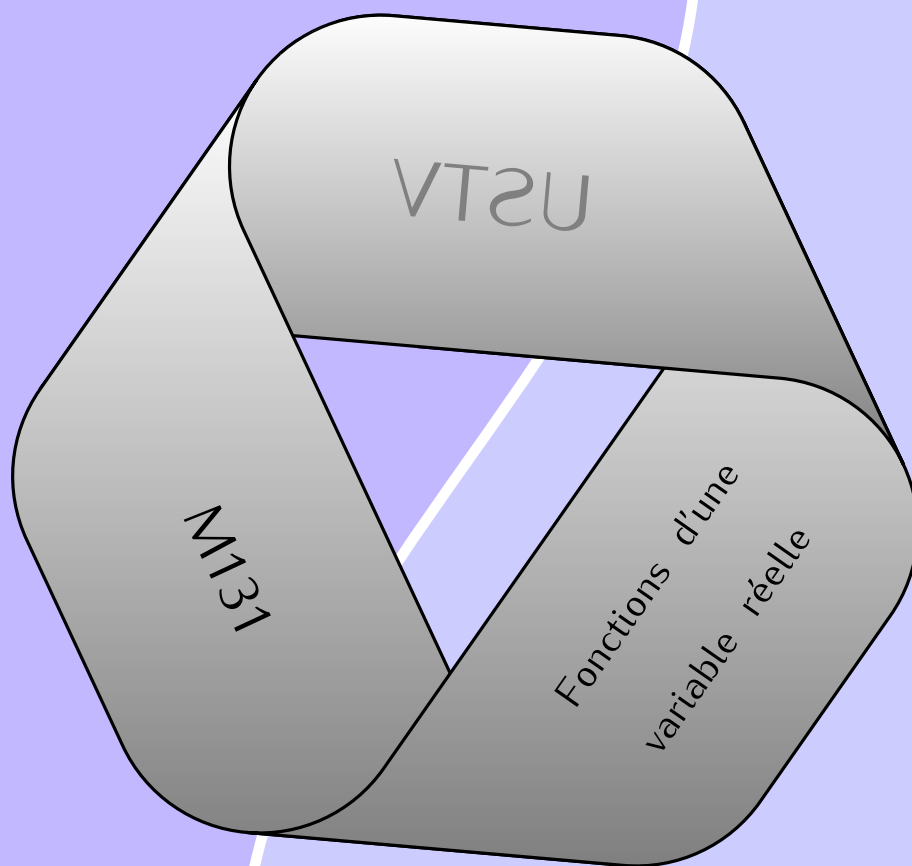


L1PC

2011/2012

Recueil d'exercices
partiellement corrigés
et aide-mémoire.



Attention, ce polycopié est encore en cours de développement, ne vous étonnez pas si vous découvrez des erreurs.
Merci de me les communiquer.

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment U-318
Université du Sud Toulon-Var
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 81

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr

🌐 <http://faccanoni.univ-tln.fr>

1 Équations et inégalités dans $\mathbb{R}$	5
2 Logique, ensemble	17
3 Relation, fonction, application	29
4 Composition, réciprocité	41
5 Maximum, minimum	49
6 Nombres complexes	57
7 Fonctions polynomiales	65
8 Suites numériques et limites	83
9 Fonctions continues et limites	99
10 Fonctions dérivables	115
11 Développements limités	129
12 Étude de fonctions	157
13 Primitives et intégrales	187

Weapons of Math Destruction™



www.weaponsofmathdestruction.com

© Oak Norton

Équations et inégalités rationnelles

Propriétés des puissances

- ① $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
- ② $a^b : a^c = a^{b-c}$
- ③ $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
- ④ $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
- ⑤ $(a : b)^c = a^c : b^c$
- ⑥ $(a)^c = \left(\frac{1}{a}\right)^{-c}$
- ⑦ $\sqrt[c]{a} = a^{1/c}$

Produits à apprendre par cœur

- ① $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$
- ② $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$
- ③ $(A \pm B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 \pm 2AB + 2AC \pm 2BC$
- ④ $(A - B - C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC + 2BC$
- ⑤ $(A^2 - B^2) = (A - B) \cdot (A + B)$
- ⑥ $(A^3 - B^3) = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$
- ⑦ $(A^3 + B^3) = (A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$

En général :

▷ le binôme $x^n + a^n$

▷ avec n impair n'est divisible que par $x + a$ et on a

$$x^n + a^n = (x + a) \cdot (x^{n-1} - ax^{n-2} + \dots - a^{n-2}x + a^{n-1}),$$

▷ avec n pair n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$;

▷ $x^n - a^n$

▷ avec n impair n'est divisible que par $x - a$ et on a

$$x^n - a^n = (x - a) \cdot (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}),$$

▷ avec n pair est divisible par $x - a$ et par $x + a$. Pour le factoriser, il convient de considérer le binôme comme la différence de deux carrés :

$$x^n - a^n = (x^{n/2} + a^{n/2}) \cdot (x^{n/2} - a^{n/2}).$$

On vérifie ensuite si les deux binômes ainsi obtenus sont encore factorisables sur $\mathbb{R}$.

Équations et inégalités de degré 1

	Solutions de l'équation $ax = b$	Solutions de l'inégalité $ax > b$	Solutions de l'inégalité $ax < b$
Si $a > 0$	$x = b/a$	$x > b/a$	$x < b/a$
Si $a < 0$	$x = b/a$	$x < b/a$	$x > b/a$

Équations et inégalités de degré 2

On ne considère ici que le cas $a > 0$ auquel on peut toujours se ramener

Soit $\Delta := b^2 - 4ac$ ($a > 0$)	Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	Solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c > 0$	Solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c < 0$
Si $\Delta > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($x_1 < x_2$)	$x < x_1$ ou $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
Si $\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	$\nexists$ solution
Si $\Delta < 0$	$\nexists$ solution réelle	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists$ solution

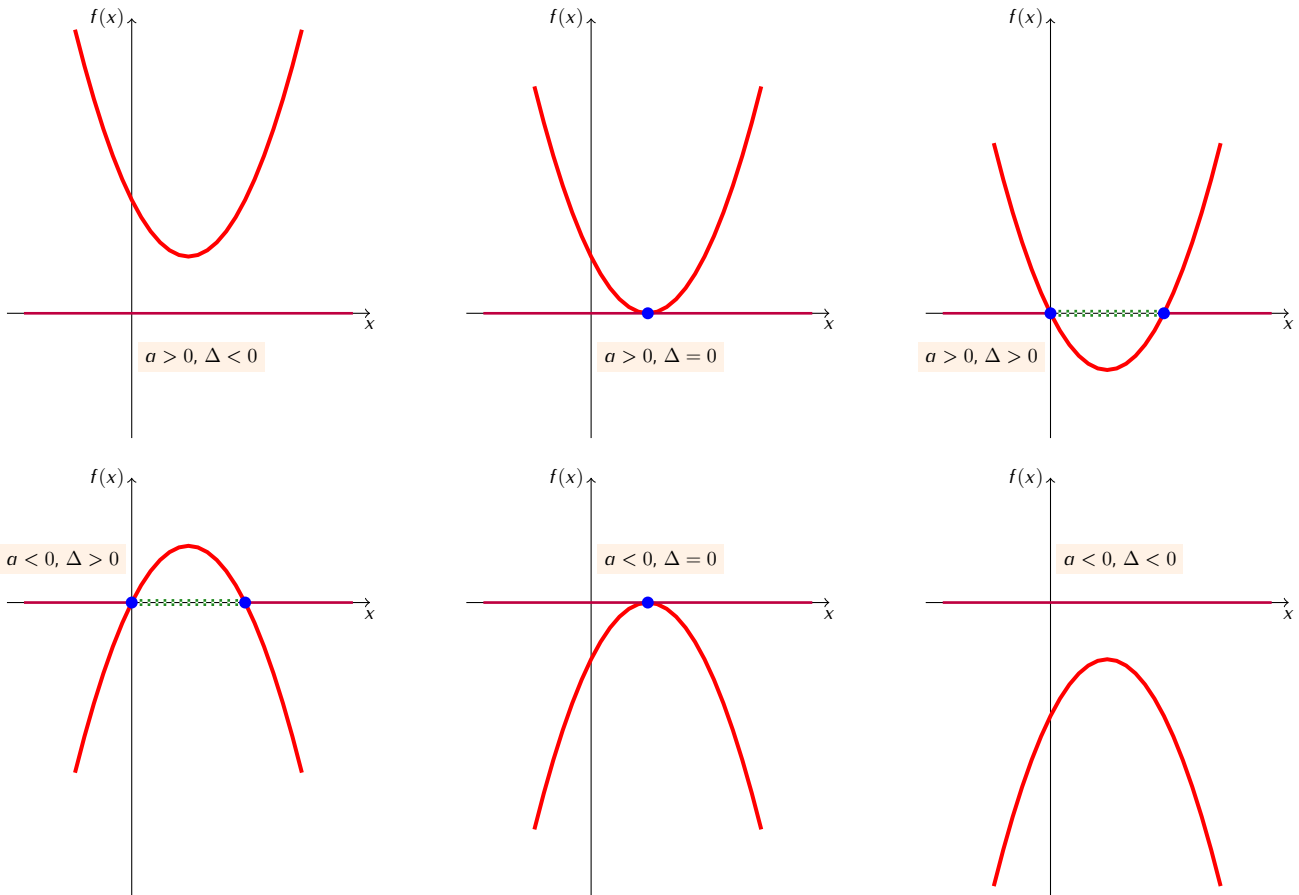
Rappelons que

▷ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

▷ $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 \cdot x_2 = c/a \end{cases}$

Le tableau ci-dessus a une interprétation géométrique : si on associe au trinôme $ax^2 + bx + c$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, on peut interpréter les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ comme les intersections de la courbe représentative de la parabole avec l'axe des x . Ci-dessous, les figures de gauche représentent les trois positions possibles de la parabole lorsque $a > 0$: du haut vers le bas on a aucune intersection, une intersection et deux intersections (respectivement, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$). À droite les trois cas lorsque $a < 0$: du haut vers le bas on a deux intersections, une intersection et aucune intersection (respectivement, $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$). Pour résoudre les inégalités $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ il suffit d'étudier la position de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ par rapport à l'axe des x :

- ▷ les cercles représentent les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$;
- ▷ en **bleu** on a les solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c > 0$;
- ▷ en **vert pointillé** les solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c < 0$.



Équations et inégalités de degré supérieur à 2

Équations et inégalités binomiales. On ne considère ici que le cas $a > 0$ auquel on peut toujours se ramener.

$(a > 0)$	Solutions de l'équation $ax^n + b = 0$	Solutions de l'inégalité $ax^n + b > 0$	Solutions de l'inégalité $ax^n + b < 0$
n impair,	$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x > \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x < \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$
n pair,			
$b > 0$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$b = 0$	$x = 0$	$x \neq 0$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$b < 0$	$x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x < -\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ ou $x > \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$-\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} < x < \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$

Équations et inégalités trinômes. Les équations (inégalités) trinômes ont pour forme normale

$$ax^{2n} + bx^n + c \gtrless 0.$$

La stratégie résolvative consiste à poser $x^n = t$. On est ainsi reconduit à une équation (inégalité) de degré 2 en t : $at^2 + bt + c \gtrless 0$. On obtient ainsi deux solutions t_1 et t_2 et on obtient deux équations (inégalités) binomiales $x^n \gtrless t_1$ et $x^n \gtrless t_2$.

Équations et inégalités fractionnelles

▷ $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) \neq 0$ et $f(x) = 0$;

▷ $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) \neq 0$ et $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe ;

▷ $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) \neq 0$ et $f(x)$ et $g(x)$ sont de signes différents.

Remarque :

▷ $f(x) \cdot g(x) = 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) = 0$ ou $f(x) = 0$;

▷ $f(x) \cdot g(x) > 0$ est satisfaite pour les x tels que $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe ;

▷ $f(x) \cdot g(x) < 0$ est satisfaite pour les x tels que $f(x)$ et $g(x)$ sont de signes différents.

Systèmes d'inégalités

Deux (ou plus) inégalités constituent un système d'inégalités si elles doivent être satisfaites simultanément. Résoudre un système signifie donc calculer les solutions communes à toutes les inégalités qui le composent. Bien évidemment, les solutions des inégalités étant des intervalles, il faudra "superposer" ces intervalles pour trouver un intervalle dans lequel toutes les inégalités sont satisfaites.

Valeurs absolues

Propriétés :

$$\textcircled{1} \quad |a| = 0 \iff a = 0$$

$$\textcircled{2} \quad |a| = |-a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{3} \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{4} \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$$

$$\textcircled{5} \quad |a| = |b| \iff a = b \text{ ou } a = -b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{6} \quad |a| \leq b \iff -b \leq a \leq b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$$

$$\textcircled{7} \quad |a| \geq b \iff a \leq -b \text{ ou } a \geq b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$$

$$\textcircled{8} \quad |a| \leq |b| \iff a^2 \leq b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{9} \quad \sqrt{a^2} = |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{10} \quad ||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ (inégalités triangulaires)}$$

Équations et inégalités qui contiennent des valeurs absolues

$$|f(x)| : = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

Donc

$$|f(x)| = g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

Notamment pour $k \in \mathbb{R}$:

$k < 0$	$k = 0$	$k > 0$
$ f(x) = k \quad \nexists x \in \mathcal{D}$	$f(x) = 0$	$f(x) = \pm k$
$ f(x) > k \quad \forall x \in \mathcal{D}$	$f(x) \neq 0$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > k \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > k \end{cases}$
$ f(x) < k \quad \nexists x \in \mathcal{D}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$

Équations et inégalités irrationnelles

	Solutions de l'équation $A(x) = \sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x) > \sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x) < \sqrt[n]{B(x)}$
Si n est impaire	$(A(x))^n = B(x)$	$(A(x))^n > B(x)$	$(A(x))^n < B(x)$
Si n est paire	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ (A(x))^n = B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ (A(x))^n > B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ (A(x))^n < B(x) \end{cases}$

Équations et inégalités exponentielles

Équations exponentielles

Une équation est exponentielle si l'inconnue apparaît en exposante.

Équation	Solution
$a^x = c$ (avec $a > 0, a \neq 1$)	$x = \log_a c$
$ma^{f(x)} = nb^{g(x)}$ (avec $a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$)	$\ln m + f(x) \ln a = \ln n + g(x) \ln b$
$f(a^x) = c$ (avec $a > 0, a \neq 1$)	On pose $t := a^x$

Inégalités exponentielles

Inégalité	Paramètres	Solution
$a^x > c$ (avec $a > 0, a \neq 1$)	$\begin{array}{l} c \leq 0 \\ 0 < a < 1 \\ c > 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < \log_a c \\ x > \log_a c \end{array}$
$a^x < c$ (avec $a > 0, a \neq 1$)	$\begin{array}{l} c \leq 0 \\ 0 < a < 1 \\ c > 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} \nexists x \in \mathbb{R} \\ x > \log_a c \\ x < \log_a c \end{array}$

Puisque, pour $a > 0$ on peut écrire $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, on peut toujours se ramener à des inégalités de base plus grande que 1.

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$
$m a^{f(x)} > n b^{g(x)}$ avec $a, b > 0$ et $a \neq 1, b \neq 1$	$\ln m + f(x) \ln a > \ln n + g(x) \ln b$	

Équations et inégalités logarithmique

Propriétés des logarithmes

Soit $a > 0, a \neq 1$.

- ① Si $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$ alors $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$.
- ② Si $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$ alors $\log_a \left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$.
- ③ Si $b > 0$ alors $\log_a b^k = k \log_a b$.
- ④ $\log_a 1 = 0$.
- ⑤ $\log_a a = 1$.
- ⑥ $\log_a(a^c) = c$.
- ⑦ Si $c > 0$ alors $a^{\log_a c} = c$.
- ⑧ Si $b > 0$ alors $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ avec $c > 0$ et $c \neq 1$ (Règle du changement de la base).

Notamment, on rappelle la chaîne d'égalités suivante :

$$\log_a x = -\log_a \frac{1}{x} = -\log_{\frac{1}{a}} x = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_x a}$$

Équations logarithmiques

Une équation est logarithmique si l'inconnue apparaît sous le symbole de logarithme. Puisqu'on a $\log_x a = \log_x e \cdot \ln a = \frac{\ln a}{\ln x}$, on peut toujours se ramener au cas où l'inconnue n'apparaît qu'en argument du logarithme.

Équation	Solution
$\log_a f(x) = c$ (avec $a > 0, a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^c \end{cases}$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (avec $a > 0, a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
$f(\log_a g(x)) = c$ (avec $a > 0, a \neq 1$)	Il faut $g(x) > 0$ On pose $t := \log_a g(x)$

Inégalités logarithmiques

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a f(x) > c$	$0 < f(x) < a^c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < c$	$f(x) > a^c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$0 < f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x) > 0$

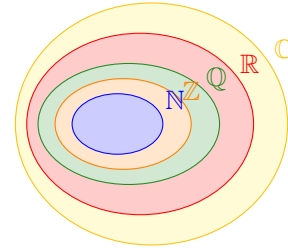
Puisque, pour $a > 0$ et $a \neq 1$ on peut écrire $\log_a x = -\log_{1/a} x$, on peut toujours se ramener à des inégalités de base plus grande que 1.

Exercices

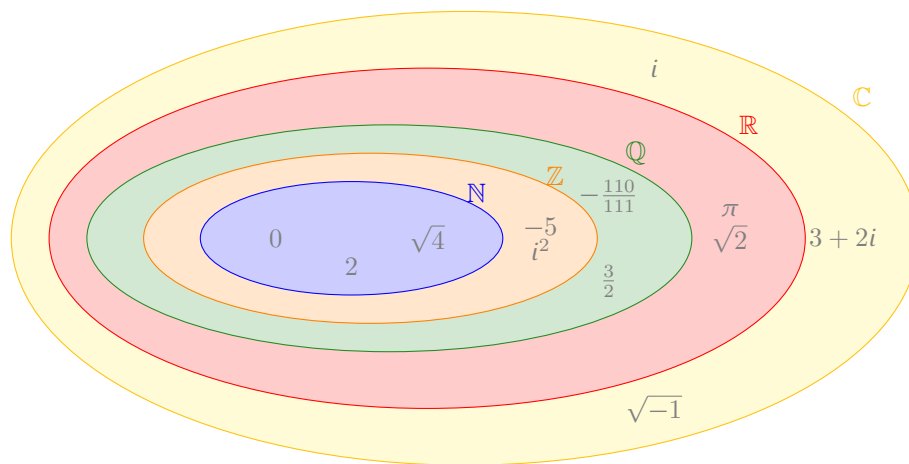
? Exercice 1.1

Pour chaque élément de $\mathbb{C}$ ci-dessous, indiquer s'il appartient à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, à $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

- | | |
|----------------------|-------------------|
| i) i | vii) $\sqrt{-1}$ |
| ii) -5 | viii) 0 |
| iii) $\sqrt{2}$ | ix) $3 + 2i$ |
| iv) $\sqrt{4}$ | x) π |
| v) $-\frac{110}{11}$ | xi) $\frac{3}{2}$ |
| vi) 2 | xii) i^2 |



SOLUTION.



? Exercice 1.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inégalités suivantes (pour chaque inégalité, la réponse est indiquée à droite) :

1. $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} < 1 + \frac{1}{4-x^2}$ $]-\infty, -2[\cup]-1, 1[\cup]2, +\infty[$
2. $x|x| < 1$ $]-\infty, 1[$
3. $x^2 - 4|x| - 5 > 0$ $]-\infty, -5[\cup]5, +\infty[$
4. $|4 - x^2| - |3 - x| > x$ $]-\infty, -\sqrt{7}[\cup]-1, 1[\cup]\sqrt{7}, +\infty[$
5. $|x + 2| < 1 + |x - 1|$ $]-\infty, 0[$
6. $\sqrt{2x+1} > x$ $[-1/2, 1 + \sqrt{2}[$
7. $\sqrt{x+2} < x$ $]2, +\infty[$
8. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 1$ $[4, +\infty[$
9. $\sqrt{\frac{x^2 + 8|x| - 9}{x^2 - 1}} \geq x - 3$ $]-\infty, 5 + \sqrt{17}/2[\setminus \{-1, 1\}$
10. $\sqrt{4x^2 + 3x - 1} \geq 2x - 3$ $]-\infty, -1[\cup]1/4, +\infty[$
11. $\frac{\sqrt{1 - 9x^2} + 2x}{3x - 2} > 0$ $[-1/3, -1/\sqrt{13}[$
12. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \geq 3$ $[3, +\infty[$
13. $\frac{\sqrt{2x-5}}{3} \leq \frac{3}{\sqrt{2x-5}}$ $]5/2, 7]$
14. $\sqrt{4 + |1 - x^2|} < x + \sqrt{5}$ $]0, +\infty[$
15. $\frac{\sqrt{x} + 1}{3 - x - \sqrt{x}} < 0$ $]7 - \sqrt{13}/2, +\infty[$

16. $\sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}} < \sqrt{x}$ $[1, +\infty[$
17. $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $]\pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$
18. $\frac{1-2\sin x}{1-2\cos x} \leq 0$ $]-\pi/3 + 2k\pi, \pi/6 + 2k\pi] \cap]\pi/3 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$
19. $\frac{\sin x}{\sqrt{2\sin x - 1}} \geq 1$ $]\pi/6 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$
20. $\frac{\tan^2 x - \sqrt{3}\tan x}{\tan^2 x - 1} < 1$ $]-\pi/4 + k\pi, \pi/6 + k\pi[\cup]\pi/4 + k\pi, \pi/2 + k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$
21. $\frac{e^{2x} - e^x}{2e^{2x} - 5e^x + 2} > -1$ $]-\infty, \ln(1-\sqrt{3}/3)[\cup]-\ln 2, \ln(1+\sqrt{3}/3)[\cup (\ln 2, +\infty)$
22. $\frac{\ln(x-2)}{\sqrt{1-\ln(x-2)}} < 2$ $]2, e^{2(\sqrt{2}-1)} + 2[$
23. $\frac{(2/3)^{x-1} - 1}{\sqrt{2 - \sqrt[3]{2^{x-1}}}} < 0$ $]1, 5/2[$
24. $\frac{e^x + e^{\sqrt{x}} + 2}{e^{2x} - e} \geq 0$ $]1/2, +\infty[$
25. $(1/3)^{\sqrt{x^2-x-2}} < (1/3)^{x+1}$ $]-\infty, -1[$
26. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} > 9$ $\emptyset$
27. $3^{x+2} \leq 3^{\sqrt{x^2+x-2}}$ $]-\infty, -2[$
28. $x - 1 < \sqrt{x+4}$ $[-4, 3 + \sqrt{21}/2[$
29. $\log_5(x-7) > 2$ $]32; +\infty[$
30. $\log_{2/3}(x^2-1) > 2$ $] -\sqrt{13}/3, -1[\cup]1, \sqrt{13}/3[$
31. $\log_{1/2} \sqrt{x} < \log_{1/2} |x-1|$ $]3 - \sqrt{5}/2, 3 + \sqrt{5}/2[\setminus \{1\}$
32. $3^{2-x} + 2 \cdot 3^x < 19$ $] -\ln 2 / \ln 3, 2[$
33. $(2^{\sqrt{x}} - 2^x)(\ln^2 x - 4) \leq 0$ $]0, e^{-2}] \cup [1, e^2]$
34. $\log_2 \frac{x + \sqrt{x^2+9}}{2x} > 1$ $]0, 3/2\sqrt{2}[$
35. $\log_{1/4} \sqrt{6+x-x^2} < \log_{1/4}(x-1)$ $]1, 5/2[$
36. $\ln x - \frac{2}{\ln x} + 1 \geq 0$ $[1/e^2, 1[\cup [e, +\infty[$
37. $\log_{1/2}(7^{2x} - 7^x + 1) > 0$ $]-\infty, 0[$
38. $\log_2 \frac{|x|-1}{2-|x+3|} \leq 2$ $] -2^{1/5}, -1[\cup]-1, 1[$
39. $\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln(1-x) < \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 5$ $]1, 5[$

? Exercice 1.3

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x^5 - 3x^2 + 2x - 7$

6. $x \mapsto \ln(1-x^2)$

11. $x \mapsto \frac{1}{x \cos(x)}$

2. $x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$

7. $x \mapsto |\ln(x)|$

12. $x \mapsto \ln \frac{e^x-1}{(x-1)(x+2)}$

3. $x \mapsto \sqrt{x^2-3x-4}$

8. $x \mapsto \frac{1}{e^x-1}$

13. $x \mapsto \left(\frac{x^2-2x}{x^2+4x+3}\right)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. $x \mapsto \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

9. $x \mapsto \tan(2x)$

5. $x \mapsto \ln(1-x)$

10. $x \mapsto \frac{1}{\sin(2x)}$

SOLUTION. 1. $x \in \mathbb{R}$

2. $x^2 - 5x + 6 \neq 0$, i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

3. $x^2 - 3x - 4 \leq 0$, i.e. $x \in]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[$

4. $\begin{cases} 1 - \sqrt{1-x} \neq 0 \\ 1-x \leq 0 \end{cases}$ i.e. $x \in]-\infty; 0[$

5. $1-x > 0$, i.e. $x \in]-\infty; 1[$

6. $1-x^2 > 0$, i.e. $x \in]-1; +1[$

7. $x > 0$, i.e. $x \in]0; +\infty[$

8. $e^x - 1 \neq 0$, i.e. $x \in \mathbb{R}^*$

9. $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

10. $\sin(2x) \neq 0$, i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

11. $x \cos(x) \neq 0$, i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0 \text{ et } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

12. $\begin{cases} \frac{e^x-1}{(x-1)(x+2)} > 0 \\ (x-1)(x+2) \neq 0 \end{cases}$ i.e. $x \in]-2; 0[\cup]1; +\infty[$

13. $\begin{cases} \frac{x^2-2x}{x^2+4x+3} > 0 \\ x^2+4x+3 \neq 0 \end{cases}$ i.e. $x \in]-\infty; -3[\cup]-1; 0[\cup]2; +\infty[$

Éléments de logique

**Assertion**

| Une **ASSERTION** est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est vrai ou s'il est faux.

**Exemple**

| " $1 < 2$ " est une assertion vraie, " $4 < 3$ " est une assertion fausse.

**Proposition**

| Une **PROPOSITION** est un énoncé contenant des variables, qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables, faux pour toutes les autres.

**Exemple**

| " $x < 2$ " est une proposition, elle est vraie pour les nombres strictement inférieurs à 2, fausse pour tous les autres.

**Négation**

| La **NÉGATION** d'une proposition " P ", notée " $\text{non}P$ ", est une proposition qui est vraie lorsque P est fausse, fausse lorsque P est vraie.

**Exemple**

| La proposition " $x < 2$ " est la négation de la proposition " $x \geq 2$ ".

**Conjonction**

| La **CONJONCTION** de deux propositions P , Q , notée " P et Q ", est une proposition vraie, si les deux propositions sont vraies, fausse dans tous les autres cas.

**Exemple**

| La conjonction des propositions " $x \leq 2$ " et " $x \geq 2$ " est " $x = 2$ ".

Incompatibilité

Deux propositions P , Q sont incompatibles si la conjonction " P et Q " est toujours fausse.

Exemple

Les propositions " $x \leq 2$ " et " $x \geq 5$ " sont incompatibles.

Disjonction

La DISJONCTION de deux propositions P , Q , notée " P ou Q ", est une proposition vraie si au moins une des deux propositions est vraie, fausse dans tous les autres cas (le "ou" est inclusif).

Exemple

La disjonction " $x > 2$ ou $x < 2$ " est " $x \neq 2$ ".

Implication

L'IMPLICATION de deux propositions P , Q , notée " $P \Rightarrow Q$ ", est la proposition " $(\text{non}P)$ ou Q ". Sa négation est la proposition " P et $(\text{non}Q)$ ".

Remarque

L'implication " $P \Rightarrow Q$ " se lit " P implique Q " ou " P entraîne Q " ou " P est une condition suffisante de Q " ou " Q est une condition nécessaire de P ". Le fait que " $P \Rightarrow Q$ " soit vraie signifie que pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie, ou encore, que pour que P soit fausse il suffit que Q soit fausse. " $P \Rightarrow Q$ " équivaut à " $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$ ".

Théorème

P et Q étant deux assertions, si " $P \Rightarrow Q$ " est vrai on dit que c'est un THÉORÈME (c'est-à-dire une assertion démontrée dont P est l'HYPOTHÈSE et Q la CONCLUSION).

Équivalence

L'ÉQUIVALENCE de deux propositions P , Q , notée " $P \Leftrightarrow Q$ ", est la proposition " $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ ". Sa négation est la proposition " $(P$ et $\text{non}Q)$ ou $(Q$ et $\text{non}P)$ " qui signifie "ou bien P , ou bien Q ".

Notions fondamentales de la théorie des ensembles

Des êtres, aussi bien physique (élève, chat, chaise...), qu'objets de notre pensée (nombre, fonction...), seront représentés par des lettres a , b , E , μ ... et considérés comme bien définis si nous disposons d'un critère permettant d'affirmer que deux de ces objets (représentés par a et b) sont, ou bien identiques, ou bien distincts :

$$a = b \quad \text{ou bien} \quad a \neq b.$$

Ensemble, élément

Un ensemble E est constitué d'éléments. Il est bien défini si l'on possède un critère permettant d'affirmer pour tout objet a , s'il appartient à l'ensemble E ou non :

$$a \in E \quad \text{ou bien} \quad a \notin E.$$

☘ Remarque

On dit aussi " a est élément de E " ou bien " a n'est pas élément de E " ou encore " E contient a " ou bien " E ne contient pas a ". Si un ensemble E est constitué des éléments a, b, c , on écrira : $E = \{a, b, c\}$. L'ordre dans lequel les éléments sont écrits n'importe pas, ainsi $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$. Un même être mathématique ne peut pas être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble, c'est-à-dire qu'il est interdit d'écrire $a \in a$.

📖 Inclusion

Un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E , ce que l'on note : $F \subset E$.

☘ Remarque

On dit aussi " F est une partie de E " ou encore " F est un sous-ensemble de E ".

📖 Complémentaire

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E , on note $C_E A := E \setminus A$ le complémentaire de A dans E .

📖 Égalité

Un ensemble F est égal à un ensemble E si $F \subset E$ et $E \subset F$, ce que l'on note : $F = E$.

📖 Utilisation des quantificateurs

Les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ concernent les éléments d'un ensemble déterminé E .

Notation "Il existe x élément de E " s'écrit " $\exists x \in E$ ".

"Pour tout x de E " ou "Quel que soit un élément x de E " s'écrit " $\forall x \in E$ ".

Ordre Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance ; on peut donc permuter les quantificateurs dans des écritures du type

$$\begin{aligned} \forall x \in E \quad \forall y \in F \quad p(x, y), \\ \exists x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x, y). \end{aligned}$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important :

▷ dans l'écriture

$$\forall x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x, y)$$

y dépend de x ,

▷ dans l'écriture

$$\exists y \in F \quad \forall x \in E \quad p(x, y)$$

y est indépendant de x .

Négation La négation de " $\forall x \in E, x$ vérifie p " est " $\exists x \in E$ tel que x ne vérifie pas p ". La négation de " $\exists x \in E, x$ vérifie p " est " $\forall x \in E$ tel que x ne vérifie pas p ".

☘ Remarque

Soit A une partie de E .

▷ L'énoncé " A est la partie *vide*" (on note $A = \emptyset$) et sa négation " A est *non vide*" (on note $A \neq \emptyset$) correspondent respectivement à "quel que soit x élément de E , x n'est pas un élément de A " et "il existe au moins un élément de E qui est élément de A " et s'écrivent respectivement :

- ▷ $\forall x \in E \quad x \notin A,$
- ▷ $\exists x \in E \quad x \in A.$

▷ L'énoncé " A est la partie *pleine*" (on note $A = E$) et sa négation " A n'est pas la partie *pleine*" (on note $A \neq E$) s'écrivent respectivement :

- ▷ $\forall x \in E \quad x \in A,$
- ▷ $\exists x \in E \quad x \notin A.$

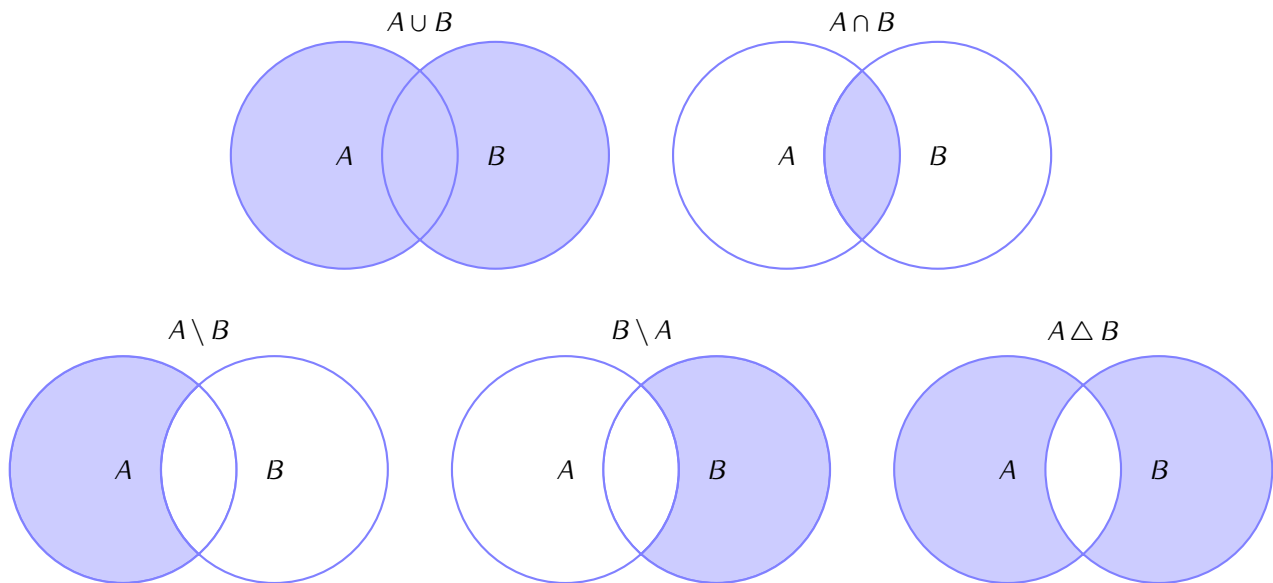
- ▷ Les propositions " $x \in A$ " et " $x \notin A$ " sont souvent remplacées respectivement par " x vérifie la propriété p " et " x ne vérifie pas la propriété p " où p est une propriété caractéristique des éléments de A , c'est à dire un critère permettant de décider pour tout élément x de E entre les deux propositions $x \in A$, $x \notin A$.



Opérations booléennes

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. Les quatre éléments $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ de $\mathcal{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

- ▷ $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$, [réunion des ensembles A et B]
 ▷ $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$, [intersection des ensembles A et B]
 ▷ $x \in A \setminus B \iff x \in A$ et $x \notin B$,
 ▷ $x \in A \Delta B \iff x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$.



Réunion et intersection d'une famille de parties de E

Soit E, I deux ensembles et $\{A_i\}_{i \in I}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Les deux éléments $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ de $\mathcal{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I \quad x \in A_i,$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I \quad x \in A_i.$$



Exercices

**? Exercice 2.1**

La relation $p \implies q$ se lit "si p , alors q ". Que signifie-t-elle ?

- | | |
|--|---|
| ☐ p est une condition suffisante de q | ☐ pour que p , il est nécessaire que q |
| ☐ q est une condition nécessaire de p | ☐ p seulement si q |
| ☐ pour que q , il suffit que p | ☐ q seulement si p |
| ☐ pour que p , il suffit que q | |

SOLUTION. ■ p est une condition suffisante de q

■ q est une condition nécessaire de p

■ pour que q , il suffit que p

☐ pour que p , il suffit que q

■ pour que p , il est nécessaire que q

■ p seulement si q

☐ q seulement si p

? Exercice 2.2

Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l'énoncé original est vrai ou faux (en justifiant la réponse à l'aide d'une démonstration).

- | | |
|--|--|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$ | 5. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$ |
| 2. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ | 6. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n + 1 \leq n^3$ |
| 3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ | 7. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq x$ |
| 4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ | 8. $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad n > p \implies n + p > 2p$ |

SOLUTION. 1. Faux

Contrexemple : $x = 0$

Négation : $\exists x \in \mathbb{R} \quad x \leq 1$

2. Faux

Contrexemple : difficile, on prouvera la négation

Négation : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$.

Preuve de la négation : étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$ car il suffit de prendre $y = -(x + 1)$ qui donne $x + y = -1 \leq 0$

3. Vrai

Preuve : étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y > 0$ car il suffit de prendre $y = -x + 1$ qui donne $x + y = 1 > 0$

Négation : $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$

4. Faux

Contrexemple : $x = -1$ et $y = 0$

Négation : $\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$

5. Vrai

Preuve : Il suffit de choisir $x < 0$

Négation : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x$

6. Faux

Contrexemple : $n = 0$

Négation : $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n + 1 > n^3$

7. Vrai

Preuve : étant donné $x \in \mathbb{R}$, on peut prendre $n = E(x) + 1$ (par exemple), ce qui donne $n > x$

Négation : $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n < x$

8. Vrai

Négation : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad n > p$ et $n + p \leq 2p$

Preuve : pour prouver que l'énoncé est vrai il suffit de montrer que la négation est fausse, autrement dit de exhiber un contre-exemple de la négation. Ici, $\forall n \in \mathbb{N}$ il suffit de choisir $p = n - 1$: on a $n > p$ mais $n + p = 2p + 1 > 2p$

? Exercice 2.3

On considère $x, y, z \in \mathbb{N}$. Soit la proposition

$$(P) \quad \text{«si } x = 3 \text{ alors } y = 5 \text{ et } z = 1\text{»}.$$

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse :

1. (P) est équivalente à «si $y = 5$ et $z = 1$ alors $x = 3$ ».
2. (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il suffit que $x = 3$ ».
3. (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il faut que $x = 3$ ».
4. La négation de (P) est « $x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$ ».
5. La négation de (P) est «si $x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$ ».

SOLUTION. 1. Fausse

2. Vraie
3. Fausse
4. Fausse
5. Fausse

? Exercice 2.4

Pour tout entier naturel n , soit P_n une assertion portant sur n et telle que si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est également.

On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que P_{n_0} soit faux. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

- ☐ P_{n_0-1} est faux
- ☐ P_n est faux pour tout entier $n \leq n_0$
- ☐ P_{n_0+1} est faux
- ☐ P_n est faux pour tout entier $n \geq n_0$
- ☐ P_n est faux pour tout entier n

On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que P_{n_0} soit vrai. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

- ☐ P_{n_0-1} est vrai
- ☐ P_n est vrai pour tout entier $n \leq n_0$
- ☐ P_{n_0+1} vrai faux
- ☐ P_n est vrai pour tout entier $n \geq n_0$
- ☐ P_n est vrai pour tout entier n

SOLUTION. Le fait que P_{n_0} soit faux n'implique rien sur la véracité de P_n pour $n > n_0$. En revanche, il implique que P_n est faux pour tout $n \leq n_0$. En effet, s'il existait un entier $m < n_0$ tel que P_m soit vrai, on aurait P_{m+1} vrai et, par récurrence, P_{n_0} vrai ce qui est une contradiction.

- P_{n_0-1} est faux
- P_n est faux pour tout entier $n \leq n_0$
- ☐ P_{n_0+1} est faux
- ☐ P_n est faux pour tout entier $n \geq n_0$
- ☐ P_n est faux pour tout entier n

Le fait que P_{n_0} soit vrai n'implique rien sur la véracité de P_n pour $n < n_0$. En revanche, il implique que P_n est vrai pour tout $n \geq n_0$. En effet, s'il existait un entier $m > n_0$ tel que P_m soit faux, on aurait P_{m-1} vrai et, par récurrence, P_{n_0} faux ce qui est une contradiction.

- ☐ P_{n_0-1} est vrai
- ☐ P_n est vrai pour tout entier $n \leq n_0$
- P_{n_0+1} est vrai
- P_n est vrai pour tout entier $n \geq n_0$
- ☐ P_n est vrai pour tout entier n

? Exercice 2.5

Démontrer (par récurrence) les propositions

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* & \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \\
 3) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* & \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\
 5) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* & \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}, \\
 2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* & \sum_{i=1}^n (2i+1) = n(n+2), \\
 4) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* & \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2,
 \end{array}$$

SOLUTION. On considère une propriété P_n qui dépend d'un entier naturel n et on souhaite démontrer par récurrence qu'elle est vraie à partir d'un certain rang. Pour cela il faut

- montrer que la propriété P_n est vraie pour un entier particulier n_0 (par exemple 0 ou 1);
 - montrer que si elle est vraie pour certain n , cela implique qu'elle est vraie pour son successeur $n+1$.
- Pour $n=1$ la somme se réduit à 1 et elle est égale à $1 \cdot \frac{1+1}{2} = 1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n , c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.
 - Pour $n=1$ la somme se réduit à $2 \times 1 + 1$ et elle est égale à $1(1+2) = 2$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n , c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^n (2i+1) = n(n+2)$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} (2i+1) = \sum_{i=1}^n (2i+1) + (2(n+1)+1) = n(n+2) + (2(n+1)+1) = (n+1)(n+3)$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.
 - Pour $n=1$ la somme des carrés se réduit à 1^2 et elle est égale à $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n , c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.
 - Pour $n=1$ la somme des cubes se réduit à 1^3 et elle est égale à $\frac{(1 \times 2)^2}{4} = 1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n , c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^n i^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.
 - Pour $n=1$ la somme se réduit à 1^4 et elle est égale à $\frac{1(1+1)(6+9+1-1)}{30} = 1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n , c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i^4 = \sum_{i=1}^n i^4 + (n+1)^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} + (n+1)^4 = \frac{(n+1)(n+2)(6(n+1)^3+9(n+1)^2+(n+1)-1)}{30}$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.

? Exercice 2.6

Expliciter les sous-ensembles suivants de la droite réelle

$$\begin{array}{llll}
 \bigcup_{x \in [0,1]} \left] \frac{x}{2}, 2x \right[& \bigcap_{x \in [0,1]} \left] \frac{x}{2}, 2x \right[& \bigcup_{x \in [0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x \right] & \bigcap_{x \in [0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x \right] \\
 \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right] & \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[1 + \frac{1}{n}, n \right] & \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2} \right] & \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2 \right]
 \end{array}$$

SOLUTION.

$$\begin{array}{ll}
 \bigcup_{x \in [0,1]} \left] \frac{x}{2}, 2x \right[=]0, 2[& \bigcap_{x \in [0,1]} \left] \frac{x}{2}, 2x \right[= \emptyset \\
 \bigcup_{x \in [0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x \right] = [0, 2] & \bigcap_{x \in [0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x \right] = \{0\}
 \end{array}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right] = [0, 2]$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[1 + \frac{1}{n}, n \right] =]1, +\infty[$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2} \right] = \{3\}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2 \right] = [-2, 5]$$

? Exercice 2.7

Soit E, I, J trois ensembles et $\{A_i\}_{i \in I}$ et $\{B_j\}_{j \in J}$ deux parties de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j).$$

SOLUTION. Notons

$$L = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right), \quad R = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j).$$

Pour prouver que $L = R$ il faut prouver les deux inclusions $L \subset R$ et $R \subset L$:

① on prouve que $L \subset R$, i.e. que si $\ell \in L$ alors $\ell \in R$:

$$\begin{aligned} \ell \in L &\iff \ell \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ET } \ell \in \bigcup_{j \in J} B_j \\ &\iff \exists i \in I, \ell \in A_i \text{ ET } \exists j \in J, \ell \in B_j \\ &\iff \exists (i, j) \in I \times J, \ell \in (A_i \cap B_j) \\ &\implies \ell \in R; \end{aligned}$$

② on prouve que $R \subset L$, i.e. que si $\ell \in R$ alors $\ell \in L$:

$$\begin{aligned} \ell \in R &\iff \exists (i, j) \in I \times J, \ell \in (A_i \cap B_j) \\ &\iff \ell \in A_i \text{ ET } \ell \in B_j \\ &\iff \ell \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ET } \ell \in \bigcup_{j \in J} B_j \\ &\implies \ell \in L. \end{aligned}$$

? Exercice 2.8

Soit E, I et J trois ensembles non vides. Soit $\{A_{i,j}\}_{(i,j) \in I \times J}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$\bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} A_{i,j} \right) \subset \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} A_{i,j} \right),$$

puis comparer (en terme d'inclusion)

$$\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{p}{q} \right] \right) \quad \text{et} \quad \bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{p}{q} \right] \right)$$

SOLUTION. $x \in \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} A_{i,j} \right) \implies \exists i \in I, x \in \bigcap_{j \in J} A_{i,j} \implies \exists i \in I, \forall j \in J, x \in A_{i,j} \implies \forall j \in J, x \in \bigcup_{i \in I} A_{i,j} \implies x \in \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} A_{i,j} \right)$ donc $\bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} A_{i,j} \right) \subset \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} A_{i,j} \right)$.

Notons que l'inclusion inverse n'est pas vraie car $x \in \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} A_{i,j} \right) \implies \forall j \in J, x \in \bigcup_{i \in I} A_{i,j} \implies \forall j \in J, \exists i \in I$ dépendant de j , $x \in A_{i,j}$.

On peut le voir sur l'exemple proposé :

$$\begin{aligned} \bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{p}{q} \right] &= \{0\}, & \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{p}{q} \right] &= [0; +\infty[, \\ \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{p}{q} \right] \right) &= \{0\}, & \bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{p}{q} \right] \right) &= [0; +\infty[. \end{aligned}$$

? Exercice 2.9

Soient E un ensemble et F et G deux parties de E . Montrer que

- 1) $C_E(C_E F) = F$
- 2) $F \subset G \iff C_E F \supset C_E G$
- 3) $C_E(F \cup G) = (C_E F) \cap (C_E G)$ et $C_E(F \cap G) = (C_E F) \cup (C_E G)$ [Lois de Morgan]

SOLUTION. 1. $x \in C_E(C_E F) \iff x \notin C_E F \iff x \in F$
 2. " $F \subset G$ " $\iff$ " $(x \in F) \implies (x \in G)$ " $\iff$ " $\text{non}(x \in G) \implies \text{non}(x \in F)$ " $\iff$ " $(x \in C_E G) \implies (x \in C_E F)$ " $\iff$ " $C_E G \subset C_E F$ "
 3. $x \in C_E(F \cup G) \iff x \notin (F \cup G) \iff x \notin F \text{ ET } x \notin G \iff x \in C_E(F) \text{ ET } x \in C_E(G) \iff x \in (C_E F) \cap (C_E G)$
 $x \in C_E(F \cap G) \iff x \notin F \text{ OU } x \notin G \iff x \in C_E(F) \text{ OU } x \in C_E(G) \iff x \in (C_E F) \cup (C_E G)$

? Exercice 2.10

Soit I un ensemble et $\{A_i\}_{i \in I}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

1. $C_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} C_E A_i$
2. $C_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} C_E A_i$.

SOLUTION. Soit I un ensemble et $\{A_i\}_{i \in I}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Alors

$$\begin{aligned} 1. x \in C_E \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) &\iff x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \iff \forall i \in \mathbb{N}^* x \notin A_i \iff \forall i \in \mathbb{N}^* x \in C_E(A_i) \iff x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_E(A_i) \\ 2. x \in C_E \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) &\iff x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \iff \exists i \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x \notin A_i \iff \exists i \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x \in C_E(A_i) \iff x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} C_E(A_i) \end{aligned}$$

? Exercice 2.11

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

$$A_i = \left[0, 1 + \frac{1}{i} \right], \quad B_i = \left[0, 1 - \frac{1}{i} \right], \quad C_i = \left[-1 - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i} \right], \quad D_i = \left[0, 1 + \frac{1}{i} \right],$$

avec $i \in \mathbb{N}^*$. Trouver les ensembles

1. $C_{\mathbb{R}}(A_i)$, 2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$, 3. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 4. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, 5. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, 7. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$;
8. $C_{\mathbb{R}}(B_i)$, 9. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$, 10. $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, 11. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, 12. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, 13. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, 14. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$;
15. $C_{\mathbb{R}}(C_i)$, 16. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(C_i)$, 17. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$, 18. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right)$, 19. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, 20. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)$, 21. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(C_i)$;
22. $C_{\mathbb{R}}(D_i)$, 23. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(D_i)$, 24. $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$, 25. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i\right)$, 26. $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, 27. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i\right)$, 28. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(D_i)$;

SOLUTION. TO DO

1. $C_{\mathbb{R}}(A_i) = \mathbb{R} \setminus A_i =]-\infty, 0[\cup]1 + \frac{1}{i}, +\infty[$,
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$,
3. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$,
4. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$,
5. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,
6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$,
7. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$;
8. $C_{\mathbb{R}}(B_i)$,
9. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$,
10. $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$,
11. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$,
12. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$,
13. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$,
14. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$;
15. $C_{\mathbb{R}}(C_i)$,
16. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(C_i)$,
17. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$,
18. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right)$,
19. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$,
20. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)$,

21. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(C_i);$
22. $C_{\mathbb{R}}(D_i),$
23. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(D_i),$
24. $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i,$
25. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i\right),$
26. $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i,$
27. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i\right),$
28. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(D_i).$

? Exercice 2.12

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $A_i = \left[-2, \frac{1}{-1-i^2}\right]$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Trouver les ensembles

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i, \quad C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right), \quad C_{\mathbb{R}}(A_i), \quad \bigcap_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i).$$

SOLUTION. En remarquant que $A_i \subset A_{i+1}$, que $A_0 = [-2, -1]$ et que $A_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} [-2, 0^-]$ on a

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i &= [-2, 0[, & C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) &=]-\infty; -2[\cup [0; +\infty[, \\ C_{\mathbb{R}}(A_i) &=]-\infty; -2[\cup \left[\frac{1}{-1-i^2}; +\infty\right[, & \bigcap_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i) &=]-\infty; -2[\cup [0; +\infty[. \end{aligned}$$

? Exercice 2.13

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $A_i = \left[-1, \frac{1}{1+i^2}\right]$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Trouver les ensembles

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i, \quad C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right), \quad C_{\mathbb{R}}(A_i), \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i).$$

SOLUTION. En remarquant que $A_{i+1} \subset A_i$, que $A_0 = [-1, 1[$ et que $A_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} [-1, 0^+]$ on a

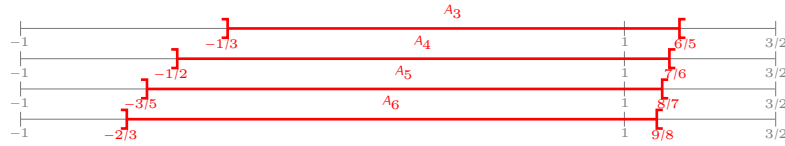
$$\begin{aligned} \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i &= [-1, 0], & C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right) &=]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[, \\ C_{\mathbb{R}}(A_i) &=]-\infty; -1[\cup \left[\frac{1}{1+i^2}; +\infty\right[, & \bigcup_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i) &=]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[. \end{aligned}$$



Soit $\mathbb{M} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}$. Considérons l'intervalle $A_m = \left] \frac{2-m}{m}; \frac{m+3}{m+2} \right[$ pour tout $m \in \mathbb{M}$. Expliciter les ensembles

1. $\bigcup_{m \in \mathbb{M}} A_m$, 2. $C_{\mathbb{R}} \left(\bigcup_{m \in \mathbb{M}} A_m \right)$, 3. $C_{\mathbb{R}}(A_m)$, 4. $\bigcap_{m \in \mathbb{M}} C_{\mathbb{R}}(A_m)$, 5. $\bigcap_{m \in \mathbb{M}} A_m$, 6. $C_{\mathbb{R}} \left(\bigcap_{m \in \mathbb{M}} A_m \right)$, 7. $\bigcup_{m \in \mathbb{M}} C_{\mathbb{R}}(A_m)$.

SOLUTION. Notons que $\frac{2-m}{m} \rightarrow -1^+$ et que $\frac{m+3}{m+2} \rightarrow 1^+$:



On peut alors conclure que

$$1. \bigcup_{m \in \mathbb{M}} A_m =]-1; \frac{6}{5}[$$

$$2. C_{\mathbb{R}} \left(\bigcup_{m \in \mathbb{M}} A_m \right) =]-\infty; -1] \cup [\frac{6}{5}; +\infty[$$

$$3. C_{\mathbb{R}}(A_m) =]-\infty; \frac{2-m}{m}] \cup [\frac{m+3}{m+2}; +\infty[$$

$$4. \bigcap_{m \in \mathbb{M}} C_{\mathbb{R}}(A_m) =]-\infty; -1] \cup [\frac{6}{5}; +\infty[$$

$$5. \bigcap_{m \in \mathbb{M}} A_m =]-\frac{1}{3}; 1]$$

$$6. C_{\mathbb{R}} \left(\bigcap_{m \in \mathbb{M}} A_m \right) =]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup]1; +\infty[$$

$$7. \bigcup_{m \in \mathbb{M}} C_{\mathbb{R}}(A_m) =]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup]1; +\infty[$$

Soient E et F deux ensembles.

Produit cartésien

$E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y un élément de F . L'égalité dans $E \times F$ est définie par : $(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'$.

Relation binaire

Une RELATION binaire (ou correspondance) de E dans (ou vers) F est un triplet $\mathcal{R} = (E, F; G)$ où G une partie de $E \times F$. L'ensemble E est appelé *ensemble de départ* de $\mathcal{R}$, l'ensemble F est appelé *ensemble d'arrivée* de $\mathcal{R}$. L'ensemble G est appelé *graphe* de $\mathcal{R}$.

Notation

Pour tout $(x, y) \in E \times F$, on écrit " $x\mathcal{R}y$ " et on dit " x est en relation avec y " ssi " $(x, y) \in G$ ".

Fonction

Une FONCTION f de E dans F est une relation de E dans F vérifiant : pour tout $x \in E$, il existe au plus un élément $y \in F$ satisfaisant xfy .

Domaine de définition

Le DOMAINE DE DÉFINITION D_f d'une fonction f de E dans F est l'ensemble des $x \in E$ satisfaisant : il existe un et un seul $y \in F$ tel que xfy .

Notation

Pour tout $x \in D_f$, on note $f(x)$ le seul point $y \in F$ satisfaisant xfy . Donc pour tout $(x, y) \in D_f \times F$, $xfy \iff y = f(x)$. Si $x \in D_f$ alors $f(x)$ est appelé "l'image de x par f ". Si $y \in F$ alors tout point $x \in D_f$ satisfaisant $y = f(x)$ est appelé "un antécédent de x par f ".

Image directe

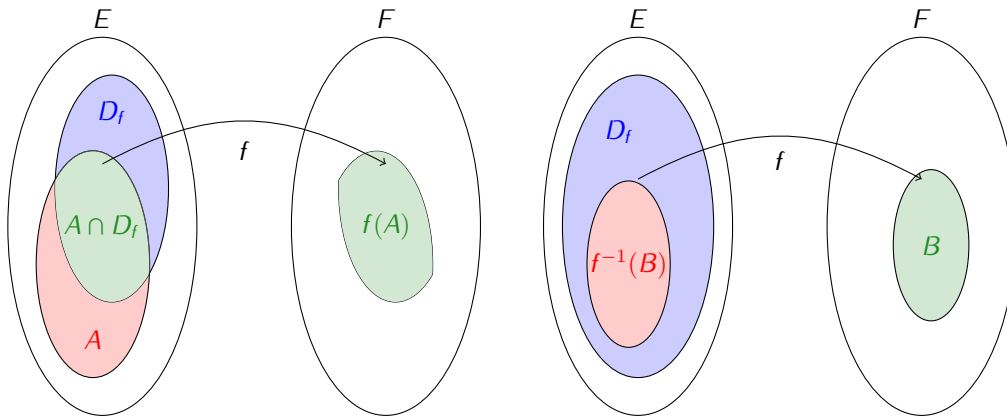
Soit f une fonction de E dans F et A une partie de E . L'IMAGE DIRECTE de A par f est la partie de F définie par $f(A) := \{y \in F : \exists x \in A \cap D_f \quad y = f(x)\}$.

Image réciproque

Soit f une fonction de E dans F et B une partie de F . L'IMAGE RÉCIPROQUE de B par f est la partie de E définie par $f^{-1}(B) := \{x \in D_f : f(x) \in B\}$.

Attention

Attention à ne pas confondre l'image réciproque de B , qui existe toujours, avec l'image de B par f^{-1} , qui n'existe que si f est une bijection. Ici on ne suppose rien sur f .



Application

Une application f de E dans F est une fonction de E dans F dont le domaine de définition est égal à E .

Injection

Une injection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

$$\forall (x, x') \in E \times E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Attention

Attention à ne pas confondre :

▷ la définition d'une application qui s'écrit

$$\begin{aligned} \forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x = x' &\implies f(x) = f(x'), \\ \forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) \neq f(x') &\implies x \neq x', \end{aligned}$$

▷ la définition d'application injective qui s'écrit

$$\begin{aligned} \forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x \neq x' &\implies f(x) \neq f(x'), \\ \forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') &\implies x = x'. \end{aligned}$$

Surjection

Une surjection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

Bijection

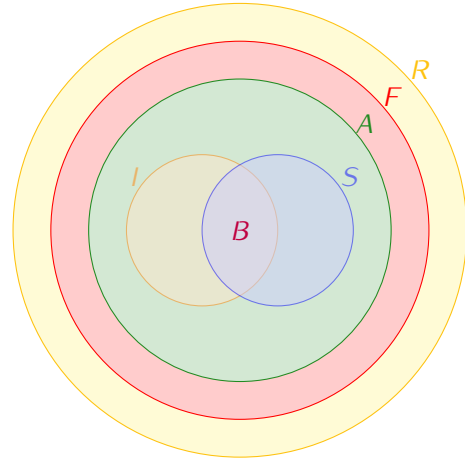
| Une bijection f de E dans F est une application de E dans F qui est injective et surjective.

Remarque

Soient

- ▷ R l'ensemble des relations
- ▷ F l'ensemble des fonctions
- ▷ A l'ensemble des applications
- ▷ I l'ensemble des applications injectives
- ▷ S l'ensemble des applications surjectives
- ▷ B l'ensemble des applications bijectives

Le dessin ci-contre se lit comme suit : "toute fonction est une relation mais il existe des relations qui ne sont pas des fonctions, de même toute application est une fonction mais il existe des fonctions qui ne sont pas des applications. Il existe des applications qui ne sont ni injectives ni surjectives, il existe des applications qui sont injectives mais qui ne sont pas surjectives, il existe des applications qui ne sont pas injectives mais qui sont surjectives et il existe des applications qui sont injectives et surjectives et sont appelées bijections."



Astuce

Soit E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Alors

- ▷ Une relation de E dans F est une fonction si toute droite vertical d'équation $x = k \in E$ intersecte le graphe de f au plus une fois.
- ▷ Une fonction $f: E \rightarrow F$ est une application si toute droite vertical d'équation $x = k \in E$ intersecte le graphe de f une fois et une seule.
- ▷ Une application $f: E \rightarrow F$ est une application injective si toute droite horizontale d'équation $y = k \in F$ intersecte le graphe de f au plus une fois.
- ▷ Une application $f: E \rightarrow F$ est une application surjective si toute droite horizontale d'équation $y = k \in F$ intersecte le graphe de f au moins une fois.
- ▷ Une application $f: E \rightarrow F$ est une application bijective si toute droite horizontale d'équation $y = k \in F$ intersecte le graphe de f exactement une fois.

 Exercices

? Exercice 3.1

Comment doit-on compléter la définition suivante : “ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F . On dit que f est **injective** si et seulement si...”

- ☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
- ☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
- ☐ pour tous x et y de E , la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

SOLUTION. $\square$ tout élément x de E n'a qu'une image par f

Cette assertion exprime que f est une application

- ☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application surjective
- ☒ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application bijective
- ☒ pour tous x et y de E , la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

? Exercice 3.2

Comment doit-on compléter la définition suivante : “ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F . On dit que f est **surjective** si et seulement si...”

- ☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
- ☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
- ☐ pour tous x et y de E , la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

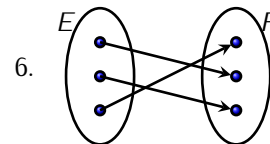
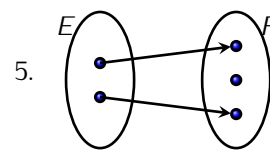
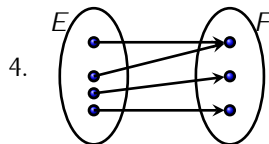
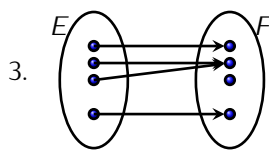
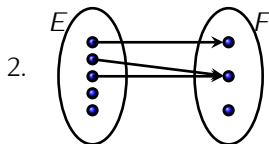
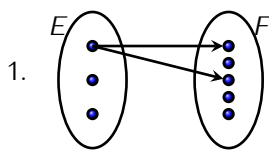
SOLUTION. $\square$ tout élément x de E n'a qu'une image par f

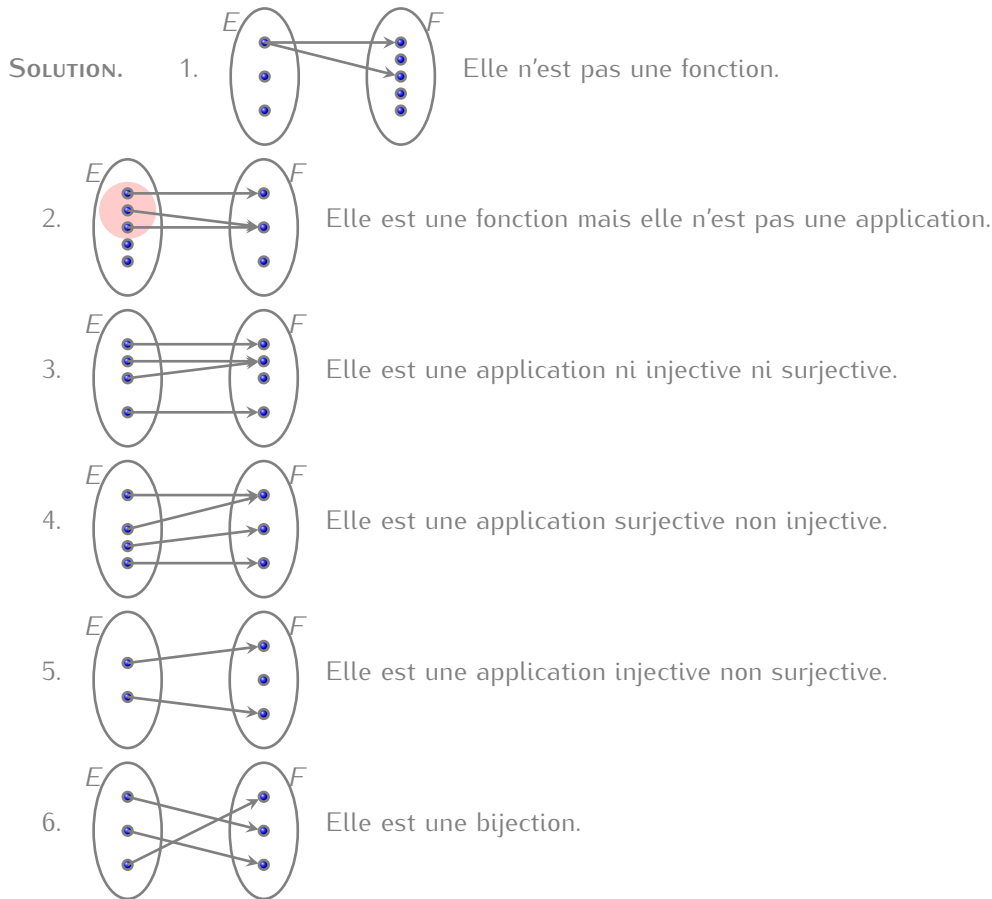
Cette assertion exprime que f est une application

- tout élément y de F a au moins un antécédent par f
- tout élément y de F a au plus un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application injective
- tout élément y de F a exactement un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application bijective
- pour tous x et y de E , la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application injective

Exercise 3.3

Soit E et F deux ensembles. Pour chaque relation $x\mathcal{R}y$ avec $x \in E$ et $y \in F$ déterminer celles qui sont des fonctions, puis le domaine de définition de chacune de ces fonctions, puis celles qui sont des applications et si elles sont injectives et/ou surjectives.





? Exercice 3.4

On note $E := \{1, 2, 3\}$ et $F := \{1, 2, 3, 4\}$. Tracer le graphe des six relations binaires de E dans F définies ci-dessous.

$$1. \forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathcal{R}_1y \iff x - y + 3 \geq 0,$$

$$4. \forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathcal{R}_4y \iff x - y + 2 = 0,$$

$$2. \forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathcal{R}_2y \iff x + 1 \geq y,$$

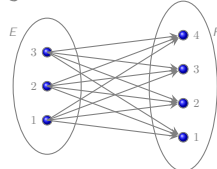
$$5. \forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathcal{R}_5y \iff y \text{ est pair},$$

$$3. \forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathcal{R}_3y \iff x \geq y,$$

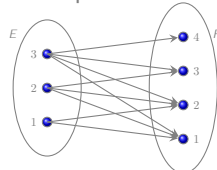
$$6. \forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathcal{R}_6y \iff x = y.$$

Parmi les six relations ci-dessus, déterminer celles qui sont des fonctions, puis le domaine de définition de chacune de ces fonctions. L'une de ces fonction est-elle une application ?

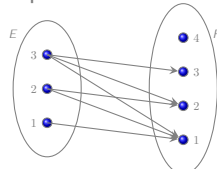
SOLUTION. 1. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathcal{R}_1y \iff x - y + 3 \geq 0$: elle n'est pas une fonction



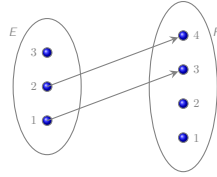
2. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathcal{R}_2y \iff x + 1 \geq y$: elle n'est pas une fonction



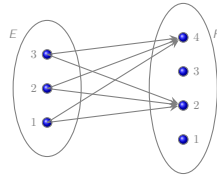
3. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathcal{R}_3y \iff x \geq y$: elle n'est pas une fonction



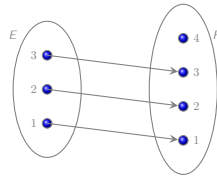
4. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x \mathcal{R}_4 y \iff x - y + 2 = 0$: elle est une fonction mais n'est pas une application



5. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x \mathcal{R}_5 y \iff y \text{ est pair}$: elle n'est pas une fonction



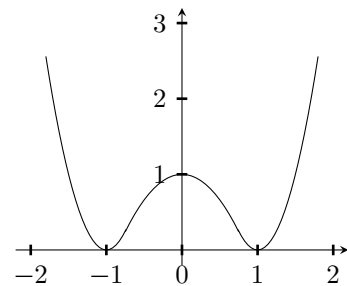
6. $\forall (x, y) \in E \times F \quad x \mathcal{R}_6 y \iff x = y$: elle est une application injective non surjective



? Exercice 3.5

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Quelle est l'image de 0 par f ?
2. Donner, en fonction de y , le nombre d'antécédents de y par f .
3. f est-elle injective? f est-elle surjective?



SOLUTION. 1. $f(0) = 1$

2. Notons $n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui donne le nombre d'antécédents de y par f en fonction de y . On trouve

$$n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \\ y \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } y > 1, \\ 3 & \text{si } y = 1, \\ 4 & \text{si } 0 < y < 1, \\ 2 & \text{si } y = 0, \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

3. f n'est pas injective car par exemple $f(-1) = f(1)$. f n'est pas surjective car par exemple $y = -1$ n'a pas d'antécédents.

? Exercice 3.6

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective?
2. f est-elle surjective?
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
4. Montrer que la restriction $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection.

- SOLUTION.**
1. f n'est pas injective car $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$
 2. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédents
 3. Pour montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :
 - ▷ on étudie la fonction et on note que le maximum absolu est 1 et que le minimum absolu est -1
 - ▷ on résout $y = f(x)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$: ceci est équivalente à résoudre $yx^2 - 2x + y = 0$ qui admet des solutions réelles ssi $4 - 4y^2 \geq 0$ ssi $y \in [-1, 1]$. On a alors prouvé que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
 4. Soit $y \in [-1, 1]$, alors les solutions possibles de $g(x) = y$ sont $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$. Or, seul $x = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1, 1]$ donc pour $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ on a trouvé un inverse $h: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $h(y) = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1 + \sqrt{1-y^2}}$, donc g est une bijection.

? Exercice 3.7

↳ Soit $f: [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

SOLUTION. ▷ f est injective car

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ a, b \in [1, +\infty[\end{cases} \implies \begin{cases} a^2 - 1 = b^2 - 1 \\ a, b \in [1, +\infty[\end{cases} \implies \begin{cases} a = \pm b \\ a, b \in [1, +\infty[\end{cases} \implies a = b$$

▷ f est surjective car pour tout $y \in [0, +\infty[$, l'élément $x = \sqrt{y+1}$ est tel que $\begin{cases} x \in [1, +\infty[\\ f(x) = y \end{cases}$.

? Exercice 3.8

↳ Déterminer le nombre de fonctions (applications, injections, surjections, bijections) de E dans F dans chacun des cas suivants.

1. $E = \{1\}$ et $F = \{1\}$,
2. $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$,
3. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2\}$,
4. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

SOLUTION. Soit A et B deux ensembles de cardinal $|A| = n$ et $|B| = m$.

- ▷ Le nombre d'applications de A dans B est m^n .
- ▷ Le nombre d'injections de A dans B est $n! \binom{m}{n} = n! \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!}$ si $n \leq m$, 0 sinon.
- ▷ Le nombre de surjections de A dans B est 0 si $n < m$, $n!$ si $n = m$, $\sum_{0 \leq j \leq m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} j^n$ sinon.
- ▷ Le nombre de bijections de A dans B est 0 si $n \neq m$, $n!$ si $n = m$.

1. $n = m = 1$. Applications : 1, injections : 1, surjections : 1, bijections : 1.
2. $n = 2, m = 3$. Applications : $3^2 = 9$, injections : $\frac{3!}{(3-2)!} = 6$, surjections : 0, bijections : 0.
3. $n = 3, m = 2$. Applications : $2^3 = 8$, injections : 0, surjections : $\sum_{0 \leq j \leq 2} (-1)^{2-j} j^3 \frac{2!}{j!(2-j)!} = 0 - 2 + 8 = 6$, bijections : 0.
4. $n = m = 3$. Applications : $3^3 = 27$, injections : $3! = 6$, surjections : $3! = 6$, bijections : $3! = 6$.

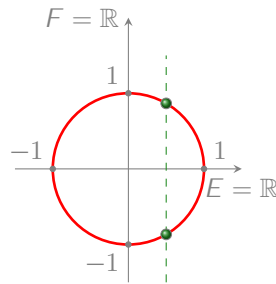
? Exercice 3.9

↳ Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire de E dans F définie par

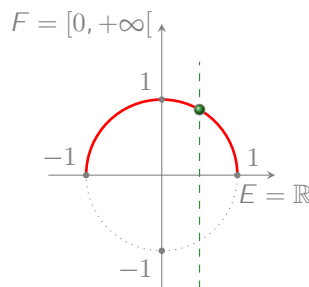
$$x \mathcal{R} y \iff x^2 + y^2 = 1.$$

1. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ alors $\mathcal{R}$ n'est pas une fonction.
2. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = [0, +\infty[$ alors $\mathcal{R}$ est une fonction dont on déterminera le domaine de définition D . Pour tout $(x, y) \in D \times F$ tel que $x \mathcal{R} y$, expliciter y en fonction de x .
3. Montrer que si $E = [-1, +1]$ et $F = [0, +\infty[$ alors $\mathcal{R}$ est une application qui n'est ni injective ni surjective.

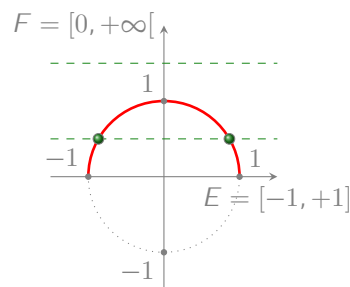
SOLUTION. 1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R} : \mathcal{R}$ n'est pas une fonction car par exemple $x = \frac{1}{2}$ vérifie $x\mathcal{R}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



2. $E = \mathbb{R}$ et $F = [0, +\infty[: \mathcal{R}$ est une fonction dont le domaine de définition est $D = [-1, 1]$. Pour tout $(x, y) \in D \times F$ tel que $x\mathcal{R}y$, $y = \sqrt{1 - x^2}$.



3. $E = [-1, +1]$ et $F = [0, +\infty[: \mathcal{R}$ est une application qui n'est pas injective car $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathcal{R}x$ ni surjective car par exemple $y = \frac{3}{2}$ n'a pas d'antécédents.



? Exercice 3.10

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants

$$A = [0, 1]$$

$$B =]-1, 4[$$

$$C = [0, +\infty[$$

$$D =]-\infty, 5]$$

SOLUTION.

	f	f^{-1}
$A = [0, 1]$	$[1, 2]$	$\{0\}$
$B =]-1, 4[$	$[1, 17]$	$] -\sqrt{3}, \sqrt{3}[$
$C = [0, +\infty[$	$[1, +\infty[$	$\mathbb{R}$
$D =]-\infty, 5]$	$[1, +\infty[$	$[-2, 2]$

? Exercice 3.11

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soient $A := [-2, 1]$ et $B := [-1, 4]$.

1. Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

2. Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.

3. Calculer $f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(A))$ puis comparer ces deux ensembles et A .

SOLUTION. On a $A := [-2, 1]$, $B := [-1, 4]$, $f(A) = [0, 4]$ et $f(B) = [0, 16]$.

1. $A \cap B = [-1, 1]$, $f(A \cap B) = [0, 1]$ et $f(A) \cap f(B) = [0, 4]$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. $A \cup B = [-2, 4]$, $f(A \cup B) = [0, 16]$ et $f(A) \cup f(B) = [0, 16]$ donc $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$ donc $A \subset f^{-1}(f(A))$
 $f^{-1}(A) = [-1, 1]$, $f(f^{-1}(A)) = f([-1, 1]) = [0, 1]$ donc $f(f^{-1}(A)) \subset f(A)$.

? Exercice 3.12

Soit $f: E \rightarrow F$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

- (a) f est injective
- (b) pour tout A, B sous-ensembles de E on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

SOLUTION. (a) $\Rightarrow$ (b) Par hypothèse f est injective, cela signifie que pour tout $x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

- ▷ Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A$ alors $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in B$ alors $y = f(x) \in f(B)$. On a que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- ▷ Réciproquement, si $y \in f(A) \cap f(B)$ alors il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$ et de même il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Comme f est injective, on a $a = b$ qui appartient à $A \cap B$. On a que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Soit a et b deux éléments de E tels que $f(a) = f(b)$ et notons y cet élément de F . Définissons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Puisque $y = f(a)$ et $y = f(b)$ alors $\{y\} = f(A) = f(B)$. Par hypothèse $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ donc $f(A \cap B) = \{y\}$ d'où $a = b$: f est alors injective.

? Exercice 3.13

Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F .

1. Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de E . Montrer que

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

2. Soit $\{B_j\}_{j \in J}$ une famille de parties de F . Montrer que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

SOLUTION. 1. Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de E .

- 1.1. Prouvons que $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} f(A_i)$: soit $y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$, alors il existe $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ tel que $f(x) = y$, cela implique qu'il existe un indice $i \in I$ tel que $x \in A_i$ et $f(x) = y$, mais alors $y \in f(A_i)$ et donc $y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

- 1.2. Prouvons que $\bigcup_{i \in I} f(A_i) \subset f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$: soit $y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$, alors il existe $i \in I$, $y \in f(A_i)$, cela implique qu'il existe $x \in A_i$ tel que $y = f(x)$, mais alors $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et donc $y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

- 1.3. Prouvons que $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$: soit $y \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$, alors il existe $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ tel que $f(x) = y$, cela implique que $x \in A_i$ pour tout indice $i \in I$ et $f(x) = y$, mais alors $y \in f(A_i)$ pour tout indice $i \in I$ et donc $y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

2. Soit $\{B_j\}_{j \in J}$ une famille de parties de F .

- 2.1. Prouvons que $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \subset \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$: soit $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$, alors il existe $y \in \bigcup_{j \in J} B_j$ tel que $f^{-1}(x) = y$, cela implique qu'il existe un indice $j \in J$ tel que $y \in B_j$ et $y = f^{-1}(x)$, c'est-à-dire qu'il existe un indice $j \in J$ tel que $x \in f^{-1}(B_j)$, mais alors $x \in \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

- 2.2. Prouvons que $\bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$: soit $x \in \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$, alors il existe un indice $j \in J$ tel que $x \in f^{-1}(B_j)$, c'est-à-dire qu'il existe $y \in B_j$ tel que $f^{-1}(y) = x$, cela implique que $y \in \bigcup_{j \in J} B_j$ et $f^{-1}(y) = x$, mais alors $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$.

2.3. Prouvons que $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) \subset \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$: soit $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$, alors il existe $y \in \bigcap_{j \in J} B_j$ tel que $f^{-1}(y) = x$, c'est-à-dire que pour tout $j \in J$, $y \in B_j$ et $f^{-1}(y) = x$, cela implique que pour tout $j \in J$, $x \in f^{-1}(B_j)$, mais alors $x \in \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

2.4. Prouvons que $\bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j) \subset f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$: soit $x \in \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$, alors pour tout $j \in J$, $x \in f^{-1}(B_j)$, c'est-à-dire que pour tout $j \in J$, il existe $y \in B_j$ tel que $f^{-1}(y) = x$, cela implique que pour tout $y \in \bigcap_{j \in J} B_j$ et $f^{-1}(y) = x$, mais alors $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$.

? Exercice 3.14

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

1. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = 2n$,
2. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = -n$,
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
5. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n + 1$,
6. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que $f(n) = n + 1$,
7. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = n + 1$,
8. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

SOLUTION.

1. est injective non surjective car tous les y impaires n'ont pas d'antécédents,
2. est bijective,
3. n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = 1$ ni surjective car $y = -2$ n'a pas d'antécédents,
4. n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = 1$ mais elle est surjective,
5. est injective mais n'est pas surjective car $y = 0$ n'a pas d'antécédents,
6. est bijective,
7. est bijective car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k = n + 1 \iff n = k - 1$,
8. est bijective.

? Exercice 3.15

1. Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$.
 - 1.1. Est-elle injective ? Surjective ?
 - 1.2. Soit $g:]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $g(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?
 - 1.3. Soit $h: [0; +\infty[\setminus \{1\} \rightarrow [0; 1]$ l'application telle que $h(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?
 2. Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$.
 - 2.1. Est-elle injective ? Surjective ?
 - 2.2. Soit $g: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $g(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?
 - 2.3. Soit $h: [0; +\infty[\rightarrow [0; 1]$ la fonction telle que $h(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?
- Prouver chaque affirmation.

SOLUTION.

1. Remarquons que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$. On voit que $f(x_1) = f(x_2) \iff (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \iff x_1 - 1 = \pm(x_2 - 1) \iff x_2 = x_1$ ou $x_2 = 2 - x_1$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On voit que $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \iff (x - 1)^2 = \frac{1}{y} \iff x = 1 + \sqrt{\frac{1}{y}}$, ce qui impose $y > 0$. On peut alors répondre aux questions :

- 1.1. $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$.
 - ▷ f n'est pas injective car $f(2) = f(0)$
 - ▷ f n'est pas surjective car $y = -1$ n'as pas d'antécédents.
- 1.2. $g:]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$.
 - ▷ $f(x_1) = f(x_2)$ ssi $x_2 = x_1$ ou $x_2 = 2 - x_1$. Si $x_1 \in]1; +\infty[$ alors $x_2 = 2 - x_1 \notin]1; +\infty[$ donc $g(x_1) = g(x_2)$ ssi $x_2 = x_1$: g est injective.
 - ▷ g n'est pas surjective car $y = -1$ n'as pas d'antécédents.
- 1.3. $h: [0; +\infty[\setminus \{1\} \rightarrow [0; 1]$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$.

- ▷ h n'est pas injective car $f(2) = f(0)$
- ▷ h n'est pas surjective car $y = 0$ n'as pas d'antécédents.

2. Remarquons que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Soit x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$. On voit que $f(x_1) = f(x_2) \iff (x_1+1)^2 = (x_2+1)^2 \iff x_1+1 = \pm(x_2+1) \iff x_2 = x_1$ ou $x_2 = -x_1-2$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On voit que $y = \frac{1}{x^2+2x+1} \iff (x+1)^2 = \frac{1}{y} \iff x = -1 + \sqrt{\frac{1}{y}}$, ce qui impose $y > 0$. On peut alors répondre aux questions :

2.1. $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$.

- ▷ f n'est pas injective car $f(-2) = f(0)$
- ▷ f n'est pas surjective car $y = -1$ n'as pas d'antécédents.

2.2. $g: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1}$.

- ▷ $f(x_1) = f(x_2)$ ssi $x_2 = x_1$ ou $x_2 = -2 - x_1$. Si $x_1 \in [1; +\infty[$ alors $x_2 = -2 - x_1 \notin [1; +\infty[$ donc $g(x_1) = g(x_2)$ ssi $x_2 = x_1$: g est injective.
- ▷ g n'est pas surjective car $y = -1$ n'as pas d'antécédents.

2.3. $h: [0; +\infty] \rightarrow [0; 1]$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$.

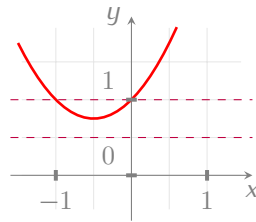
- ▷ h n'est pas injective car $f(-2) = f(0)$
- ▷ h n'est pas surjective car $y = 0$ n'as pas d'antécédents.

? Exercice 3.16

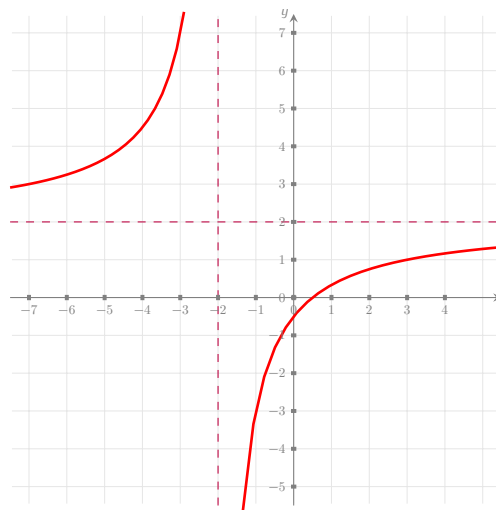
1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

SOLUTION.

1. f n'est pas injective car $f(-1) = f(0) = 1$ ni surjective car $y = 0$ n'a pas d'antécédents.



2. g est injective mais n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédents.



Soit E, F, G et H quatre ensembles.



Composition

Si f est une application de E dans F et g une application de F dans G alors $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par : $\forall x \in E \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Théorème (associativité)

Si f est une application de E dans F , g une application de F dans G et h une application de G dans H alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.



Application réciproque

Soit f une application de E dans F . On dit que f admet une réciproque (ou inverse) ssi il existe une application g de F dans E telle que

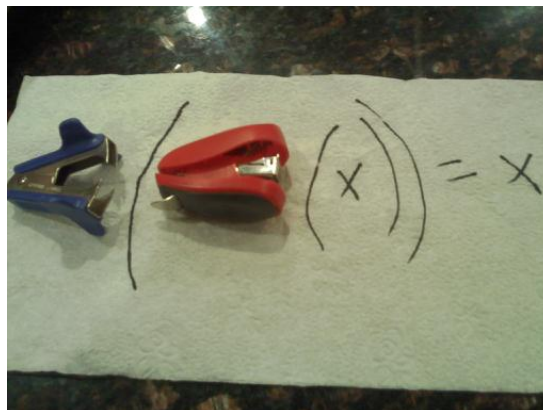
$$\forall (x, y) \in E \times F \quad y = f(x) \iff g(y) = x.$$

Si une telle application g existe, elle est unique et notée f^{-1} .



Théorème (réciprocité)

Soit f une application de E dans F . Alors f admet une réciproque ssi f est bijective.



 Exercices

? **Exercice 4.1 composition, réciprocity**

Soient f, g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 7x^2 - 2$. Montrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que g n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

SOLUTION. $\triangleright$ f est bijective donc elle admet une fonction réciproque ; comme $y = 2x + 1$ ssi $x = (y - 1)/2$ on obtient

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \frac{y - 1}{2}$$

$\triangleright$ g n'admet pas d'application réciproque car elle n'est pas injective (ni surjective).

$\triangleright$ $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et l'on a $x \mapsto y = 2x + 1 \mapsto 7y^2 - 2 = 7(2x + 1)^2 - 2 = 28x^2 + 28x + 5$ donc $g(f(x)) = 28x^2 + 28x + 5$,

$\triangleright$ $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et l'on a $x \mapsto y = 7x^2 - 2 \mapsto 2y + 1 = 2(7x^2 - 2) + 1 = 14x^2 - 3$ donc $f(g(x)) = 14x^2 - 3$.

? **Exercice 4.2 composition, réciprocity**

Soient les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par $f(x, y) = 2x + 3y + 1$ et $g(t) = (t, 2t - 1)$.

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Montrer que $f \circ g$ admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que $g \circ f$ n'en admet pas.

SOLUTION. $\triangleright$ $g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et l'on a $(x, y) \mapsto t = 2x + 3y + 1 \mapsto (t, 2t - 1) = (2x + 3y + 1, 2(2x + 3y + 1) - 1) = (2x + 3y + 1, 4x + 6y + 1)$ donc $g(f(x)) = (2x + 3y + 1, 2(2x + 3y + 1) - 1)$.

$\triangleright$ $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et l'on a $t \mapsto (x, y) = (t, 2t - 1) \mapsto 2x + 3y + 1 = 2t + 3(2t - 1) + 1 = 8t - 2$ donc $f(g(t)) = 8t - 2$.

$\triangleright$ $f \circ g$ est bijective et son inverse est l'application $(f \circ g)^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $(f \circ g)^{-1}(y) = (y + 2)/8$.

$\triangleright$ $g \circ f$ n'est pas bijective car elle n'est pas injective, en effet $f(4, 4) = f(1, 6) = 21$, par conséquent $g(f(4, 4)) = g(f(1, 6))$.

? **Exercice 4.3 composition, associativité**

Soient les applications f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par $f(x, y, z) = (2x, y + z)$, $g(u, v) = v - u$ et $h(t) = (3t + 1, 2t)$. Calculer $h \circ g$ puis $h \circ (g \circ f)$.

SOLUTION. $\triangleright$ $h \circ g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et l'on a $t \mapsto (u, v) = (3t + 1, 2t) \mapsto v - u = 2t - 3t - 1 = -t - 1$ donc $h(g(t)) = (-t - 1, 2(-t - 1)) = (-t - 1, -2t - 2)$.

$\triangleright$ $h \circ (g \circ f): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et l'on a $(x, y, z) \mapsto (u, v) = (2x, y + z) \mapsto t = v - u = y + z - 2x \mapsto (3t + 1, 2t) = (3(y + z - 2x) + 1, 2(y + z - 2x)) = (-6x + 3y + 3z + 1, 2y + 2z - 4x)$ donc $h(g(f(x, y, z))) = (-6x + 3y + 3z + 1, -4x + 2y + 2z)$.

? **Exercice 4.4 réciprocity**

Soit l'application f de $E = \mathbb{R}^2$ dans $F = \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - 2y)$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

SOLUTION. f admet une réciproque ssi f est bijective :

$\triangleright$ démontrons que f est injective : soit $(a_1, b_1) \in F$ et $(a_2, b_2) \in F$. Alors il existe $(x_1, y_1) \in E$ et $(x_2, y_2) \in E$ tels que $f(x_1, y_1) = (a_1, b_1)$ et $f(x_2, y_2) = (a_2, b_2)$.

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff \begin{cases} 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2 \\ x_1 - 2y_1 = x_2 - 2y_2 \end{cases} \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2);$$

$\triangleright$ f est surjective (trivial).

La réciproque de f est la fonction $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $(a, b) \mapsto ((2a + b)/5, (a - 2b)/5)$.

? Exercice 4.5 réciprocity

Soit l'application f de $]1, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

SOLUTION.
$$\begin{cases} x \in]1, +\infty[\\ y \in]0, +\infty[\\ y = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in]1, +\infty[\\ y \in]0, +\infty[\\ y^2 = \frac{1}{x^3-1} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in]1, +\infty[\\ y \in]0, +\infty[\\ x^3 = \frac{1}{y^2} + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in]1, +\infty[\\ y \in]0, +\infty[\\ x = \sqrt[3]{\frac{1}{y^2} + 1} \end{cases}$$

? Exercice 4.6 réciprocity

Soit les applications f de $\mathbb{R}$ dans $] -1, +1[$ et g de $] -1, +1[$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et $g(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis en déduire que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

SOLUTION. $f \circ g :] -1, +1[\rightarrow] -1, +1[$ et l'on a

$$x \mapsto y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \mapsto \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = \frac{e^{2(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x})}-1}{e^{2(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x})}+1} = \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\frac{1+x}{1-x}+1} = x.$$

$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et l'on a

$$x \mapsto y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}} = x.$$

Comme $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ (attention, le domaine de définition n'est pas le même), on conclut que g est la réciproque de f .

? Exercice 4.7 réciprocity

L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$ admet-elle une application réciproque ?

SOLUTION. No car elle n'est pas bijective ($f(-1) = f(0)$).

? Exercice 4.8 réciprocity

L'application f de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ admet-elle une application réciproque ?

SOLUTION. No car elle n'est pas bijective ($y = 2$ n'a pas d'antécédents).

? Exercice 4.9 composition, injection, surjection

Démontrer que

1. la composée de deux injections est une injection,
2. la composée de deux surjections est une surjection,
3. la composée de deux bijections est une bijection,
4. si la composition $g \circ f$ est injective alors f est injective,
5. si la composition $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

SOLUTION. Soit $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow C$ deux fonctions. Alors $g \circ f: A \rightarrow C$.

1. Démontrons que la composée de deux injections est une injection. Soit a_1 et a_2 deux éléments de A tels que $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Comme g est injective, $f(a_1) = f(a_2)$. Comme f est injective, $a_1 = a_2$. Cela prouve que $g \circ f$ est injective.
2. Démontrons que la composée de deux surjections est une surjection. Comme g est surjective, pour tout $c \in C$ il existe au moins un élément $b \in B$ tel que $g(b) = c$. Comme f est surjective, il existe au moins un élément $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Par conséquent, pour tout $c \in C$ il existe au moins un élément $a \in A$ tel que $g(f(a)) = c$. Cela prouve que $g \circ f$ est surjective.
3. Démontrons que la composée de deux bijections est une bijection. Si f et g sont bijectives, alors elles sont injectives et surjectives, donc la composée est injective et surjective, autrement dit est bijective.
4. Démontrons que si la composition $g \circ f$ est injective alors f est injective. Soit a_1 et a_2 deux éléments de A tels que $f(a_1) = f(a_2)$. Alors $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Par hypothèse $g \circ f$ est injective, donc $a_1 = a_2$, cela implique que f est injective.
5. Démontrons que si la composition $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. Par hypothèse $g \circ f$ est surjective, cela signifie que pour tout $c \in C$ il existe $a \in A$ tel que $g(f(a)) = c$. Notons $b = f(a)$. Alors $g(b) = c$, ce qui prouve que g est surjective.

? Exercice 4.10

Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F . Montrer que

1. $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) \subset B$;
2. f est injective ssi $\forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$.
3. $\forall A \subset E, A \subset f^{-1}(f(A))$;
4. f est surjective ssi $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B$.

SOLUTION. Image

1. directe $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$, i.e. l'ensemble des $f(x) \in F$ pour x parcourant A ;
2. inverse (réciproque) $f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. L'image réciproque se note $f^{-1}(B)$ bien que f^{-1} ne soit pas définie en générale. Cependant, si f est bijective, le symbole f^{-1} a deux sens : il représente d'abord l'image réciproque I de B par f et aussi l'image directe I' de B par f^{-1} . Heureusement, $I = I'$.

On a

1. $x_0 \in f(f^{-1}(B))$ ssi $\exists z \in f^{-1}(B)$ tel que $x_0 = f(z)$ et $z \in f^{-1}(B)$ ssi $f(z) \in B$. Ceci prouve que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. Si f est injective y_0 a comme unique antécédent x_0 et on a $A = f^{-1}(f(A))$.
3. Soit $x_0 \in A$. Alors il existe un et un seul $y_0 \in F$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et, par définition de $f(A)$, ce $y_0 \in f(A)$. De plus, il existe au moins un antécédent de ce y_0 par f , à savoir x_0 . Donc $x_0 \in f^{-1}(f(A))$, ce qui prouve que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
4. f est surjective ssi $\forall B, f(f^{-1}(B)) = B$.
 - ▷ Supposons f surjective. On a toujours $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Si $B = \emptyset$ alors $f(f^{-1}(B)) = \emptyset$. Soit donc $B \neq \emptyset$. Pour tout $b \in B$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = b$ car f est surjective. Donc $f(x) \in B$ alors $x \in f^{-1}(B)$ et $b = f(x) \in f(f^{-1}(B))$; on a bien $f(f^{-1}(B)) = B$ pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$.
 - ▷ Supposons que pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$. Pour tout $b \in F$ on a $f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\}$ donc $f(f^{-1}(\{b\})) \neq \emptyset$ ce qui prouve que f est surjective.

? Exercice 4.11

Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x) = 2 + x^2$.

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
 - 1.1. Montrer que f est une application.
 - 1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.
 - 1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F = [2, +\infty[$.
 - 2.1. Montrer que f est une application bijective.
 - 2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f .

SOLUTION. 1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.

1.1. Puisque $\mathcal{D}_f = E$, la fonction f est une application.

1.2. Une application $f: E \rightarrow F$ est injective si $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Puisque $f(\pm 1) = 3$, f n'est pas une application injective.

1.3. Une application $f: E \rightarrow F$ est surjective si $\forall y \in F \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $1 \in F$ mais l'équation $1 = f(x)$ n'admet pas de solution $x \in E$, f n'est pas une application surjective.

2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F = [2, +\infty[$.

2.1. La restriction de f à ces nouveaux ensembles la rend injective et surjective car pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $y = f(x)$:

$$y = 2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = y - 2 \stackrel{x \in E}{\Leftrightarrow} x = -\sqrt{y - 2}$$

donc f est bijective.

2.2. Étant f une application bijective, l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f est

$$\begin{aligned} f^{-1}: F &\rightarrow E \\ y &\mapsto -\sqrt{y - 2}. \end{aligned}$$

? Exercice 4.12

Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x) = -x^2$.

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.

1.1. Montrer que f est une application.

1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.

1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.

2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F =]-\infty, 0]$.

2.1. Montrer que f est une application bijective.

2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f .

SOLUTION. 1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.

1.1. Puisque $\mathcal{D}_f = E$, la fonction f est une application.

1.2. Une application $f: E \rightarrow F$ est injective si $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Puisque $f(\pm 1) = -1$, f n'est pas une application injective.

1.3. Une application $f: E \rightarrow F$ est surjective si $\forall y \in F \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $1 \in F$ mais l'équation $1 = f(x)$ n'admet pas de solution $x \in E$, f n'est pas une application surjective.

2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F =]-\infty, 0]$.

2.1. La restriction de f à ces nouveaux ensembles la rend injective et surjective car pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $y = f(x)$:

$$y = -x^2 \Leftrightarrow x^2 = -y \stackrel{x \in E}{\Leftrightarrow} x = -\sqrt{-y}$$

donc f est bijective.

2.2. Étant f une application bijective, l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f est

$$\begin{aligned} f^{-1}: F &\rightarrow E \\ y &\mapsto -\sqrt{-y}. \end{aligned}$$

? Exercice 4.13

Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x) = 1 - x^2$.

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.

- 1.1. Montrer que f est une application.
- 1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.
- 1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E = [0, +\infty[$ et $F =]-\infty, 1]$.
 - 2.1. Montrer que f est une application bijective.
 - 2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f .

SOLUTION. 1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.

- 1.1. Puisque $\mathcal{D}_f = E$, la fonction f est une application.
- 1.2. Une application $f: E \rightarrow F$ est injective si $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Puisque $f(\pm 1) = 0$, f n'est pas une application injective.
- 1.3. Une application $f: E \rightarrow F$ est surjective si $\forall y \in F \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $2 \in F$ mais l'équation $2 = f(x)$ n'admet pas de solution $x \in E$, f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E = [0, +\infty[$ et $F =]-\infty, 1]$.
 - 2.1. La restriction de f à ces nouveaux ensembles la rend injective et surjective car pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $y = f(x)$:

$$y = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y \stackrel{x \in E}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{1 - y}$$

donc f est bijective.

- 2.2. Étant f une application bijective, l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f est

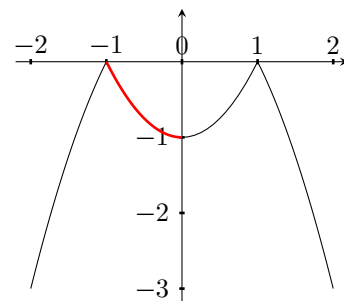
$$f^{-1}: F \rightarrow E$$

$$y \mapsto +\sqrt{1 - y}.$$

? Exercice 4.14

Après avoir rappelé la définition d'une application f de E dans F et la définition d'une application injective f de E dans F (faire attention à l'utilisation des quantificateurs), considérons l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x^2 - 1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Soit g l'application définie de $] -1; 0]$ dans $[-1; 0]$ par $g(x) = f(x)$. g est-elle injective? g est-elle surjective?
2. Soit h l'application définie de $] -1; 0]$ dans $[-1; 0[$ par $h(x) = f(x)$. Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h .



SOLUTION. f est une application si $\forall x \in E, \forall x' \in E, x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E, f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$); f est une application injective si $\forall x \in E, \forall x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$).

1. g est une application injective car pour $x_1, x_2 \in] -1; 0]$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -|x_1^2 - 1| = -|x_2^2 - 1| \stackrel{x_i^2 - 1 \leq 0}{\Rightarrow} x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \stackrel{x_i \leq 0}{\Rightarrow} x_1 = x_2$. Elle n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
2. h est une application bijective car elle est injective (même démonstration que pour g) et surjective (en effet, pour tout $y \in [-1; 0[$, si on pose $x = -\sqrt{1 - y}$ alors $x \in] -1; 0]$ et $h(x) = y$). Pour trouver h^{-1} application réciproque (inverse) de h on doit isoler x dans l'expression $y = h(x)$ donc

$$y = -|x^2 - 1| \quad \text{pour } x \in] -1; 0] \text{ et } y \in [-1; 0[$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 - y$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{1-y}$$

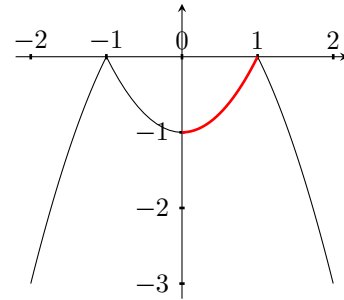
donc h^{-1} est l'application de $[-1; 0[$ dans $] -1; 0]$ définie par $h^{-1}(x) = -\sqrt{1-x}$.

? Exercice 4.15

Après avoir rappelé la définition d'une application f de E dans F et la définition d'une application injective f de E dans F (faire attention à l'utilisation des quantificateurs), considérons l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x^2 - 1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Soit g l'application définie de $[0; 1[$ dans $[-1; 0]$ par $g(x) = f(x)$. g est-elle injective? g est-elle surjective?

2. Soit h l'application définie de $[0; 1[$ dans $[-1; 0]$ par $h(x) = f(x)$. Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h .



SOLUTION. f est une application si $\forall x \in E, \forall x' \in E, x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E, f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$); f est une application injective si $\forall x \in E, \forall x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$).

- g est une application injective car pour $x_1, x_2 \in]-1; 0]$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -|x_1^2 - 1| = -|x_2^2 - 1| \xrightarrow{x_i^2 - 1 \leq 0} x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \xrightarrow{x_i \geq 0} x_1 = x_2$. Elle n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
- h est une application bijective car elle est injective (même démonstration que pour g) et surjective (en effet, pour tout $y \in [-1; 0]$, si on pose $x = \sqrt{1+y}$ alors $x \in [0; 1[$ et $h(x) = y$). Pour trouver h^{-1} application réciproque (inverse) de h on doit isoler x dans l'expression $y = h(x)$ donc

$$\begin{aligned} y &= -|x^2 - 1| \quad \text{pour } x \in [0; 1[\text{ et } y \in [-1; 0] \\ \Leftrightarrow y &= x^2 - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1 + y \\ \Leftrightarrow x &= +\sqrt{1+y} \end{aligned}$$

donc h^{-1} est l'application de $[-1; 0]$ dans $[0; 1[$ définie par $h^{-1}(x) = +\sqrt{1+x}$.

Soit X un ensemble ordonné (par exemple $\mathbb{R}$) et soit Y une partie de X .

Majorant

Un élément $a \in X$ est appelé majorant de Y si $a \geq y$ pour tout $y \in Y$.

Minorant

Un élément $a \in X$ est appelé minorant de Y si $a \leq y$ pour tout $y \in Y$.

Ensemble majoré, minoré, borné

- ▷ Si Y admet des majorants, on dit que Y est majoré.
- ▷ Si Y admet des minorants, on dit que Y est minoré.
- ▷ Si Y est majoré et minoré, on dit que Y est borné.

Supremum

$a \in X$ est appelé borne supérieure de Y si c'est le plus petit des majorants de Y . Si elle existe, elle est unique et est notée $\sup Y$.

Infimum

$a \in X$ est appelé borne inférieure de Y si c'est le plus grand des minorants de Y . Si elle existe, elle est unique et est notée $\inf Y$.

Maximum

$a \in X$ est appelé plus grand élément de Y ou élément maximale de Y ou max de Y si $a \in Y$ et a est majorant de Y .

Minimum

$a \in X$ est appelé plus petit élément de Y ou élément minimale de Y ou min de Y si $a \in Y$ et a est minorant de Y .

Nota bene :

on a les implications suivantes

1. " a est le max de Y " $\implies$ " a est le sup de Y " $\implies$ " a est majorant de Y ";
2. " a est le min de Y " $\implies$ " a est le inf de Y " $\implies$ " a est minorant de Y ".

| Les réciproques sont fausses.



Supremum, infimum, maximum et minimum d'une fonction

Soient E un ensemble et $f: E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On appelle borne supérieure de f dans E la borne supérieure de l'image directe de E par f , c'est-à-dire $\sup f(E)$. De la même manière on définit la borne inférieure de f dans E , ainsi que le maximum et le minimum et on les note

$$\sup_E f(x) \quad \inf_E f(x) \quad \max_E f(x) \quad \min_E f(x).$$

Exercice 5.1

Calculer

$$\sup_{x \in [1,2]} \frac{1}{x}$$

$$\sup_{x \in]1,2[} \frac{1}{x}$$

$$\sup_{x > 0} \frac{1}{x}$$

$$\inf_{x > 0} \frac{1}{x}$$

SOLUTION.

$$\sup_{x \in [1,2]} \frac{1}{x} = 1$$

$$\sup_{x \in]1,2[} \frac{1}{x} = 1$$

$$\sup_{x > 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\inf_{x > 0} \frac{1}{x} = 0$$

Exercice 5.2

Soit $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{S} :=]-2, -1[\cup]0, \frac{1}{2}[.$$

Calculer inf et sup de chacun des ensembles suivants en spécifiant s'ils sont respectivement aussi max et min.

$$\mathcal{A} := \left\{ \log_{10} \left| \frac{x}{y} \right| : x, y \in \mathcal{S} \right\},$$

$$\mathcal{B} := \{ 2^{xy} : x, y \in \mathcal{S} \},$$

$$\mathcal{C} := \{ 2^{x/y} : x, y \in \mathcal{S} \},$$

$$\mathcal{D} := \{ \sin(x+y) : x, y \in \mathcal{S} \},$$

$$\mathcal{E} := \{ \cos(x+y) : x, y \in \mathcal{S} \}.$$

SOLUTION.

$$\inf \mathcal{A} = -\infty,$$

il n'est pas minimum

$$\left(x \rightarrow 0^+, y = \frac{1}{2} \right)$$

$$\sup \mathcal{A} = +\infty,$$

il n'est pas maximum

$$\left(x = \frac{1}{2}, y \rightarrow 0^+ \right)$$

$$\inf \mathcal{B} = \frac{1}{2},$$

il n'est pas minimum

$$\left(x \rightarrow -2^+, y = \frac{1}{2} \right)$$

$$\sup \mathcal{B} = 2^4 = 16,$$

il n'est pas maximum

$$(x, y \rightarrow -2^+)$$

$$\inf \mathcal{C} = 0,$$

il n'est pas minimum

$$\left(x = -\frac{3}{2}, y \rightarrow 0^+ \right)$$

$$\sup \mathcal{C} = +\infty,$$

il n'est pas maximum

$$\left(x = \frac{1}{2}, y \rightarrow 0^+ \right)$$

$$\inf \mathcal{D} = -1,$$

il est minimum

$$\left(x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4} \right)$$

$$\sup \mathcal{D} = \sin(1),$$

il est maximum

$$\left(x = y = \frac{1}{2} \right)$$

$$\inf \mathcal{E} = -1,$$

il est minimum

$$\left(x = y = -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sup \mathcal{E} = 1,$$

il n'est pas maximum

$$(x, y \rightarrow 0^+)$$

Exercice 5.3

Soit $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{S} := [-1, 0[\cup]1, 2[.$$

Calculer $\inf_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y)$ et $\sup_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y)$ de chacune des fonctions suivantes en spécifiant s'ils sont respectivement aussi max et min.

1. $f(x,y) = x \log_{10} |y|$

3. $f(x,y) = \cos(xy)$

2. $f(x,y) = \sin(xy)$

4. $f(x,y) = e^{-x} + (y - 3/2)^2$

SOLUTION. 1. $f(x,y) = x \log_{10} |y|$

1.1. $\inf_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y) = -\infty$, il n'est pas minimum $(x = -1, y \rightarrow 0^-)$

1.2. $\sup_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y) = +\infty$, il n'est pas maximum $(x = \frac{3}{2}, y \rightarrow 0^-)$

2. $f(x,y) = \sin(xy)$

2.1. $\inf_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y) = -1$, il est minimum $(x = -1, y = \frac{\pi}{2})$

2.2. $\sup_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y) = 1$, il est maximum $(x = y = \sqrt{\frac{\pi}{2}})$

3. $f(x,y) = \cos(xy)$

3.1. $\inf_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y) = -1$, il est minimum $(x = y = \sqrt{\pi})$

3.2. $\sup_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y) = 1$, il n'est pas maximum $(x = -1, y \rightarrow 0^-)$

4. $f(x,y) = e^{-x} + (y - 3/2)^2$

4.1. $\inf_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y) = e^{-2}$, il n'est pas minimum $(x \rightarrow 2^-, y \rightarrow 0^-)$

4.2. $\sup_{(x,y) \in \mathcal{S}^2} f(x,y) = e + \frac{25}{4}$, il est maximum $(x = y = -1)$

? Exercice 5.4

Pour chacune des parties $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum (justifier chaque réponse).

$A_1 = \{1, 2, 3, 5, 12\}$

$A_4 = \{3 + 7q : q \in \mathbb{N}\}$

$A_7 = \{p/3^n : p, n \in \mathbb{N}^*\}$

$A_2 = \mathbb{N}$

$A_5 = \{3 - 7q : q \in \mathbb{N}\}$

$A_8 = \mathbb{R}$

$A_3 = \mathbb{Z}$

$A_6 = \{p/3^n : p, n \in \mathbb{N}\}$

$A_9 =]5, 6]$

SOLUTION. $A_1 = \{1, 2, 3, 5, 12\}$

1.1. $\forall x \in A_1, x \geq 1$ donc 1 est un minorant de A_1 et A_1 est minoré

1.2. $\forall x \in A_1, x \leq 12$ donc 12 est un majorant de A_1 et A_1 est majoré

1.3. étant minoré et majoré, A_1 est borné

1.4. 1 est un minorant de A_1 qui appartient à A_1 donc 1 est le minimum de A_1

1.5. 12 est un majorant de A_1 qui appartient à A_1 donc 12 est le maximum de A_1

1.6. on en déduit que 1 est la borne inférieure de A_1

1.7. on en déduit que 12 est la borne supérieure de A_1

$A_2 = \mathbb{N}$

2.1. $\forall x \in A_2, x \geq 0$ donc 0 est un minorant de A_2 et A_2 est minoré

2.2. A_2 n'admet pas de majorant réel (en effet, si $r \in \mathbb{R}$ est un majorant de A_2 , alors $E(r) + 1 \in A_2$ et $E(r) + 1 > r$) donc A_2 n'est pas majoré

2.3. n'étant pas majoré, A_2 n'est pas borné

2.4. 0 est un minorant de A_2 qui appartient à A_2 donc 0 est le minimum de A_2

2.5. comme A_2 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum

2.6. on en déduit que 0 est la borne inférieure de A_2

2.7. on en déduit que A_2 n'a pas de borne supérieure

$$A_3 = \mathbb{Z}$$

3.1. A_3 n'admet pas de minorant réel (en effet, si $r \in \mathbb{R}$ est un minorant de A_3 , alors $E(r) - 1 \in A_3$ et $E(r) - 1 < r$) donc A_3 n'est pas minoré

3.2. A_3 n'admet pas de majorant réel (en effet, si $r \in \mathbb{R}$ est un majorant de A_3 , alors $E(r) + 1 \in A_3$ et $E(r) + 1 > r$) donc A_3 n'est pas majoré

3.3. n'étant pas majoré, A_3 n'est pas borné

3.4. comme A_3 n'admet pas de minorant, il n'admet pas de minimum

3.5. comme A_3 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum

3.6. on en déduit que A_3 n'a pas de borne inférieure

3.7. on en déduit que A_3 n'a pas de borne supérieure

$$A_4 = \{3 + 7q : q \in \mathbb{N}\}$$

4.1. $\forall x \in A_4, x \geq 3$ donc 3 est un minorant de A_4 et A_4 est minoré

4.2. A_4 n'admet pas de majorant donc A_4 n'est pas majoré

4.3. n'étant pas majoré, A_4 n'est pas borné

4.4. 3 est un minorant de A_4 qui appartient à A_4 (il suffit de prendre $q = 0$) donc 3 est le minimum de A_4

4.5. comme A_4 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum

4.6. on en déduit que 3 est la borne inférieure de A_4

4.7. on en déduit que A_4 n'a pas de borne supérieure

$$A_5 = \{3 - 7q : q \in \mathbb{N}\}$$

5.1. A_5 n'admet pas de minorant donc A_5 n'est pas minoré

5.2. $\forall x \in A_5, x \leq 3$ donc 3 est un majorant de A_5 et A_5 est majoré

5.3. n'étant pas minoré, A_5 n'est pas borné

5.4. comme A_5 n'admet pas de minorant, il n'admet pas de minimum

5.5. 3 est un majorant de A_5 qui appartient à A_5 (il suffit de prendre $q = 0$) donc 3 est le maximum de A_5

5.6. on en déduit que A_5 n'a pas de borne inférieure

5.7. on en déduit que 3 est la borne supérieure de A_5

$$A_6 = \{p/3^n : p, n \in \mathbb{N}\}$$

6.1. $\forall x \in A_6, x \geq 0$ donc 0 est un minorant de A_6 et A_6 est minoré

6.2. comme $A_2 \subset A_6$, A_6 n'est pas majoré

6.3. n'étant pas majoré, A_6 n'est pas borné

6.4. 0 est un minorant de A_6 qui appartient à A_6 (avec $p = n = 0$) donc 0 est le minimum de A_6

6.5. comme A_6 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum

6.6. on en déduit que 0 est la borne inférieure de A_6

6.7. on en déduit que A_6 n'a pas de borne supérieure

$$A_7 = \{p/3^n : p, n \in \mathbb{N}^*\}$$

7.1. $\forall x \in A_7, x \geq 0$ donc 0 est un minorant de A_7 et A_7 est minoré

7.2. A_7 n'admet pas de majorant donc A_7 n'est pas majoré

7.3. n'étant pas majoré, A_7 n'est pas borné

7.4. 0 est le plus grand des minorants de A_7 mais il n'appartient pas à A_7 donc A_7 n'a pas de minimum

7.5. comme A_7 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum

7.6. on en déduit que 0 est la borne inférieure de A_7

7.7. on en déduit que A_7 n'a pas de borne supérieure

$$A_8 = \mathbb{R}$$

8.1. il n'est pas minoré

8.2. il n'est pas majoré

8.3. comme il n'est pas minoré, il n'est pas borné

- 8.4. comme il n'est pas minoré, il n'a pas de minimum
- 8.5. comme il n'est pas majoré, il n'a pas de maximum
- 8.6. comme il n'est pas minoré, il n'a pas de borne inférieure
- 8.7. comme il n'est pas majoré, il n'a pas de borne supérieure

$$A_9 =]5, 6]$$

- 9.1. $\forall x \in A_9, x > 5$ donc 5 est un minorant de A_9 et A_9 est minoré
- 9.2. $\forall x \in A_9, x \leq 6$ donc 6 est un majorant de A_9 et A_9 est majoré
- 9.3. étant minoré et majoré, A_9 est borné
- 9.4. 5 est le plus grand des minorants de A_9 mais il n'appartient pas à A_9 donc A_9 n'a pas de minimum (en effet, $\forall x \in A_9, (5+x)/2 \in A_9$ et $(5+x)/2 < x$; de plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $5 + 1/n \notin A_9$ et $5 < x < 5 + 1/n$)
- 9.5. 6 est un majorants de A_9 qui appartient à A_9 donc 6 est le maximum de A_9
- 9.6. on en déduit que 5 est la borne inférieure de A_9
- 9.7. on en déduit que 6 est la borne supérieure de A_9

? Exercice 5.5

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 + 1$. Soit $A = [-2, 1]$. Trouver

- 1. $f(A)$,
- 2. $f^{-1}(f(A))$,
- 3. $\sup_A f$ (est-il maximum?),
- 4. $\inf_A f$ (est-il minimum?).

SOLUTION. 1. $f(A) = [1; 9]$,

2. $f^{-1}(f(A)) = [-2; 2]$ et on remarque que $[-2, 1] \subset [-2; 2]$,

3. $\sup_A f = 9 = \max_A f$,

4. $\inf_A f = 1 = \min_A f$.

? Exercice 5.6

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1 - 2x^2$. Soit $A = [-2, 1]$. Trouver

- 1. $f(A)$,
- 2. $f^{-1}(f(A))$,
- 3. $\sup_A f$ (est-il maximum?),
- 4. $\inf_A f$ (est-il minimum?).

SOLUTION. 1. $f(A) = [-7; 1]$,

2. $f^{-1}(f(A)) = [-2; 2]$ et on remarque que $[-2, 1] \subset [-2; 2]$,

3. $\sup_A f = 1 = \max_A f$,

4. $\inf_A f = -7 = \min_A f$.

? Exercice 5.7

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1 - x^2$. Soit $B = [-3, 1]$. Trouver

- 1. $f^{-1}(B)$,
- 2. $f(f^{-1}(B))$,
- 3. $\sup_B f^{-1}$ (est-il maximum?),
- 4. $\inf_B f^{-1}$ (est-il minimum?).

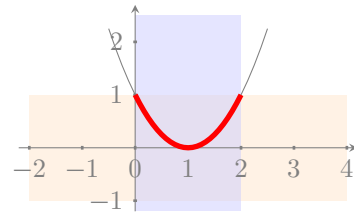
- SOLUTION.**
1. $f^{-1}(B) = [-2; 2]$,
 2. $f(f^{-1}(B)) = [-3; 1]$ et on remarque que $[-3; 1] \subset [-3; 1]$,
 3. $\sup_B f^{-1} = 2 = \max_B f^{-1}$,
 4. $\inf_B f^{-1} = -2 = \min_B f^{-1}$.

? Exercice 5.8

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = (x-1)^2$. Soit $B = [-1; 1[$. Trouver

1. $f^{-1}(B)$,
2. $f(f^{-1}(B))$,
3. $\sup_B f^{-1}$ (est-il maximum ?),
4. $\inf_B f^{-1}$ (est-il minimum ?).

- SOLUTION.**
1. $f^{-1}(B) =]0; 2[$,
 2. $f(f^{-1}(B)) = [0; 1[$ et on remarque que $[0; 1[\subset [-1; 1[$,
 3. $\sup_B f^{-1} = 2$ mais ce n'est pas un maximum,
 4. $\inf_B f^{-1} = 0$ mais ce n'est pas un minimum.

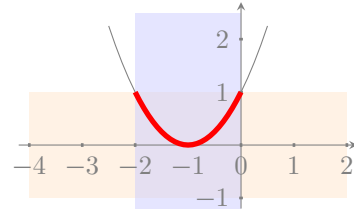


? Exercice 5.9

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = (x+1)^2$. Soit $B = [-1; 1[$. Trouver

1. $f^{-1}(B)$,
2. $f(f^{-1}(B))$,
3. $\sup_B f^{-1}$ (est-il maximum ?),
4. $\inf_B f^{-1}$ (est-il minimum ?).

- SOLUTION.**
1. $f^{-1}(B) =]-2; 0[$,
 2. $f(f^{-1}(B)) = [0; 1[$ et on remarque que $[0; 1[\subset [-1; 1[$,
 3. $\sup_B f^{-1} = 0$ mais ce n'est pas un maximum,
 4. $\inf_B f^{-1} = -2$ mais ce n'est pas un minimum.



Forme algébrique

Définitions Tout nombre $z \in \mathbb{C}$ s'écrit, de manière unique, sous la forme algébrique $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et i est tel que $i^2 = -1$. Le réel x s'appelle "partie réelle de z " et se note $\Re(z)$. Le réel y s'appelle "partie imaginaire de z " et se note $\Im(z)$. Si $y = 0$ alors $z \in \mathbb{R}$, si $x = 0$ alors z est un imaginaire pur.

Égalité Deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux ssi $(x, y) = (x', y')$. Attention : il n'y a pas d'inégalité en $\mathbb{C}$.

Opérations Soient deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

$$z + z' = (x + x') + i(y + y'), \quad zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Conjugué Le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le numéro complexe $\bar{z} = x + i(-y)$ et on a

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}, \quad z + \bar{z} = 2\Re(z), \quad z - \bar{z} = 2\Im(z).$$

Forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme trigonométrique $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ avec $\rho > 0$ le module de z et ϑ un argument de z .

Module Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. On le note $|z|$ ou ρ ou r . On a

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\iff z = 0; & |\Re(z)| &\leq |z|; & |\Im(z)| &\leq |z|; \\ |zz'| &= |z| |z'|; & |z^n| &= |z|^n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}; & \left|\frac{z}{z'}\right| &= \frac{|z|}{|z'|}; \end{aligned}$$

$$\left| |z| - |z'| \right| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|.$$

Argument On le note $\arg(z)$ et il est défini, modulo 2π , par $\cos \vartheta = \frac{x}{\rho}$ et $\sin \vartheta = \frac{y}{\rho}$. On a (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \arg(zz') &= \arg(z) + \arg(z'); & \arg(1/z) &= -\arg(z); \\ \arg(z/z') &= \arg(z) - \arg(z'); & \arg(z^n) &= n \arg(z), \text{ pour } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Forme exponentielle Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme exponentielle $z = \rho e^{i\vartheta}$.

▷ Formule de Moivre : pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$z^n = (\rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta))^n = \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) = \rho^n e^{in\vartheta}.$$

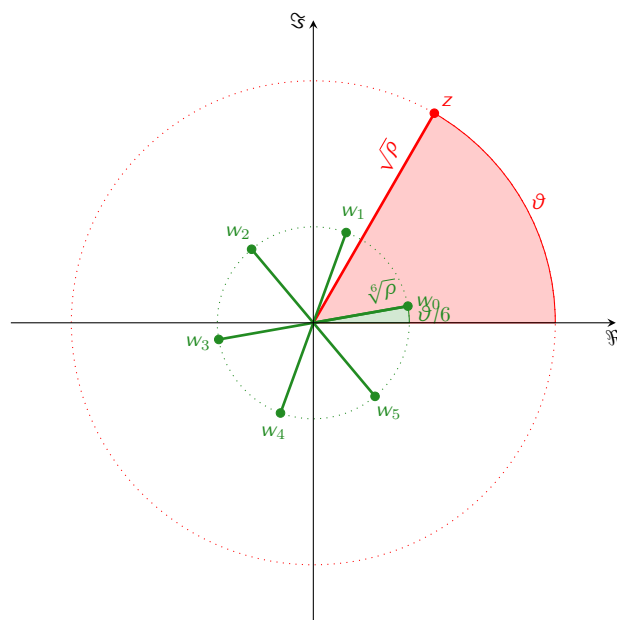
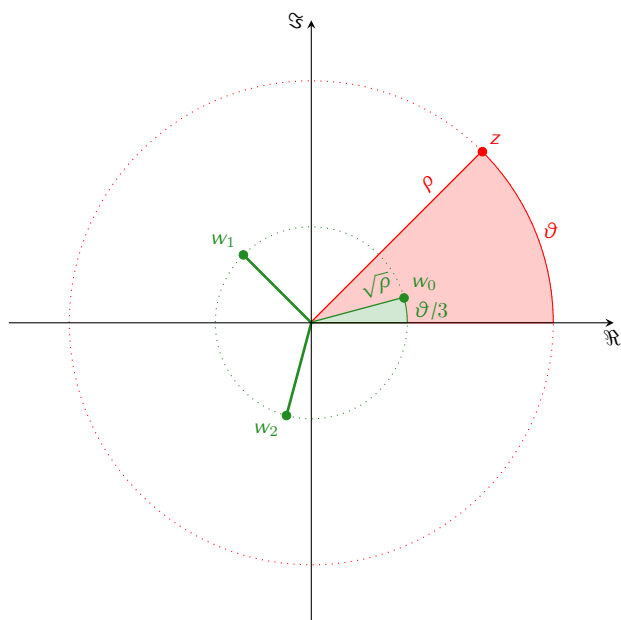
▷ Formules d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, & \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \\ \cos(nx) &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, & \sin(nx) &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}. \end{aligned}$$

Racines n -ièmes

Tout nombre complexe non nul $z = \rho e^{i\vartheta}$ possède n racines n -ièmes

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$



Astuce

Pour déterminer les racines carrées de $z = x + iy$ il est parfois plus simple de procéder par identification, c'est-à-dire de chercher les réels α et β tels que $(x + iy) = (\alpha + i\beta)^2$; on obtient

$$\alpha^2 - \beta^2 = x,$$

$$2\alpha\beta = y,$$

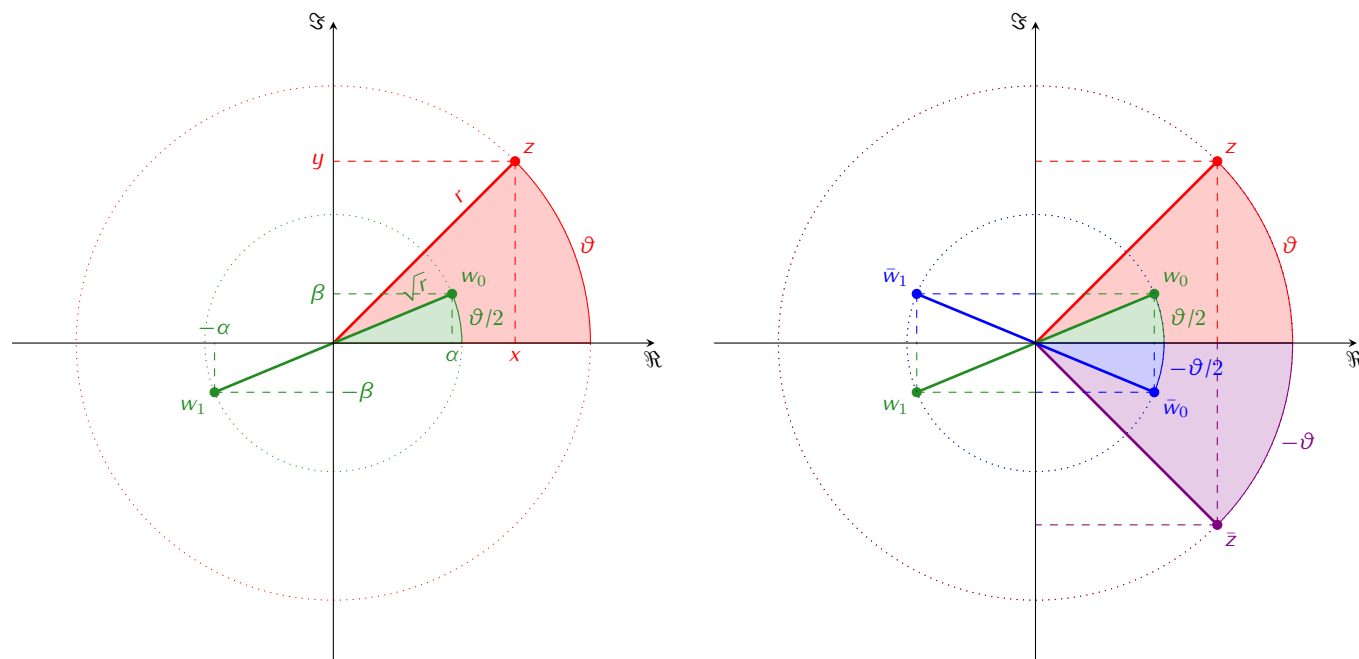
$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Autrement dit,

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}},$$

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}},$$

$$\text{signe}(\alpha \cdot \beta) = \text{signe}(y).$$



Proposition

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a \neq 0$, b et c appartiennent à $\mathbb{C}$, admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ (pas nécessairement distinctes) :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a},$$

où δ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

 Exercices
 Exercice 6.1
 Calculer les racines carrées de

-  (a) 1 (c) $3 + 4i$ (e) $7 + 24i$ (g) $24 - 10i$
 (b) i (d) $8 - 6i$ (f) $3 - 4i$ (h) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

SOLUTION. (a) $z = 1 + 0i \Rightarrow x = 1, y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 1 \\ \beta = \pm 0 \\ \alpha\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow w_0 = 1 \text{ et } w_1 = -1$

(b) $z = i \Rightarrow x = 0, y = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha\beta > 0 \end{cases} \Rightarrow w_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4} \text{ et } w_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i5\pi/4}$

(c) $z = 3 + 4i \Rightarrow x = 3, y = 4 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 2 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha\beta > 0 \end{cases} \Rightarrow w_0 = 2 + i \text{ et } w_1 = -2 - i$

(d) $z = 8 - 6i \Rightarrow x = 8, y = -6 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha\beta < 0 \end{cases} \Rightarrow w_0 = 3 - i \text{ et } w_1 = -3 + i$: on aurait pu tout simplement remarquer que z est le conjugué du complexe au point (c)

(e) $z = 7 + 24i \Rightarrow x = 7, y = 24 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 4 \\ \beta = \pm 3 \\ \alpha\beta > 0 \end{cases} \Rightarrow w_0 = 4 + 3i \text{ et } w_1 = -4 - 3i$

(f) $z = 3 - 4i \Rightarrow x = 3, y = -4 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 2 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha\beta < 0 \end{cases} \Rightarrow w_0 = 2 - i \text{ et } w_1 = -2 + i$

(g) $z = 24 - 10i \Rightarrow x = 24, y = -10 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 5 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha\beta < 0 \end{cases} \Rightarrow w_0 = 5 - i \text{ et } w_1 = -5 + i$

(h) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \beta = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \alpha\beta > 0 \end{cases} \Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ et } w_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$

 Exercice 6.2
 Calculer

- les racines carrées de $z = 4ab + 2(a^2 - b^2)i$ avec $a, b \in \mathbb{R}$,
- les racines cubiques du nombre complexe $1 + i$,
- les racines cubiques de $z = \frac{-1+i}{4}$.

SOLUTION. 1. Soit $\omega = a - ib$, alors $\omega^2 = (a^2 - b^2) - 2abi$ donc $2i\omega^2 = 4ab + 2(a^2 - b^2)i = z$. Or, $2i = (1+i)^2$ donc $((1+i)\omega)^2 = z$. On conclut que $z = ((a+b) + i(a-b))^2$, ainsi les racines carrées de z sont $w_0 = (a+b) + i(a-b)$ et $w_1 = -(a+b) - i(a-b)$.

2. $n = 3$ et $z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$, ainsi les trois racines cubiques de z sont

$$w_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right),$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{9\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{9\pi}{12} \right) \right),$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{17\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{17\pi}{12} \right) \right).$$

3. $n = 3$, $z = \frac{-1+i}{4} = 2^{-3/2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right)$, ainsi les trois racines cubiques de z sont

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right),$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{12} \right) \right),$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{19\pi}{12} \right) \right).$$

? Exercice 6.3

Trouver toutes les solutions complexes des équations

1. $z^2 = 2$,
2. $z^2 = 3i$,
3. $z^2 = 2 + 3i$,
4. $z^2 = 1 + bi$ (b est un paramètre réel),
5. $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$,
6. $z^2 + 2z + (1 - 2i) = 0$,
7. $z^2 + 2(1 + i)z - 5(1 + 2i) = 0$,
8. $z^2 - (5 + 3i)z + 7i + 4 = 0$,
9. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$,
10. $z^2 + z + 1 = 0$,
11. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$,
12. $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$,
13. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$,
14. $4z^2 - 2z + 1 = 0$,
15. $z^2 - (11 - 5i)z + 24 - 27i = 0$,
16. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

SOLUTION. 1. $z^2 = 2 = 2e^{i0} \Rightarrow z_0 = \sqrt{2}e^{i0} = \sqrt{2}$ et $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi} = -\sqrt{2}$

2. $z^2 = 3i = 3e^{i\pi/2} \Rightarrow z_0 = \sqrt{3}e^{i\pi/4}$ et $z_1 = \sqrt{3}e^{i5\pi/4}$

$$3. z^2 = 2 + 3i \Rightarrow x = 2, y = 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}} \\ \beta = \pm \sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}} \\ \alpha\beta > 0 \end{cases} \Rightarrow z_0 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}} + i\sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}} \text{ et } z_1 = -z_0$$

$$4. z^2 = 1 + bi \text{ (} b \text{ est un paramètre réel)} \Rightarrow x = 1, y = b \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+b^2}}{2}} \\ \beta = \pm \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+b^2}}{2}} \\ b\alpha\beta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+b^2}}{2}} & \text{si } b > 0, \\ z_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+b^2}}{2}} & \text{si } b < 0, \\ z_0 = 1 & \text{si } b = 0, \end{cases}$$

et $z_1 = -z_0$

5. $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0 \Rightarrow \delta^2 = (-2i)^2 - 4(2 - 4i) = -12 + 16i \Rightarrow \delta_0 = 2 + 4i \Rightarrow z_0 = \frac{2i+2+4i}{2} = 1 + 3i$ et $z_1 = \frac{2i-2-4i}{2} = -1 - i$

6. $z^2 + 2z + (1 - 2i) = 0 \Rightarrow \delta^2 = 2^2 - 4(1 - 2i) = 8i \Rightarrow \delta_0 = 2 + 2i \Rightarrow z_0 = \frac{-2+2+2i}{2} = i$ et $z_1 = \frac{-2-2-2i}{2} = -2 - i$

7. $z^2 + 2(1 + i)z - 5(1 + 2i) = 0 \Rightarrow \delta^2 = (2(1 + i))^2 - 4(-5(1 + 2i)) = 20 + 48i \Rightarrow \delta_0 = 6 + 4i \Rightarrow z_0 = \frac{-2-2i+6+4i}{2} = 2 + i$ et $z_1 = \frac{-2-2i-6-4i}{2} = -4 - 3i$

8. $z^2 - (5 + 3i)z + 7i + 4 = 0 \Rightarrow \delta^2 = (-(5 + 3i))^2 - 4(4 + 7i) = 2i \Rightarrow \delta_0 = 1 + i \Rightarrow z_0 = \frac{5+3i+1+i}{2} = 3 + 2i$ et $z_1 = \frac{5+3i-1-i}{2} = 2 + i$

9. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \Rightarrow \delta^2 = (-\sqrt{3})^2 - 4(-i) = 3 + 4i \Rightarrow \delta_0 = 2 + i \Rightarrow z_0 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2}$ et $z_1 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2}$

10. $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow \delta^2 = -3 \Rightarrow \delta_0 = i\sqrt{3} \Rightarrow z_0 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$$11. z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0 \implies \delta^2 = (-(1 + 2i))^2 - 4(i - 1) = 1 \implies \delta_0 = 1 \implies z_0 = \frac{1+2i-1}{2} = i \text{ et } z_1 = \frac{1+2i+1}{2} = 1 + i$$

$$12. z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0 \implies \delta^2 = -75 - 100i \implies \delta_0 = 5 - 10i \implies z_0 = 5 - 12i \text{ et } z_1 = -2i$$

$$13. z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0 \implies \delta^2 = -3 + 4i \implies \delta_0 = 1 + 2i \implies z_0 = 2 + 3i \text{ et } z_1 = 1 + i$$

$$14. 4z^2 - 2z + 1 = 0 \implies \delta^2 = -12 \implies \delta_0 = 2\sqrt{3}i \implies z_0 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4} \text{ et } z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{4}$$

$$15. z^2 - (11 - 5i)z + 24 - 27i = 0 \implies \delta^2 = -2i \implies \delta_0 = 1 - i \implies z_0 = 6 - 3i \text{ et } z_1 = 5 - 2i$$

$$16. \text{ On pose } w = z^2 \text{ et on r sout d'abord } w^2 + 2w + 4 = 0 \implies \delta^2 = -12 \implies \delta_0 = 2\sqrt{3}i \implies w_0 = -1 + \sqrt{3}i \text{ et } w_1 = -1 - \sqrt{3}i. \text{ On r sout maintenant les deux équations}$$

$$\triangleright z^2 = w_0 \implies \begin{cases} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \alpha\beta > 0 \end{cases} \implies z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ et } z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\triangleright z^2 = w_1 \implies \begin{cases} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \alpha\beta < 0 \end{cases} \implies z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ et } z_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Fonctions polynomiales

Une application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est polynomiale s'il existe une famille finie $\{a_n, \dots, a_1, a_0\}$ de nombres complexes telle que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Pour faire bref, nous ferons un abus de langage en utilisant le terme "polynôme" pour "application polynomiale".

Théorème et définition (degré)

Pour tout polynôme non nul P , il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ et une unique famille $\{a_n, \dots, a_1, a_0\}$ de nombres complexes telle que

$$a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{C} \quad P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n).$$

L'entier n est, par définition, le degré de P (on le note d^0P).

Remarque

Le polynôme nul n'a pas de degré, mais par convention $d^00 < d^0g$ pour tout polynôme non nul g .

Théorème (division euclidienne)

Soient f et g deux polynômes avec g non nul. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{C} \quad f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \quad \text{et} \quad d^0R < d^0g.$$

Q s'appelle le quotient et R le reste. On dit que f est divisible par g si $R = 0$.

Théorème (de la division selon les puissances croissantes)

Soient f et g deux polynômes avec g non nul. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de polynômes vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{C} \quad f(x) = g(x)Q(x) + x^{p+1}R(x) \quad \text{et} \quad d^0Q \leq p.$$

Racine, multiplicité

Un nombre complexe a est racine d'un polynôme P si $P(a) = 0$. L'ordre de multiplicité d'une racine a de P est le plus grand entier n tel que " $(x - a)^n$ " divise P .

On montre facilement que a est racine de P si et seulement si P est divisible par $(x - a)$.

Théorème (décomposition de D'Alembert-Gauss)

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. Alors l'ensemble des racines de P est fini et non vide. Notons $x_1, \dots, x_k$ les k racines deux à deux distinctes de P et n_i l'ordre de multiplicité de x_i . Alors il existe un unique $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = a(x - x_1)^{n_1} \dots (x - x_k)^{n_k}.$$

On a donc $n_1 + \dots + n_k = \deg P$.

Théorème (Taylor)

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{C}$ et tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

où $P^{(k)}(x_0)$ est la dérivée d'ordre k en x_0 .

Théorème

Soient P un polynôme et x_0 une racine de P . Elle est de multiplicité n si et seulement si

$$P^{(n)}(x_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(x_0) = 0 \text{ pour tout } k \leq n - 1.$$

Astuce : recherche d'une racine évidente

Les premiers candidats sont toujours 0, 1 et -1 . S'ils ne conviennent pas, au mieux de procéder à l'aveugle, on peut utiliser le fait que, lorsque tous les coefficients a_i sont des entiers (i.e. $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i = 0, \dots, n$), toute racine «évidente» est du type

$$\frac{\text{diviseur de } a_0}{\text{diviseur de } a_n}.$$

Dès qu'on trouve une racine x_0 , on peut soit arrêter et factoriser le polynôme par $(x - x_0)$, soit continuer dans l'espoir de trouver d'autres racines évidentes, ce qui simplifie la factorisation.

Astuce

Pour factoriser les polynômes on pourra utiliser *Wolfram Alpha* www.wolframalpha.com et taper `factor(P(x))`.

Exercice 7.1 division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de f par g dans les cas suivants

1. $f(x) = 7x^4 - x^3 + 2x - 4$ et $g(x) = x^2 - 3x + 5$,
2. $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

SOLUTION. 1.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 7x^4 & -x^3 & & +2x & -4 & x^2 & -3x & +5 \\
 -7x^4 & +21x^3 & -35x^2 & & & 7x^2 & +20x & +25 \\
 \hline
 & 20x^3 & -35x^2 & +2x & -4 & & & \\
 & -20x^3 & +60x^2 & -100x & & & & \\
 \hline
 & & 25x^2 & -98x & -4 & & & \\
 & & -25x^2 & +75x & -125 & & & \\
 \hline
 & & & -23x & -129 & & &
 \end{array}$$

donc $f(x) = (7x^2 + 20x + 25)g(x) + (-23x - 129)$.

2.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x^5 & -x^4 & & -x & +1 & x^2 & -2x & +1 \\
 -x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & x^3 & +x^2 & +x & +1 \\
 \hline
 & x^4 & -x^3 & & -x & +1 & & & \\
 & -x^4 & +2x^3 & -x^2 & & & & & \\
 \hline
 & & x^3 & -x^2 & -x & +1 & & & \\
 & & -x^3 & +2x^2 & -x & & & & \\
 \hline
 & & & x^2 & -2x & +1 & & & \\
 & & & -x^2 & +2x & -1 & & & \\
 \hline
 & & & & & 0 & & &
 \end{array}$$

donc $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)g(x)$.

Exercice 7.2

Si z et w sont deux nombres complexes alors on a les deux identités remarquables

$$\begin{aligned}
 z^2 - w^2 &= (z - w)(z + w), \\
 z^3 - w^3 &= (z - w)(z^2 + zw + w^2).
 \end{aligned}$$

Ces identités admettent la généralisation suivante : avec la convention $z^0 = w^0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$z^n - w^n = (z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k-1}.$$

1. Démontrer cette formule par récurrence sur n .
2. En déduire qu'un nombre complexe z est racine d'un polynôme P si et seulement si le polynôme $g(x) := x - z$ divise le polynôme P .

SOLUTION. TO DO

? Exercice 7.3 *résolution d'équations polynomiales*

Trouver toutes les solutions complexes des équations

1. $z^3 - i = 6(z + i)$,
2. $z^3 + 3z - 2i = 0$,
3. $z^6 + z^3(z + 1)^3 + (z + 1)^6 = 0$.

SOLUTION. 1. On remarque que $z^3 - i$ est factorisable par $(z + i)$ car $z^3 - i = z^3 + i^3 = (z + i)(z^2 - 2iz - 1)$ donc

$$z^3 - i = 6(z + i) \iff (z + i)(z^2 - 2iz - 1) = 6(z + i) \iff (z + i)(z^2 - 2iz - 7) = 0.$$
Une solution est $z_0 = -i$, les autres deux solutions vérifient

$$z^2 - 2iz - 7 = 0 \implies \delta^2 = 27 \implies \delta = 3\sqrt{3} \implies z_1 = \frac{2i + 3\sqrt{3}i}{2}, z_2 = \frac{2i - 3\sqrt{3}i}{2}.$$

2. On remarque que $z = i$ est solution de l'équation. On factorise $(z - i)$ dans $z^3 + 3z - 2i$ et on obtient $z^3 + 3z - 2i = (z - i)(z^2 + iz + 2)$. Les solutions de l'équation $z^3 + 3z - 2i = 0$ sont $z_1 = i$, $z_2 = i \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = i \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.
3. Si a et b sont deux nombres complexes on sait que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ donc $0 = z^6 + z^3(z + 1)^3 + (z + 1)^6 = \frac{z^3 - (z + 1)^3}{z - (z + 1)} = 3z^2 + 3z + 1 = \left(z - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right) \left(z - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)$.

? Exercice 7.4Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P = x^{n+1} + x^n - 2x^{n-1} + nx - n$ est divisible par $(x - 1)$.

SOLUTION. Un polynôme P est divisible par $(x - 1)$ si $x = 1$ est racine de P , donc il suffit de vérifier que $P(1) = 0$.

? Exercice 7.5Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P = (x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ est divisible par $x^2 - 3x + 2$.

SOLUTION. Comme $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, il suffit de montrer que $x = 1$ et $x = 2$ sont racines du polynôme P , autrement dit que $P(1) = P(2) = 0$.

? Exercice 7.6Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère le polynôme P défini par $P = ax^{n+1} + bx^n + 1$. Déterminer les réels a et b pour que P soit divisible par $(x - 1)^2$.

SOLUTION. Si P est divisible par $(x - 1)^2$, cela signifie que $x = 1$ est racine au moins double, donc il faut que $P(1) = P'(1) = 0$. Comme $P(1) = a + b + 1$ et $P'(1) = a(n + 1) + bn$, on conclut que $a = n$ et $b = -n - 1$.

? Exercice 7.7 *multiplicité*Calculer la multiplicité de la racine x_0 de P dans les cas suivants :

- ▷ $x_0 = 1$ et $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$,
- ▷ $x_0 = i$ et $P(x) = x^3 - ix^2 + x - i$.

SOLUTION. $\triangleright x_0 = 1$ a multiplicité 3 car

$$\begin{array}{ll} P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 & P(1) = 0 \\ P'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 & P'(1) = 0 \\ P''(x) = 12x^2 - 6x - 6 & P''(1) = 0 \\ P'''(x) = 24x - 6 & P'''(1) = 18 \end{array}$$

et $P(x) = (x-1)^3 Q(x)$ avec Q polynôme de degré 1 non divisible par $(x-1)$.

$\triangleright x_0 = i$ a multiplicité 2 car

$$\begin{array}{ll} P(x) = x^3 - ix^2 + x - i & P(1) = 0 \\ P'(x) = 3x^2 - 2ix + 1 & P'(1) = 0 \\ P''(x) = 6x - 2i & P''(1) = 4i \end{array}$$

et $P(x) = (x-i)^2 Q(x)$ avec Q polynôme de degré 1 non divisible par $(x-i)$.

? Exercice 7.8

On considère le polynôme

$$P(x) := x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en 1. Montrer que 1 est une racine de P et en déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$.
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

SOLUTION. 1. Pour un polynôme P de degré 5, la formule de Taylor en 1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=5} P^{(k)}(1) \frac{(x-1)^k}{k!}.$$

On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 5$ et on les évalue en 1 :

$$\begin{array}{ll} P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 & P(1) = 0 \\ P'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x - 2 & P'(1) = 0 \\ P''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 6x + 2 & P''(1) = 4 \\ P'''(x) = 60x^2 - 48x + 6 & P'''(1) = 18 \\ P^{IV}(x) = 120x - 48 & P^{IV}(1) = 72 \\ P^V(x) = 120 & P^V(1) = 120 \end{array}$$

La formule de Taylor en 1 s'écrit alors

$$\begin{aligned} P(x) &= 4 \frac{(x-1)^2}{2} + 18 \frac{(x-1)^3}{6} + 72 \frac{(x-1)^4}{24} + 120 \frac{(x-1)^5}{120} \\ &= 2(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + 3(x-1)^4 + (x-1)^5 \\ &= (x-1)^2 (x^3 + 1) \end{aligned}$$

Ceci implique que 1 est une racine de P de multiplicité 2.

2. On pose $Q(x) = x^3 + 1$. Une racine réelle évidente de Q est -1 . En effectuant la division euclidienne de Q par $(x+1)$ on obtient

$$Q(x) = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Étant donné que $x^2 - x + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x-1)^2 (x+1)(x^2 - x + 1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 - x + 1$ sur $\mathbb{C}$. Avec les notations usuelles du cours, on a $\Delta = -3$ et une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$ d'où les deux racines complexes conjuguées $x_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $x_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x-1)^2(x+1)(x - e^{i\frac{\pi}{3}})(x - e^{i\frac{5\pi}{3}}).$$

? Exercice 7.9

On considère le polynôme

$$P(x) := x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2.$$

1. Montrer que $x = 1$ est une racine du polynôme et en déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P à l'aide de la formule de Taylor.

SOLUTION. 1. On a

$P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$	$P(1) = 0$
$P'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$	$P'(1) = 0$
$P''(x) = 12x^2 - 6x - 6$	$P''(1) = 0$
$P'''(x) = 24x - 6$	$P'''(1) = 18$
$P^{IV}(x) = 24$	$P^{IV}(1) = 24$

On en déduit que $x = 1$ est une racine de multiplicité 3.

2. Pour un polynôme P de degré 4, la formule de Taylor en 1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=4} P^{(k)}(1) \frac{(x-1)^k}{k!}.$$

La formule de Taylor en 1 s'écrit alors

$$P(x) = 18 \frac{(x-1)^3}{3!} + 24 \frac{(x-1)^4}{4!} = 3(x-1)^3 + (x-1)^4 = (x-1)^3(x+2).$$

? Exercice 7.10

On considère le polynôme

$$P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + 2.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en 1; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (i.e. elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

SOLUTION. 1. Pour un polynôme P de degré 5, la formule de Taylor en 1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=5} P^{(k)}(1) \frac{(x-1)^k}{k!}.$$

On calcule alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 5$ et on les évalue en 1 :

$P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + 2$	$P(1) = 0$
$P'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 10x - 5$	$P'(1) = 0$
$P''(x) = 20x^3 - 12x^2 - 12x + 10$	$P''(1) = 6$
$P'''(x) = 60x^2 - 24x - 12$	$P'''(1) = 24$
$P^{IV}(x) = 120x - 24$	$P^{IV}(1) = 96$
$P^V(x) = 120$	$P^V(1) = 120$

La formule de Taylor en 1 s'écrit alors

$$\begin{aligned} P(x) &= 6 \frac{(x-1)^2}{2} + 24 \frac{(x-1)^3}{6} + 96 \frac{(x-1)^4}{24} + 120 \frac{(x-1)^5}{120} \\ &= 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + 4(x-1)^4 + (x-1)^5 \\ &= (x-1)^2 (x^3 + x^2 - x + 2) \end{aligned}$$

Ceci implique que 1 est une racine de P de multiplicité 2.

2. On pose $Q(x) = x^3 + x^2 - x + 2$. Une racine réelle évidente de Q est -2 . En effectuant la division euclidienne de Q par $(x+2)$ on obtient

$$Q(x) = (x+2)(x^2 - x + 1).$$

Étant donné que $x^2 - x + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)(x^2 - x + 1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 - x + 1$ sur $\mathbb{C}$. Avec les notations usuelles du cours, on a $\Delta = -3$ et une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$ d'où les deux racines complexes conjuguées $x_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $x_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)(x - e^{i\frac{\pi}{3}})(x - e^{i\frac{5\pi}{3}}).$$

? Exercice 7.11

On considère le polynôme

$$P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en -1 ; montrer que -1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (i.e. elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

SOLUTION. 1. Pour un polynôme P de degré 5, la formule de Taylor en -1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=5} P^{(k)}(-1) \frac{(x+1)^k}{k!}.$$

On calcule alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 5$ et on les évalue en -1 :

$P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2$	$P(-1) = 0$
$P'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$	$P'(-1) = 0$
$P''(x) = 20x^3 - 12x^2 - 12x + 2$	$P''(-1) = -18$
$P'''(x) = 60x^2 - 24x - 12$	$P'''(-1) = 72$
$P^{IV}(x) = 120x - 24$	$P^{IV}(-1) = -144$
$P^V(x) = 120$	$P^V(-1) = 120$

La formule de Taylor en -1 s'écrit alors

$$\begin{aligned} P(x) &= -18 \frac{(x+1)^2}{2} + 72 \frac{(x+1)^3}{6} - 144 \frac{(x+1)^4}{24} + 120 \frac{(x+1)^5}{120} \\ &= -9(x+1)^2 + 12(x+1)^3 - 6(x+1)^4 + (x+1)^5 \\ &= (x+1)^2 (x^3 - 3x^2 + 3x - 2) \end{aligned}$$

Ceci implique que -1 est une racine de P de multiplicité 2.

2. On pose $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. Une racine réelle évidente de Q est 2. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x - 2)$ on obtient

$$Q(x) = (x - 2)(x^2 - x + 1).$$

Étant donné que $x^2 - x + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x + 1)^2(x - 2)(x^2 - x + 1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 - x + 1$ sur $\mathbb{C}$. Avec les notations usuelles du cours, on a $\Delta = -3$ et une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$ d'où les deux racines complexes conjuguées $x_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ et $x_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x + 1)^2(x - 2)(x - e^{i\frac{2\pi}{3}})(x - e^{i\frac{5\pi}{3}}).$$

? Exercice 7.12

On considère le polynôme

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 11x^2 + 7x - 2.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en 1; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (i.e. elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

SOLUTION. 1. Pour un polynôme P de degré 5, la formule de Taylor en 1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=5} P^{(k)}(1) \frac{(x-1)^k}{k!}.$$

On calcule alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 5$ et on les évalue en 1 :

$P(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 11x^2 + 7x - 2$	$P(1) = 0$
$P'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 22x + 7$	$P'(1) = 0$
$P''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 60x - 22$	$P''(1) = -2$
$P'''(x) = 60x^2 - 120x + 60$	$P'''(1) = 0$
$P^{IV}(x) = 120x - 120$	$P^{IV}(1) = 0$
$P^V(x) = 120$	$P^V(1) = 120$

La formule de Taylor en 1 s'écrit alors

$$\begin{aligned} P(x) &= -2 \frac{(x-1)^2}{2} + 120 \frac{(x-1)^5}{120} \\ &= (x-1)^2 (x^3 - 3x^2 + 3x - 2) \end{aligned}$$

Ceci implique que 1 est une racine de P de multiplicité 2.

2. On pose $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. Une racine réelle évidente de Q est 2. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x - 2)$ on obtient

$$Q(x) = (x - 2)(x^2 - x + 1).$$

Étant donné que $x^2 - x + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x^2 - x + 1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 - x + 1$ sur $\mathbb{C}$. Avec les notations usuelles du cours, on a $\Delta = -3$ et une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$ d'où les deux racines complexes conjuguées $x_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ et $x_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - e^{i\frac{2\pi}{3}})(x - e^{i\frac{5\pi}{3}}).$$

? Exercice 7.13

On considère le polynôme

$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 7x + 2.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en 1 ; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (i.e. elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

SOLUTION. 1. Pour un polynôme P de degré 6, la formule de Taylor en 1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=6} P^{(k)}(1) \frac{(x-1)^k}{k!}.$$

On calcule alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 6$ et on les évalue en 1 :

$P(x) = x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 7x + 2$	$P(1) = 0$
$P'(x) = 6x^5 - 25x^4 + 40x^3 - 36x^2 + 22x - 7$	$P'(1) = 0$
$P''(x) = 30x^4 - 100x^3 + 120x^2 - 72x + 22$	$P''(1) = 0$
$P'''(x) = 120x^3 - 300x^2 + 240x - 72$	$P'''(1) = -12$
$P^{IV}(x) = 360x^2 - 600x + 240$	$P^{IV}(1) = 0$
$P^V(x) = 720x - 600$	$P^V(1) = 120$
$P^{VI}(x) = 720$	$P^{VI}(1) = 720$

La formule de Taylor en 1 s'écrit alors

$$\begin{aligned} P(x) &= -2(x-1)^3 + (x-1)^5 + (x-1)^6 = \\ &= (x-1)^3((x-1)^3 + (x-1)^2 - 2) = \\ &= (x-1)^3(x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^2 - 2x + 1 - 2) = \\ &= (x-1)^3(x^3 - 2x^2 + x - 2) \end{aligned}$$

Ceci implique que 1 est une racine de P de multiplicité 3.

2. On pose $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. Une racine réelle évidente de Q est 2. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x-2)$ on obtient

$$Q(x) = (x-2)(x^2 + 1).$$

Étant donné que $x^2 + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x-1)^3(x-2)(x^2 + 1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 + 1$ sur $\mathbb{C}$; on a les deux racines complexes conjuguées $x_1 = -i$ et $x_2 = +i$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x-1)^3(x-2)(x-i)(x+i).$$

? Exercice 7.14

On considère le polynôme

$$P(x) = x^8 + 5x^7 + 9x^6 + 7x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en -1 ; montrer que -1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (i.e. elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

SOLUTION. 1. Pour un polynôme P de degré 8, la formule de Taylor en -1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=8} P^{(k)}(-1) \frac{(x+1)^k}{k!}.$$

On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 8$ et on les évalue en -1 :

$P(x) = x^8 + 5x^7 + 9x^6 + 7x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$	$P(-1) = 0$
$P'(x) = 8x^7 + 35x^6 + 54x^5 + 35x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 18x + 7$	$P'(-1) = 0$
$P''(x) = 56x^6 + 210x^5 + 270x^4 + 140x^3 + 36x^2 + 30x + 18$	$P''(-1) = 0$
$P'''(x) = 336x^5 + 1050x^4 + 1080x^3 + 420x^2 + 72x + 30$	$P'''(-1) = 12$
$P^{IV}(x) = 1680x^4 + 4200x^3 + 3240x^2 + 840x + 72$	$P^{IV}(-1) = -48$
$P^V(x) = 6720x^3 + 12600x^2 + 6480x + 840$	$P^V(-1) = 240$
$P^{VI}(x) = 20160x^2 + 25200x + 6480$	$P^{VI}(-1) = 1440$
$P^{VII}(x) = 40320x + 25200$	$P^{VII}(-1) = -15120$
$P^{VIII}(x) = 40320$	$P^{VIII}(-1) = 40320$

La formule de Taylor en -1 s'écrit alors

$$\begin{aligned} P(x) &= 2(x+1)^3 - 2(x+1)^4 + 2(x+1)^5 + 2(x+1)^6 - 3(x+1)^7 + (x+1)^8 = \\ &= (x+1)^3 [2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5] = \\ &= (x+1)^3 [2x^2 + 2x + 6 + 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 3(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + (x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1)] = \\ &= (x+1)^3 (x^5 + 2x^4 + x + 2) \end{aligned}$$

Ceci implique que -1 est une racine de P de multiplicité 3.

2. On pose $Q(x) = x^5 + 2x^4 + x + 2$. Une racine réelle évidente de Q est -2 . En effectuant la division euclidienne de Q par $(x+2)$ on obtient

$$Q(x) = (x+2)(x^4 + 1).$$

Étant donné que $x^4 + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x+1)^3(x+2)(x^4 + 1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^4 + 1$ sur $\mathbb{C}$; on a les quatre racines $x_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ et $x_4 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x+1)^3(x+2) \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right).$$

Exercice 7.15

On considère le polynôme

$$P(x) = x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en 1; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (i.e. elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

SOLUTION. 1. Pour un polynôme P de degré 6, la formule de Taylor en 1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=6} P^{(k)}(1) \frac{(x-1)^k}{k!}.$$

On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 6$ et on les évalue en 1 :

$$P(x) = x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1 \qquad P(1) = 0$$

$$\begin{array}{ll}
P'(x) = 6x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 2x + 1 & P'(1) = 0 \\
P''(x) = 30x^4 - 20x^3 - 12x^2 + 2 & P''(1) = 0 \\
P'''(x) = 120x^3 - 60x^2 - 24x & P'''(1) = 36 \\
P^{IV}(x) = 360x^2 - 120x - 24 & P^{IV}(1) = 216 \\
P^V(x) = 720x - 120 & P^V(1) = 600 \\
P^{VI}(x) = 720 & P^{VI}(1) = 720
\end{array}$$

La formule de Taylor en 1 s'écrit alors

$$\begin{aligned}
P(x) &= 36 \frac{(x-1)^3}{6} + 216 \frac{(x-1)^4}{24} + 600 \frac{(x-1)^5}{120} + 720 \frac{(x-1)^6}{720} \\
&= 6(x-1)^3 + 9(x-1)^4 + 5(x-1)^5 + (x-1)^6 \\
&= (x-1)^3 \left(6 + 9(x-1) + 5(x-1)^2 + (x-1)^3 \right) \\
&= (x-1)^3 (x^3 + 2x^2 + 2x + 1)
\end{aligned}$$

Ceci implique que 1 est une racine de P de multiplicité 3.

2. On pose $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Une racine réelle évidente de Q est -1 . En effectuant la division euclidienne de Q par $(x+1)$ on obtient

$$Q(x) = (x+1)(x^2 + x + 1).$$

Étant donné que $x^2 + x + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x-1)^3(x+1)(x^2 + x + 1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{C}$. Avec les notations usuelles du cours, on a $\Delta = -3$ et une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$ d'où les deux racines complexes conjuguées $x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2}{3}\pi}$ et $x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4}{3}\pi}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x-1)^3(x+1)(x - e^{i\frac{2}{3}\pi})(x - e^{i\frac{4}{3}\pi}).$$

? Exercice 7.16

On considère le polynôme

$$P(x) = x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 3x - 1.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en -1 ; montrer que -1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (i.e. elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

SOLUTION. 1. Pour un polynôme P de degré 6, la formule de Taylor en -1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=6} P^{(k)}(-1) \frac{(x+1)^k}{k!}.$$

On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 6$ et on les évalue en -1 :

$$\begin{array}{ll}
P(x) = x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 3x - 1 & P(-1) = 0 \\
P'(x) = 6x^5 + 15x^4 + 12x^3 - 6x - 3 & P'(-1) = 0 \\
P''(x) = 30x^4 + 60x^3 + 36x^2 - 6 & P''(-1) = 0 \\
P'''(x) = 120x^3 + 180x^2 + 72x & P'''(-1) = -12 \\
P^{IV}(x) = 360x^2 + 360x + 72 & P^{IV}(-1) = 72 \\
P^V(x) = 720x + 360 & P^V(-1) = -360 \\
P^{VI}(x) = 720 & P^{VI}(-1) = 720
\end{array}$$

La formule de Taylor en -1 s'écrit alors

$$\begin{aligned} P(x) &= -12 \frac{(x+1)^3}{6} + 76 \frac{(x+1)^4}{24} - 360 \frac{(x+1)^5}{120} + 720 \frac{(x+1)^6}{720} \\ &= -2(x+1)^3 + 3(x+1)^4 - 3(x+1)^5 + (x+1)^6 \\ &= (x+1)^3 \left(-2 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3 \right) \\ &= (x+1)^3 (x^3 - 1) \end{aligned}$$

Ceci implique que -1 est une racine de P de multiplicité 3.

2. On pose $Q(x) = x^3 - 1$. Une racine réelle évidente de Q est 1. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x-1)$ on obtient

$$Q(x) = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Étant donné que $x^2 + x + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x+1)^3(x-1)(x^2 + x + 1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{C}$. Avec les notations usuelles du cours, on a $\Delta = -3$ et une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$ d'où les deux racines complexes conjuguées $x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2}{3}\pi}$ et $x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4}{3}\pi}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x+1)^3(x-1)(x - e^{i\frac{2}{3}\pi})(x - e^{i\frac{4}{3}\pi}).$$

? Exercice 7.17

On considère le polynôme

$$P(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en 1 ; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (i.e. elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

SOLUTION. 1. Pour un polynôme P de degré 5, la formule de Taylor en 1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=5} P^{(k)}(1) \frac{(x-1)^k}{k!}.$$

On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 5$ et on les évalue en 1 :

$P(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$	$P(1) = 0$
$P'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2x$	$P'(1) = 0$
$P''(x) = 20x^3 - 6x - 2$	$P''(1) = 12$
$P'''(x) = 60x^2 - 6$	$P'''(1) = 54$
$P^{IV}(x) = 120x$	$P^{IV}(1) = 120$
$P^V(x) = 120$	$P^V(1) = 120$

La formule de Taylor en 1 s'écrit alors

$$\begin{aligned} P(x) &= 6(x-1)^2 + 9(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5 = \\ &= (x-1)^2(6 + 9(x-1) + 5(x-1)^2 + (x-1)^3) = \\ &= (x-1)^2(6 + (9x-9) + (5x^2-10x+5) + (x^3-3x^2+3x-1)) = \\ &= (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \end{aligned}$$

Ceci implique que 1 est une racine de P de multiplicité 2.

2. On pose $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Une racine réelle évidente de Q est -1 . En effectuant la division euclidienne de Q par $(x + 1)$ on obtient

$$Q(x) = (x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Étant donné que $x^2 + x + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{C}$; on a les deux racines complexes conjuguées $x_1 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ et $x_2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x - 1)^2(x + 1) \left(x - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

? Exercice 7.18

On considère le polynôme

$$P(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en -1 ; montrer que -1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (i.e. elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

SOLUTION. 1. Pour un polynôme P de degré 5, la formule de Taylor en -1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=5} P^{(k)}(-1) \frac{(x+1)^k}{k!}.$$

On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 5$ et on les évalue en 1 :

$P(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$	$P(-1) = 0$
$P'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 2x - 2$	$P'(-1) = 0$
$P''(x) = 20x^3 + 24x^2 + 6x - 2$	$P''(-1) = -4$
$P'''(x) = 60x^2 + 48x + 6$	$P'''(-1) = 18$
$P^{IV}(x) = 120x + 48$	$P^{IV}(-1) = -72$
$P^V(x) = 120$	$P^V(-1) = 120$

La formule de Taylor en -1 s'écrit alors

$$\begin{aligned} P(x) &= -2(x+1)^2 + 3(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5 = \\ &= (x+1)^2(-2 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3) = \\ &= (x+1)^2(-2 + (3x+3) - (3x^2+6x+3) + (x^3+3x^2+3x+1)) = \\ &= (x+1)^2(x^3-1) \end{aligned}$$

Ceci implique que -1 est une racine de P de multiplicité 2.

2. On pose $Q(x) = x^3 - 1$. Une racine réelle évidente de Q est 1. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x - 1)$ on obtient

$$Q(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Étant donné que $x^2 + x + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{C}$; on a les deux racines complexes conjuguées $x_1 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ et $x_2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x + 1)^2(x - 1) \left(x - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

? Exercice 7.19 factorisation

Factoriser les polynômes suivants en exploitant les informations données

1. $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$,
2. $P(x) = 2x^3 - (5 + 6i)x^2 + 9ix + 1 - 3i$ (P possède une racine réelle),
3. $P(x) = x^3 - 2x^2 - (i + 2)x + 3i - 3$ (P possède une racine réelle),
4. $P(x) = x^3 + (3i - 2)x^2 - (2 + 6i)x + 4$ (P possède une racine réelle),
5. $P(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 + ix + \frac{1}{2}i$ (P possède une racine réelle),
6. $P(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ (P possède une racine évidente),
7. $P(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$ (P possède une racine évidente).

SOLUTION. 1. Une racine évidente de P est $x = 1$. En effectuant la division euclidienne de P par $(x - 1)$ on obtient

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x^3 & +2x^2 & -x & -2 & \\
 -x^3 & +x^2 & & & \\
 \hline
 & 3x^2 & -x & -2 & \\
 & -3x^2 & +3x & & \\
 \hline
 & & 2x & -2 & \\
 & & -2x & +2 & \\
 \hline
 & & & 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rr}
 x & -1 & \\
 x^2 & +3x & +2
 \end{array}$$

donc $P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 2) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

2. Comme $P(3) = 0$ on factorise P en effectuant la division euclidienne de P par $(x - \frac{1}{2})$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2x^3 & -(5 + 6i)x^2 & +9ix & +1 - 3i & \\
 -2x^3 & +6x^2 & & & \\
 \hline
 & (1 - 6i)x^2 & +9ix & +1 - 3i & \\
 & -(1 - 6i)x^2 & +3(1 - 6i)x & & \\
 \hline
 & & (3 - 9i)x & +1 - 3i & \\
 & & -(3 - 9i)x & -(3 - 9i) & \\
 \hline
 & & & 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rr}
 x & \frac{1}{2} & \\
 x^2 & +x & +(1 - i)
 \end{array}$$

On obtient $P(x) = (x - 3)(2x^2 + (1 - 6i)x + (1 - 3i))$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine réelle de P , alors elle satisfait l'équation $2\alpha^3 - (5 + 6i)\alpha^2 + 9i\alpha + 1 - 3i = 0$. En comparant les parties réelle et imaginaire dans cette égalité on trouve

$$\begin{cases} 2\alpha^3 - 5\alpha^2 + 1 = 0 \\ -6\alpha^2 + 9\alpha - 3 = 0. \end{cases}$$

La résolution de $-6\alpha^2 + 9\alpha - 3 = 0$ donne deux solutions : $\alpha = 1$ et $\alpha = 1/2$. Le réel $\alpha = 1$ ne vérifiant pas l'équation $2\alpha^3 - 5\alpha^2 + 1 = 0$ et le réel $\alpha = 1/2$ oui, on a bien $P(1/2) = 0$. On factorise alors P en effectuant la division euclidienne de P par $(x - 1/2)$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2x^3 & -(5 + 6i)x^2 & +9ix & +1 - 3i & \\
 -2x^3 & +x^2 & & & \\
 \hline
 & -(4 + 6i)x^2 & +9ix & +1 - 3i & \\
 & (4 + 6i)x^2 & -(2 + 3i)x & & \\
 \hline
 & & -(2 - 6i)x & 1 - 3i & \\
 & & (2 - 6i)x & -(1 - 3i) & \\
 \hline
 & & & 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rr}
 x & -1/2 & \\
 2x^2 & -(4 + 6i)x & -(2 - 6i)
 \end{array}$$

On obtient $P(x) = (x - 1/2)(2x^2 - (4 + 6i)x - (2 - 6i))$. On va maintenant factoriser $2x^2 - (4 + 6i)x - (2 - 6i)$:

$$2x^2 - (4 + 6i)x - (2 - 6i) = 0 \implies \delta^2 = (-(4 + 6i))^2 - 4(2)(-(2 - 6i)) = -4 \implies \delta = 2i \implies x_0 = 1 + 2i, x_1 = 1 + i;$$

par conséquent $P(x) = 2(x - 1/2)(x - 1 - 2i)(x - 1 - i)$.

4. Comme $P(2) = 0$ on factorise P en effectuant la division euclidienne de P par $(x - 2)$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x^3 & +(3i-2)x^2 & -(6i+2)x & +4 & \\
 -x^3 & +2x^2 & & & \\
 \hline
 & 3ix^2 & -(6i+2)x & +4 & \\
 & -3ix^2 & +6ix & & \\
 \hline
 & & -2x & +4 & \\
 & & 2x & -4 & \\
 \hline
 & & & 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rr}
 x & -2 & \\
 x^2 & +3ix & -2
 \end{array}$$

On obtient $P(x) = (x - 2)(x^2 + 3ix - 2)$. On voit que $x = -i$ est une racine du polynôme $x^2 + 3ix - 2$ et on trouve $P(x) = (x - 2)(x + i)(x + 2i)$.

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine réelle de P , alors elle satisfait l'équation $2\alpha^4 + \frac{1}{2}\alpha^3 + i\alpha + \frac{1}{2}i = 0$. En comparant les parties réelle et imaginaire dans cette égalité on trouve $\alpha = -1/2$ et on a bien $P(-1/2) = 0$. On factorise alors P en effectuant la division euclidienne de P par $(x + 1/2)$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x^4 & +\frac{1}{2}x^3 & +ix & +\frac{1}{2}i & \\
 -x^4 & -\frac{1}{2}x^3 & & & \\
 \hline
 & & +ix & +\frac{1}{2}i & \\
 & & -ix & -\frac{1}{2}i & \\
 \hline
 & & & 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rr}
 x & +1/2 & \\
 x^3 & +i &
 \end{array}$$

On obtient $P(x) = (x - 1/2)(x^3 + i)$. On remarque que $x^3 + i = x^3 - i^3 = (x - i)(x^2 + ix - 1)$. On va maintenant factoriser $x^2 + ix - 1$:

$$x^2 + ix - 1 = 0 \implies \delta^2 = 3 \implies \delta = \sqrt{3} \implies x_0 = \frac{\sqrt{3} - i}{2}, x_1 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2};$$

par conséquent $P(x) = (x - 1/2)(x - i) \left(x - \frac{\sqrt{3} - i}{2} \right) \left(x - \frac{-\sqrt{3} - i}{2} \right)$.

6. Comme $P(-1) = 0$ on sait que P est divisible par $(x + 1)$. Avant d'effectuer la division euclidienne, cherchons d'abord la multiplicité de cette racine :

$$\begin{array}{ll}
 P(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1 & P(-1) = 0 \\
 P'(x) = 5x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 8x + 3 & P'(-1) = 0 \\
 P''(x) = 20x^3 + 36x^2 + 24x + 8 & P''(-1) = 0 \\
 P'''(x) = 60x^2 + 72x + 24 & P'''(-1) = 12
 \end{array}$$

On sait alors que $P(x) = (x + 1)^3 Q(x)$ et on calcule Q en effectuant la division euclidienne de P par $(x + 1)^3$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 x^5 & +3x^4 & +4x^3 & +4x^2 & +3x & +1 & \\
 -x^5 & -3x^4 & -3x^3 & -x^2 & & & \\
 \hline
 & & x^3 & +3x^2 & +3x & +1 & \\
 & & -x^3 & -3x^2 & -3x & -1 & \\
 \hline
 & & & & 0 & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rr}
 x^3 & +3x^2 & +3x & +1 \\
 x^2 & +1 & &
 \end{array}$$

donc $P(x) = (x + 1)^3(x^2 + 1) = (x + 1)^3(x - i)(x + i)$.

7. Comme $P(1) = 0$ on sait que P est divisible par $(x - 1)$. Avant d'effectuer la division euclidienne, cherchons d'abord la multiplicité de cette racine :

$$\begin{array}{ll}
 P(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 & P(1) = 0 \\
 P'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 12x + 1 & P'(1) = 0 \\
 P''(x) = 24x^2 + 6x - 12 & P''(1) = 30
 \end{array}$$

On sait alors que $P(x) = (x - 1)^2 Q(x)$ et on calcule Q en effectuant la division euclidienne de P par $(x - 1)^2$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2x^4 & +x^3 & -6x^2 & +x & +2 \\
 -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & \\
 \hline
 & 5x^3 & -8x^2 & +x & +2 \\
 & -5x^3 & +10x^2 & -5x & \\
 \hline
 & & 2x^2 & +4x & -2 \\
 & & -2x^2 & -4x & +2 \\
 \hline
 & & & 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rr}
 x^2 & -2x & +1 \\
 2x^2 & +5x & +2
 \end{array}$$

On obtient $P(x) = (x - 1)^2(2x^2 + 5x + 2) = 2(x - 1)^2(x + 1/2)(x + 2)$.

? Exercice 7.20 multiplicité

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $P_n(x) := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ n'a pas de racines multiples.
On pourra calculer P'_n et l'exprimer en fonction de P_n .

SOLUTION. ① $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ (rappel : $x^0 = 1$ et $0! = 1$)

② $\alpha = 0$ n'est pas racine de $P_n(x)$ car $P_n(0) = 1$

③ $P'_n(x) = \sum_{k=0}^n k \frac{x^{k-1}}{k!} \stackrel{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{x^j}{(j+1)!} = P_{n-1}(x)$

④ $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!} = P'_n(x) + \frac{x^n}{n!}$

Si α est racine de P_n alors $\alpha \neq 0$ et $P'_n(\alpha) = -\frac{\alpha^n}{n!} \neq 0$ donc α est une racine simple de P_n .

? Exercice 7.21

Soient a et b deux nombres complexes et $P(x) := x^4 - 2ix^3 + 3(1+i)x^2 + ax + b$.

▷ Calculer a et b pour que i soit une racine multiple de P .

Dans toute la suite, on suppose que i est une racine multiple de P .

▷ Quelle est la multiplicité de la racine i de P ?

▷ Calculer les autres racines de P .

SOLUTION. ▷ Pour que i soit une racine multiple de P il faut que $P(i) = 0$ et $P'(i) = 0$:

$$P(x) := x^4 - 2ix^3 + 3(1+i)x^2 + ax + b \quad P(i) = -4 + 3i + ai + b$$

donc $P(i) = 0$ si et seulement si $b = 4 + 3i - ai$;

$$P'(x) := 4x^3 - 6ix^2 + 6(1+i)x + a \quad P'(i) = 8i - 6 + a$$

donc $P'(i) = 0$ si et seulement si $a = 6 - 8i$ ce qui implique $b = -4 - 3i$.

Dans toute la suite, on suppose que $a = 6 - 8i$ ce qui implique $b = -4 - 3i$.

▷ On sait déjà que i a au moins multiplicité 2. Vérifions si c'est supérieure :

$$P''(x) = 12x^2 - 12ix + 6(1+i) \quad P''(i) = 6(1+i) \neq 0$$

donc elle a multiplicité 2.

▷ On doit alors calculer deux autres racines de P : soit on effectue la division euclidienne de P par $(x-i)^2$, soit on factorise P à l'aide de la formule de Taylor, ce qui donne

$$\begin{aligned} P(x) &= P(i) + (x-i)P'(i) + \frac{(x-i)^2}{2!}P''(i) + \frac{(x-i)^3}{3!}P'''(i) + \frac{(x-i)^4}{4!}P^{IV}(i) \\ &= \frac{(x-i)^2}{2!}6(1+i) + \frac{(x-i)^3}{3!}12i + \frac{(x-i)^4}{4!}24 \\ &= (x-i)^2(x^2 + 4 + 3i) = (x-i)^2 \left(x - \frac{1-3i}{\sqrt{2}} \right) \left(x - \frac{1+3i}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

? Exercice 7.22

Montrer que le polynôme $P(x) := 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ admet une racine triple que l'on déterminera, puis factoriser P à l'aide de la formule de Taylor.

SOLUTION. Comme $P(1) = 0$ on sait que P est divisible par $(x - 1)$. Cherchons la multiplicité de cette racine :

$$\begin{array}{ll} P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1 & P(1) = 0 \\ P'(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x - 5 & P'(1) = 0 \\ P''(x) = 24x^2 - 42x + 18 & P''(1) = 0 \\ P'''(x) = 48x - 42 & P'''(1) = 6 \\ P^{IV}(x) = 48 & P^{IV}(1) = 48 \end{array}$$

On sait alors que $P(x) = (x - 1)^3 Q(x)$ et la formule de Taylor en $x = 1$ s'écrit

$$P(x) = 6 \frac{(x-1)^3}{3!} + 48 \frac{(x-1)^4}{4!} = \frac{(x-1)^3}{3!} \left(6 + 48 \frac{(x-1)}{4} \right) = (x-1)^3 (2x-1).$$

? Exercice 7.23

Soit x_1, x_2, x_3 les trois racines du polynôme $P(x) := x^3 - 3x^2 + 2x + 1$. Sans calculer les racines de P , donner les valeurs

- ▷ $\sigma_1 := x_1 + x_2 + x_3$,
- ▷ $\sigma_2 := x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$,
- ▷ $\sigma_3 := x_1 x_2 x_3$,
- ▷ $A := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

SOLUTION. Soit $Q(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ un polynôme avec $a_n \neq 0$ et $x_1, \dots, x_n$ ses racines. On peut écrire

$$Q(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - x_i) = a_n \left(x^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma_i x^{n-i} \right) \text{ avec } (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} = \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

En particulier

$$\begin{aligned} -\frac{a_{n-1}}{a_n} &= \sigma_1 = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} &= \sigma_2 = \sum_{i < j} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \\ (-1)^n \frac{a_0}{a_n} &= \sigma_n = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 x_2 \dots x_n \end{aligned}$$

Les quantités σ_i sont appelées *fonctions symétriques élémentaires* des racines du polynôme Q .

Pour $n = 2$, si $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_2(x - x_1)(x - x_2)$, il y a deux fonctions symétriques élémentaires :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \\ \sigma_2 &= x_1 x_2 = -\frac{a_0}{a_2}. \end{aligned}$$

Pour $n = 3$, si $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, il y a trois fonctions symétriques élémentaires :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \\ \sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_1}{a_3}, \\ \sigma_3 &= x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned}$$

Dans l'exemple on a alors $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 1$ et $A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 5$.

? Exercice 7.24 *division par les puissances croissantes*

Effectuer la division de $A(x) := 1 + x^2 + x^4$ par $B(x) := 1 + x + x^3$ suivant les puissances croissantes à l'ordre quatre.

SOLUTION.

1		$+x^2$		$+x^4$		$1 + x + x^3$
-1	$-x$		$-x^3$			$1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4$
	$-x$	$+x^2$	$-x^3$	$+x^4$		
	x	$+x^2$		$+x^4$		
		$2x^2$	$-x^3$	$+2x^4$		
		$-2x^2$	$-2x^3$	$-2x^5$		
			$-3x^3$	$+2x^4$		
			$3x^3$	$+3x^4$		$+3x^6$
				$5x^4$		$-2x^5$
				$-5x^4$		$+3x^6$
						$-5x^7$
						$-7x^5$
						$+3x^6$
						$-5x^7$

d'où la relation

$$1 + x^2 + x^4 = (1 + x + x^3)(1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4) + x^5(-7 + 3x - 5x^2).$$

? Exercice 7.25

Factoriser $P(x) := x^8 + x^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

On remarquera pour commencer que $P(x) = (x^4 + 1)^2 - x^4$.

SOLUTION.

$$\begin{aligned}
 P(x) &= x^8 + x^4 + 1 \\
 &= (x^4 + 1)^2 - x^4 \\
 &= [(x^4 + 1) - x^2][(x^4 + 1) + x^2] \\
 &= [x^4 - x^2 + 1][x^4 + x^2 + 1] \\
 &= [(x^2 - 1)^2 - x^2][(x^2 + 1)^2 - x^2] \\
 &= [(x^2 - 1) - x][(x^2 - 1) + x][(x^2 + 1) - x][(x^2 + 1) + x] \\
 &= (x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \\
 &= \left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Suites

| Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. La notation traditionnelle est $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

N.B. Dans ce qui suit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne toujours une suite numérique.

Limite d'une suite.

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ (on écrit $\lim_n x_n = x$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |x_n - x| < \varepsilon.$$

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers plus l'infini (on écrit $\lim_n x_n = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n > M.$$

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers moins l'infini (on écrit $\lim_n x_n = -\infty$)

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n < m.$$

Remarque

| La suppression d'un nombre fini de termes ne modifie pas la nature de la suite, ni sa limite éventuelle.

Suite convergente

| Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_n x_n = x$.

Suite de Cauchy

On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad p, q > N \implies |x_q - x_p| < \varepsilon.$$

Théorème de complétude

| Une suite est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

**Suite bornée, suite monotone**

- ▷ Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante lorsque pour tout n , $x_n \leq x_{n+1}$.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante lorsque pour tout n , $x_n \geq x_{n+1}$.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n , $x_n \leq a$. On dit que a est un majorant de la suite.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n , $x_n \geq a$. On dit que a est un minorant de la suite.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n| \leq M$ pour tout n .

**Théorème (condition suffisante)**

Tout suite convergente est bornée.
Une suite non bornée ne peut donc pas être convergente.

**Théorème de la convergence monotone (conditions suffisantes)**

- ▷ Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est croissante et majorée est convergente et $\lim_n x_n = \sup_n x_n$.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est décroissante et minorée est convergente et $\lim_n x_n = \inf_n x_n$.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

**Théorème d'encadrement (condition suffisante)**

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. S'il existe deux suites convergentes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant une même limite $x \in \mathbb{R}$ et satisfaisant

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies u_n \leq x_n \leq v_n,$$

alors $\lim_n x_n = x$.

**Valeur d'adhérence**

On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ si et seulement si il existe une sous-suite extraite qui converge vers ℓ .

**Théorème**

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si (x_n) converge vers ℓ , toute sous-suite converge aussi vers ℓ .
Si une suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, ou si deux suites extraites de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont des limites différentes, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
Si deux suites extraites de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ et si x_n est un terme d'une de ces suites extraites, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ . Par exemple, si (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers ℓ , alors (x_n) converge vers ℓ .

**Suites adjacentes**

- Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si
- ▷ (u_n) est croissante,
 - ▷ (v_n) est décroissante,
 - ▷ $\lim_n (u_n - v_n) = 0$.

**Théorème**

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.



$$\lim_n \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b, \\ \frac{p_a}{q_b} & \text{si } a = b, \\ \infty & \text{si } a > b, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} P(n) &= p_0 + p_1 n + \cdots + p_a n^a, \\ Q(n) &= q_0 + q_1 n + \cdots + q_b n^b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_n n \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= 1 & (n \text{ en radiant}) & \quad \lim_n n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} & (n \text{ en radiant}) \\ \lim_n \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n &= e^\alpha & (\alpha \in \mathbb{R}) & \quad \lim_n n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = 1 \\ \lim_n n \left(a^{1/n} - 1\right) &= \ln a & (a > 0) & \quad \lim_n n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = \alpha & (\alpha \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Critère du rapport (ou de D'Alembert)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$; alors

- ▷ si $0 \leq \ell < 1$ alors $u_n \rightarrow 0$,
- ▷ si $1 < \ell \leq +\infty$ alors $u_n \rightarrow +\infty$
- ▷ si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.

Critère de la racine (ou de Cauchy)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$; alors

- ▷ si $0 \leq \ell < 1$ alors $u_n \rightarrow 0$,
- ▷ si $1 < \ell \leq +\infty$ alors $u_n \rightarrow +\infty$
- ▷ si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.

Suite arithmétique

Une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + r$ et donc $v_n = v_0 + nr$ et l'on a $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = n \frac{v_0 + v_{n-1}}{2}$.

Suite et série géométriques

Une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = qv_n$ et donc $v_n = v_0 q^n$.

- ▷ Si $q < -1$, la suite (v_n) diverge et ne possède pas de limite.
- ▷ Si $q = -1$, la suite (v_n) diverge et possède deux valeurs d'adhérence 1 et -1 .
- ▷ Si $|q| < 1$, la suite (v_n) converge vers 0.
- ▷ Si $q = 1$, la suite (v_n) est constante et converge vers 1.
- ▷ Si $q > 1$, la suite (v_n) est divergente mais possède une limite égale à $+\infty$.

Considérons la suite $s_{n-1} := \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \begin{cases} v_0 \frac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n v_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

- ▷ Si $q < -1$, la suite (s_n) est divergente et ne possède pas de limite.
- ▷ Si $q = -1$, la suite (s_n) est divergente et possède deux valeurs d'adhérence 0 et 1.
- ▷ Si $|q| < 1$, la suite (s_n) converge vers $\frac{1}{1-q}$.
- ▷ Si $q = 1$, la suite (s_n) est divergente mais possède une limite égale à $+\infty$.
- ▷ Si $q > 1$, la suite (s_n) est divergente mais possède une limite égale à $+\infty$.



? Exercice 8.1

Étudier la convergence de la suite $(n^q)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivant la valeur de $q \in \mathbb{R}$.

SOLUTION. ▷ Si $q < 0$, la suite converge vers 0.

▷ Si $q = 1$, la suite est constante et converge vers 1.

▷ Si $q > 0$, la suite diverge mais possède une limite égale à $+\infty$.

? Exercice 8.2 limites connues

Montrer que pour $k > 1$ et $\alpha > 0$

$$(1) \lim_n \frac{k^n}{n!} = 0, \quad (2) \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0 \quad (3) \lim_n \frac{n^\alpha}{k^n} = 0.$$

SOLUTION. On utilise le critère de D'Alembert.

(1) Soit $u_n = \frac{k^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{k}{n+1} \rightarrow 0$ donc $u_n \rightarrow 0$.

(2) Soit $u_n = \frac{n!}{n^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ donc $u_n \rightarrow 0$.

(3) Soit $u_n = \frac{n^\alpha}{k^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{k} \rightarrow \frac{1}{k} < 1$ donc $u_n \rightarrow 0$.

? Exercice 8.3

Prouver que $\lim_n \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$ pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

SOLUTION. Notons $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, alors $u_n = \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = \left(\frac{\ln n}{n^\gamma}\right)^\beta = \left(\frac{\ln n}{e^{\gamma(\ln n)}}\right)^\beta$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $m = E(\ln(n)) \in \mathbb{N}$; alors $0 \leq u_n \leq v_m = \left(\frac{m+1}{e^{\gamma m}}\right)^\beta$. On utilise alors le critère de D'Alembert : $\frac{v_{m+1}}{v_m} = \left(\frac{m+2}{m+1} \frac{e^{\gamma m}}{e^{\gamma(m+1)}}\right)^\beta \rightarrow \frac{1}{e^\alpha} < 1$ donc $v_m \rightarrow 0$ et pour le théorème d'encadrement u_n aussi.

? Exercice 8.4

Montrer que $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

SOLUTION. $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) \rightarrow e^0 = 1$.

? Exercice 8.5

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{2}{n}\right),$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{n}}\right),$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \cos \frac{2}{n}\right),$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left((-1)^n - \cos \frac{1}{n}\right),$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin \frac{2}{n}\right),$

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin \frac{2}{\sqrt{n}}\right),$

g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n} \sin \frac{2}{n}\right),$

h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin \frac{(-1)^n}{n}\right),$

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n,$

j) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n,$

k) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}},$

l) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n,$



$$m) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{4n},$$

$$n) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\tan \frac{3}{n} - \sin \frac{3}{n} \right),$$

$$o) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}{9^n},$$

$$p) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - (-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}},$$

$$q) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

SOLUTION.

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \frac{n^2}{4} \left(1 - \cos \frac{2}{n}\right) = 2,$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (4n)n \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = +\infty,$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \cos \frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} n^2 \left(1 - \cos \frac{2}{n}\right) = 0,$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left((-1)^n - \cos \frac{1}{n}\right),$$

n'existe pas car la suite extraite constituée par les termes d'indices paire converge vers $\frac{1}{2}$ et la suite extraite constituée par les termes d'indices impaire diverge vers $-\infty$,

$$e) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin \frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{n}{2} \sin \frac{2}{n}\right) = 2,$$

$$f) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{n} \left(\frac{\sqrt{n}}{2} \sin \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = +\infty,$$

$$g) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n} \sin \frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \left(\frac{n}{2} \sin \frac{2}{n}\right) = 0,$$

$$h) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

n'existe pas car la suite extraite constituée par les termes d'indices paire converge vers 1 et la suite extraite constituée par les termes d'indices impaire converge vers -1 ,

$$i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2,$$

$$j) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = +\infty,$$

$$k) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1,$$

$$l) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$$

n'existe pas car la suite extraite constituée par les termes d'indices paire converge vers e et la suite extraite constituée par les termes d'indices impaire converge vers e^{-1} ,

$$m) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{4n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n/3}\right)^{n/3}\right)^{4 \times 3} = e^{12},$$

$$n) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\tan \frac{3}{n} - \sin \frac{3}{n}\right) \stackrel{t=3/n}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} (3t)^3 \left(\frac{\sin \frac{1}{t}}{\cos \frac{1}{t}} - \sin \frac{1}{t}\right) = 27 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t \sin \frac{1}{t}\right) t^2 \left(1 - \cos \frac{1}{t}\right) \frac{1}{\cos \frac{1}{t}} = 27 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{27}{2},$$

$$o) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}{9^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}}{3^{2n}} = e^{2/3},$$

$$p) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - (-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n}}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}} = 1,$$

$$q) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} = 1$$

$$\text{car } \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1.$$

? Exercice 8.6

Calculer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha - 2\sqrt{n}}{(\sqrt{n} - 3)(2 - 3\sqrt{n})}.$$

SOLUTION.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha - 2\sqrt{n}}{(\sqrt{n} - 3)(2 - 3\sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha - 2\sqrt{n}}{-3n + 11\sqrt{n} - 6} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha > 1, \\ -\frac{1}{3} & \text{si } \alpha = 1, \\ 0 & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

? Exercice 8.7 Série harmonique

Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $x_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, diverge vers $+\infty$.

SOLUTION. Idée : $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \cdots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdots \rightarrow +\infty$. Sinon, on peut utiliser un raisonnement par l'absurde. Si la suite de terme général x_n convergerait vers une limite finie, la suite de terme général x_{2n} , en tant que suite extraite, convergerait vers la même limite, et donc la suite de terme général $x_{2n} - x_n$ convergerait vers 0. Or, on peut minorer les termes de cette suite :

$$x_{2n} - x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la suite de terme général x_n ne peut converger vers une limite finie. En tant que suite croissante de réels, elle diverge donc vers $+\infty$.

? Exercice 8.8

Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $x_n := \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{1+k}\right)$, est convergente ;

$$\text{SOLUTION. } x_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{1+k}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1.$$

? Exercice 8.9

Étudier la convergence des suites définies ci-dessous par leur terme général u_n :

1. $\sqrt{n^5 + 3n} - n$

2. $n - \sqrt{n^3 - 3n}$

3. $\frac{\sin^5(\sqrt{n})}{n^2}$

4. $\left(1 + \frac{\pi}{n}\right)^n$

5. $\left(1 - \frac{e}{n}\right)^n$
 6. $\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n$, a réel quelconque

SOLUTION. 1. $\lim_n \sqrt{n^5 + 3n} - n = \lim_n \frac{n^5 + 3n - n^2}{\sqrt{n^5 + 3n} + n} = \lim_n \frac{n^5}{n^{5/2}} = +\infty$

2. $\lim_n n - \sqrt{n^3 - 3n} = \lim_n \frac{n^2 - (n^3 - 3n)}{n + \sqrt{n^3 - 3n}} = \lim_n \frac{-n^3}{n^{3/2}} = -\infty$

3. $\lim_n \frac{\sin^5(\sqrt{n})}{n^2} = 0$ (théorème d'encadrement)

4. $\lim_n \left(1 + \frac{\pi}{n}\right)^n = \lim_n \left(1 + \frac{\pi}{n}\right)^{n/\pi}{}^\pi = e^\pi$

5. $\lim_n \left(1 - \frac{e}{n}\right)^n = \lim_n \left(1 + \frac{-e}{n}\right)^{-n/e}{}^{-e} = e^{-e}$

6. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1-a^2}{1+a^2}$ donc

▷ u_n ne converge pas et ne possède pas de limite si $\frac{1-a^2}{1+a^2} < -1$, c'est-à-dire pour aucun a réel.

▷ u_n ne converge pas et possède deux valeurs d'adhérence 1 et -1 si $\frac{1-a^2}{1+a^2} = -1$, c'est-à-dire pour aucun a réel.

▷ u_n converge vers 0 si $-1 < \frac{1-a^2}{1+a^2} < 1$, c'est-à-dire pour tout $a \neq 0$.

▷ u_n est constante et converge vers 1 si $\frac{1-a^2}{1+a^2} = 1$, c'est-à-dire si $a = 0$.

▷ u_n est divergente et possède une limite égale à $+\infty$ si $\frac{1-a^2}{1+a^2} > 1$, c'est-à-dire pour aucun a réel.

En résumé :

$$\lim_n u_n = \begin{cases} 0, & \text{si } a \neq 0, \\ 1, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

? Exercice 8.10

Calculer, si elles existent, les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

- | | | | |
|---|--|--|---|
| a) $u_n > \ln n$ | b) $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ | c) $u_n \nearrow$ et $u_n < 1 + \frac{1}{n}$ | d) $u_n = \sqrt[n]{n}$ |
| e) $u_n = \ln n + \sin(n)$ | f) $u_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ | g) $u_n = \frac{n}{e} + \frac{1}{e^n}$ | h) $u_n = \frac{n}{n+1} \ln n$ |
| i) $u_n = \frac{n^2}{n!}$ | j) $u_n = \frac{(2n)!}{n!}$ | k) $u_n = \frac{n \sin(n)}{n^2 + 1}$ | l) $u_n = \frac{n + (-1)^n}{3n - (-1)^n}$ |
| m) $u_n = (n^2 + n + 1)^{1/n}$ | n) $u_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$ | o) $u_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1}$ | p) $u_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+1}$ |
| q) $u_n = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right)$ | r) $u_n = \frac{2n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 1}$ | s) $u_n = (-1)^n \frac{4n-1}{2n+3}$ | t) $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{3n+1}$ |
| u) $u_n = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right)$ | v) $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n\sqrt{n} + 1}$ | w) $u_n = (-1)^n \frac{6n+3}{2n-1}$ | |

SOLUTION. a) $u_n \rightarrow +\infty$ car $\ln n \rightarrow +\infty$ (théorème d'encadrement)

b) $u_n \rightarrow 1$ car $\frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ et $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ (théorème d'encadrement)

c) $u_n \rightarrow \ell \leq 1$ car u_n est monotone croissante et majorée donc $\ell \leq \lim_n (1 + \frac{1}{n}) = 1$

d) $u_n = \sqrt[n]{n} = \exp(\frac{\ln n}{n}) \rightarrow \exp(0) = 1$

e) $u_n = \ln(n) + \sin(n) \rightarrow +\infty$ car $(\ln(n) - 1) \leq u_n \leq (\ln(n) + 1)$ et $(\ln(n) \pm 1) \rightarrow +\infty$ (théorème d'encadrement)

f) $u_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ n'existe pas car la suite extraite $u_{3n} = \sin(n\pi) = 0$ et la suite extraite $u_{6n+1} = \sin(2n\pi + \pi/3) = \sqrt{3}/2$

g) $u_n \rightarrow +\infty$

- h) $u_n = \frac{\ln n}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow +\infty$
- i) $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 n!}{(n+1)! n^2} = \frac{n+1}{n^2} < 1$ pour $n > 2$; comme $u_n \searrow$ et $u_n > 0$ alors $u_n \rightarrow \ell \geq 0$
- j) $u_n = (2n)(2n-1) \cdots (2n-n+1) \rightarrow +\infty$
- k) $u_n \rightarrow 0$ car $\frac{-n}{n^2+1} \leq \frac{n \sin(n)}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$ et $\pm \frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0$ (théorème d'encadrement)
- l) $u_n \rightarrow \frac{1}{3}$ car $\frac{n-1}{3n+1} \leq \frac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n} \leq \frac{n+1}{3n-1}$ et $\lim_n \frac{n-1}{3n+1} = \lim_n \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3}$
- m) On sait que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell > 0$ alors $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$. On pose $u_n = n^2 + n + 1$; comme $\frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{n^2 + n + 1} = \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + n + 1} \rightarrow 1$ alors $\sqrt[n]{n^2 + n + 1} \rightarrow 1$.
- n) $u_n \rightarrow 1$
- o) Cette suite ne converge pas car la sous-suite u_{2n} tend vers 1 tandis que la sous-suite u_{2n+1} tend vers -1
- p) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+1}) \frac{\sqrt{3n+1} + \sqrt{2n+1}}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+1) - (2n+1)}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{3n+1}{n^2}} + \sqrt{\frac{2n+1}{n^2}}} = +\infty$
- q) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = 0$
- r) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n\sqrt{n+1}}{n^2+1} = 0$
- s) Cette suite ne converge pas car la sous-suite u_{2n} tend vers 2 tandis que la sous-suite u_{2n+1} tend vers -2
- t) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{3n+1}) \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{3n+1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{3n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1) - (3n+1)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{3n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{\frac{2n+1}{n^2}} + \sqrt{\frac{3n+1}{n^2}}} = -\infty$
- u) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) = 0$
- v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{2n\sqrt{n+1}} = +\infty$
- w) Cette suite ne converge pas car la sous-suite u_{2n} tend vers 3 tandis que la sous-suite u_{2n+1} tend vers -3

? Exercice 8.11

Étudier le comportement des suites

$$a_n = \frac{\cos n}{e^{3n} + 1} \quad \text{et} \quad b_n = \left(e^{-4n} + \frac{1}{n}\right) (\sin(n))$$

SOLUTION. Soit u_n une suite. S'il existe deux suites v_n et w_n ayant une même limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et satisfaisant

$$\exists M \in \mathbb{N} \text{ tel que } v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq M,$$

alors $\lim u_n = \ell$.

Étant donné que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-\frac{1}{e^{3n}+1} \leq a_n \leq \frac{1}{e^{3n}+1}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pm 1}{e^{3n}+1} = 0$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Étant donné que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-(e^{-4n} + \frac{1}{n}) \leq b_n \leq (e^{-4n} + \frac{1}{n})$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pm(e^{-4n} + \frac{1}{n}) = 0$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

? Exercice 8.12

☐ Vrai ou ☐ faux?

1. Si la suite $(|u_n|)$ est majorée, la suite (u_n) est bornée.
2. Si la suite $(|u_n|)$ converge vers 0, alors la suite (u_n) converge vers 0.
3. Si la suite (u_n) converge vers ℓ et si elle est à termes strictement positif, alors $\ell > 0$.
4. Si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0 quelque soit la suite (v_n) .
5. Si $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ sont deux suites convergentes, la suite $(|u_n + v_n|)$ est aussi convergente.
6. Si la suite $(|u_n + v_n|)$ est convergente alors les deux suites $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ sont aussi convergentes.
7. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \leq v_n$, alors la convergence de

(v_n) implique celle de (u_n) .

8. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \leq v_n$, alors la convergence de (u_n) implique celle de (v_n) .
9. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \geq v_n$, alors la convergence de (v_n) implique celle de (u_n) .
10. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \geq v_n$, alors la convergence de (u_n) implique celle de (v_n) .
11. Si la suite (u_n) converge, alors elle est monotone.
12. Si la suite (u_n) est monotone, alors elle converge.
13. Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.
14. Si la suite (u_n) est croissante et minorée, alors elle converge.
15. Si la suite (u_n) est décroissante et majorée, alors elle converge.
16. Si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

SOLUTION. 1. Vrai : s'il existe un réel positif a tel que $|u_n| \leq a$ alors $-a \leq u_n \leq a$ donc la suite (u_n) est bornée.

2. Vrai (Théorème des gendarmes).
3. Faux : $u_n = 1/n > 0$ pour tout n mais $u_n \rightarrow 0$.
4. Faux : $u_n = 1/n \rightarrow 0$ et $v_n = n$.
5. Vrai
6. Faux : $u_n = n$ et $v_n = -n$.
7. Faux : $u_n = -n < 0$, $v_n = 1/n > 0$ mais $u_n \rightarrow -\infty$ bien que $v_n \rightarrow 0$.
8. Faux : $u_n = 1/n < v_n = n$ mais $v_n \rightarrow +\infty$ bien que $u_n \rightarrow 0$.
9. Faux : $u_n = n > v_n = 1/n$ mais $u_n \rightarrow +\infty$ bien que $v_n \rightarrow 0$.
10. Faux : $u_n = 1/n > 0 > v_n = -n$ mais $u_n \rightarrow 0$ bien que $v_n \rightarrow -\infty$.
11. Faux : $u_n = (-1)^n/n$
12. Faux : $u_n = n$
13. Vrai
14. Faux : $u_n = n$ est minorée par 0 et croissante mais elle diverge.
15. Faux : $u_n = -n$ majorée par 0 et décroissante mais $u_n \rightarrow -\infty$.
16. Vrai

? Exercice 8.13 suite récurrente

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - 1.1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bien définie qui satisfait $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - 1.2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone puis en étudier la convergence.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
 - 2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 2$.
 - 2.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
 - 2.3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1$.
 - 3.1. Montrer que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - 3.2. Montrer que la suite (u_n) est divergente sans étudier sa monotonie.
 - 3.3. Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - 4.1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$.
 - 4.2. En supposant que $\lim_n u_n$ existe, la calculer.
 - 4.3. Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.
 - 5.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
 - 5.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
 - 5.3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.
6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$.
 - 6.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
 - 6.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
 - 6.3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.
7. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n^2 - \frac{3}{4}$.
 - 7.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{3}{2}$.
 - 7.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
 - 7.3. Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.
8. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n^2 - 1$.
 - 8.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
 - 8.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
 - 8.3. Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.
9. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > \frac{15}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n^2 - \frac{15}{4}$.
 - 9.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{15}{2}$.
 - 9.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
 - 9.3. Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.
10. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2+u_n}$.
 - 10.1. Montrer que $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - 10.2. Montrer que (u_n) est une suite monotone.
 - 10.3. En étudier la convergence.
11. Étudier la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.
12. Étudier la suite (u_n) telle que $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.
13. Étudier la suite (u_n) telle que $0 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION. 1. 1.1. Par récurrence :

- ▷ $u_0 = 2 > 1$;
- ▷ soit $u_n > 1$, alors $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} > 2 - 1 = 1$.

1.2. Puisque $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n} < 0$, autrement dit la suite u_n est monotone décroissante. Étant une suite monotone décroissante vérifiant $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors elle converge et $\lim u_n = \ell \geq 1$. En passant à la limite dans la définition, on a $\ell = 2 - \frac{1}{\ell}$ d'où $\ell = 1$.

2. 2.1. Par récurrence :

- ▷ $-1 < u_0 = 1 < 2$;
- ▷ soit $-1 < u_n < 2$, alors $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} < \sqrt{2+2} = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} > \sqrt{2-1} = 1 > -1$.

2.2. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \sqrt{\ell+2}$ d'où $\ell = -1$ ou $\ell = 2$.

2.3. Puisque $-1 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n+2} - u_n = -\frac{u_n^2 - u_n - 2}{\sqrt{u_n+2} + u_n} = -\frac{(u_n-2)(u_n+1)}{\sqrt{u_n+2} + u_n} > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante. Étant une suite monotone croissante vérifiant $-1 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque les uniques limites réelles possibles sont $\ell = -1$ et $\ell = 2$, on conclut que $\lim u_n = 2$.

3. 3.1. Par récurrence :

- ▷ $u_0 > 2$;
- ▷ soit $u_n > 2$, alors $u_{n+1} = u_n^2 + 1 > 5$.

- 3.2. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 + 1$ qui n'a pas de solution réelle : la suite est alors divergente.
- 3.3. Puisque $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 > u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante. Étant une suite monotone croissante qui diverge, on conclut que $\lim u_n = +\infty$.
4. 4.1. Par récurrence :
 $\triangleright u_0 > 2$;
 $\triangleright$ soit $u_n > 2$, alors $u_{n+1} = u_n^2 - 2 > 4 - 2 = 2$.
- 4.2. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 - 1$ d'où $\ell = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 2$ ou $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$. Comme $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite diverge.
- 4.3. Puisque $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - 1 > u_n^2 - 2u_n - 1 = (u_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}) > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante. Étant une suite monotone croissante qui diverge, on conclut que $\lim u_n = +\infty$.
5. 5.1. Par récurrence :
 $\triangleright u_0 = 1 > 0$;
 $\triangleright$ soit $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2} > 0$.
- 5.2. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \frac{\ell}{1+\ell^2}$ d'où $\ell = 0$.
- 5.3. Puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = -\frac{u_n^3}{1+u_n^2} < 0$, autrement dit la suite u_n est monotone décroissante. Étant une suite monotone décroissante minorée par 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque l'unique limite réelle possible est $\ell = 0$, on conclut que $\lim u_n = 0$.
6. 6.1. Par récurrence :
 $\triangleright 0 < u_0 = 1/2 < 1$;
 $\triangleright$ soit $0 < u_n < 1$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2} > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2} < \frac{2}{2} = 1$.
- 6.2. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$ d'où $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.
- 6.3. Puisque $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n-1)}{2} < 0$, autrement dit la suite u_n est monotone décroissante. Étant une suite monotone décroissante minorée par 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque les uniques limites réelles possibles sont $\ell = 0$ et $\ell = 1$, on conclut que $\lim u_n = 0$.
7. 7.1. Par récurrence :
 $\triangleright u_0 > \frac{3}{2}$;
 $\triangleright$ soit $u_n > \frac{3}{2}$, alors $u_{n+1} = u_n^2 - \frac{3}{4} > \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.
- 7.2. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 - \frac{3}{4}$ d'où $\ell = -\frac{1}{2}$ ou $\ell = \frac{3}{2}$. Puisque $u_n > \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, seul $\ell = \frac{3}{2}$ est une limite finie acceptable.
- 7.3. Puisque $u_n > \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - \frac{3}{4} > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante. Étant une suite monotone croissante vérifiant $u_n > \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque l'unique limite réelle possible est $\ell = \frac{3}{2}$, on conclut que $\lim u_n = +\infty$.
8. 8.1. Par récurrence :
 $\triangleright u_0 > 2$;
 $\triangleright$ soit $u_n > 2$, alors $u_{n+1} = u_n^2 - 1 > 4 - 1 = 3 > 2$.
- 8.2. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 - 1$ d'où $\ell = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Puisque $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aucune limite finie n'est acceptable.
- 8.3. Puisque $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - 1 > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante. Étant une suite monotone croissante tel que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque il n'y a pas de limite finie réelle possible, on conclut que $\lim u_n = +\infty$.
9. 9.1. Par récurrence :
 $\triangleright u_0 > \frac{15}{2}$;
 $\triangleright$ soit $u_n > \frac{15}{2}$, alors $u_{n+1} = u_n^2 - \frac{15}{4} > 7\frac{15}{2} > \frac{15}{2}$.
- 9.2. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 - \frac{15}{4}$ d'où $\ell = -\frac{3}{2}$ ou $\ell = \frac{5}{2}$. Puisque $u_n > \frac{15}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aucune limite finie n'est acceptable.
- 9.3. Puisque $u_n > \frac{15}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - \frac{15}{4} > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante. Étant une suite monotone croissante tel que $u_n > \frac{15}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque aucune limite réelle finie n'est possible, on conclut que $\lim u_n = +\infty$.

10. 10.1. La propriété se démontre par récurrence. On a bien $u_0 = 4 > 1$. Il reste à démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $u_k > 1$ alors $u_{k+1} > 1$. On a

$$u_{k+1} > 1 \iff 3 - \frac{4}{u_k + 2} > 1 \iff \frac{4}{u_k + 2} < 2 \stackrel{u_k+2>0}{\iff} 2 < u_k + 2 \iff 0 < u_k.$$

Comme $u_k > 1 > 0$ alors $u_{k+1} > 1$.

- 10.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{4}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2} = 1 - u_n^2 < 0.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$, alors $1 - u_n^2 < 0$ donc (u_n) est une suite monotone décroissante.

- 10.3. On a montré que la suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) tend vers ℓ et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. La limite vérifie donc

$$\ell = 3 - \frac{4}{\ell + 2} \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

Comme $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut $\ell \geq 1$; on a donc $\ell = 2$.

11. **Suite bornée.** Par récurrence : on a bien $1 < u_0 = 2 < 4$; montrons que si $1 < u_k < 4$ alors $1 < u_{k+1} < 4$. On a

$$1 < u_{k+1} < 4 \iff 1 < 5 - \frac{4}{u_k} < 4 \iff 1 < \frac{4}{u_k} < 4 \iff 1 < u_k < 4.$$

Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 + 5u_n - 4}{u_n} = -\frac{(u_n - 4)(u_n - 1)}{u_n} > 0$$

car $1 < u_{n+1} < 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence. (u_n) est une suite monotone croissante et majorée. Elle est donc convergente.

Limite. Notons ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) tend vers ℓ et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. La limite vérifie donc

$$\ell = 5 - \frac{4}{\ell} \iff (\ell - 4)(\ell - 1) = 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

Comme $u_n < 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut $\ell \leq 4$; on a donc $\ell = 4$.

12. **Suite bornée.** Par récurrence : on a bien $u_0 = 9 > 4$; montrons que si $u_k > 4$ alors $u_{k+1} > 4$. On a

$$u_{k+1} > 4 \iff 5 - \frac{4}{u_k} > 4 \iff \frac{4}{u_k} < 1.$$

Comme $u_k > 4$, alors $\frac{4}{u_k} < 1$, donc $u_{k+1} > 4$.

Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 + 5u_n - 4}{u_n} = -\frac{(u_n - 4)(u_n - 1)}{u_n} < 0$$

car $u_{n+1} > 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence. (u_n) est une suite monotone décroissante et minorée. Elle est donc convergente.

Limite. Notons ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) tend vers ℓ et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. La limite vérifie donc

$$\ell = 5 - \frac{4}{\ell} \iff (\ell - 4)(\ell - 1) = 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

Comme $u_n > 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut $\ell \geq 4$; on a donc $\ell = 4$.

13. **Suite bornée.** Par récurrence : on a bien $0 < u_0 < 1$; montrons que si $0 < u_k < 1$ alors $0 < u_{k+1} < 1$. On a

$$0 < u_{k+1} < 1 \iff 0 < 5 - \frac{4}{u_k} < 1 \iff -4 < \frac{4}{u_k} < 5.$$

Comme $0 < u_k < 1$ alors $0 < \frac{4}{u_k} < 4$ donc $-4 < \frac{4}{u_k} < 5$.

Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 + 5u_n - 4}{u_n} = -\frac{(u_n - 4)(u_n - 1)}{u_n} < 0$$

car $0 < u_{n+1} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence. (u_n) est une suite monotone croissante et majorée. Elle est donc convergente.

Limite. Notons ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) tend vers ℓ et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. La limite vérifie donc

$$\ell = 5 - \frac{4}{\ell} \iff (\ell - 4)(\ell - 1) = 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

Comme $u_n < 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut $\ell \leq 4$; on a donc $\ell = 4$.

? Exercice 8.14 suite récurrente

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{a+1+u_n}{a}$. On pose $v_n := u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s_n := \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1} . En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (à préciser) pour laquelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. Montrer que pour tout $a \neq a_0$, la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. Calculer $\lim_n s_n$ en fonction des valeurs de a .
4. Montrer que $u_n = 1 + s_n \forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim_n u_n$ en fonction des valeurs de a .

SOLUTION. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{a+1+u_n}{a} - \frac{a+1+u_{n-1}}{a} = \frac{u_n - u_{n-1}}{a} = \frac{v_{n-1}}{a}.$$

On trouve la suite

$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 = \frac{a+1+1}{a} - 1 = \frac{2}{a}, \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{a}. \end{cases}$$

On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante égale à 2 lorsque $a = 1 =: a_0$.

2. Pour tout $a \neq a_0$

$$v_n = \frac{v_{n-1}}{a} = \frac{v_{n-2}}{a^2} = \dots = \frac{v_0}{a^n} = 2a^{-n}$$

donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1/a$.

3. On sait que si $w_{n+1} = qw_n$ pour tout $q \in \mathbb{R}^*$, alors $w_n = w_0 q^n$ et

$$\sum_{k=0}^n w_k = w_0 \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} w_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{si } q \neq 1 \\ w_0(n+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

donc ici

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \sum_{k=0}^{n-1} a^{-k} = \begin{cases} \frac{2}{a} \frac{1-a^{-n}}{1-a^{-1}}, & \text{si } a \neq 1 \\ 2n, & \text{si } a = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{a^n} \frac{a^n-1}{a-1}, & \text{si } a \neq 1, \\ 2n, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Par conséquent

$$\lim_n s_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a = 1, \\ \frac{2}{a-1} & \text{si } a > 1, \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

4. On a

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n - 1$$

donc $u_n = 1 + s_n \forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\lim_n u_n = 1 + \lim_n s_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a = 1, \\ \frac{a+1}{a-1} & \text{si } a > 1, \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

? Exercice 8.15 suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, c'est à dire telle que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_n (v_n - u_n) = 0$. Montrer que $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis que les deux suites convergent vers une même limite.

SOLUTION. On sait que (u_n) est croissante donc $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; (v_n) est décroissante donc $v_{n+1} \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; alors $v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_n - u_n$: la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Si $\ell_1 = \lim_n u_n$ et $\ell_2 = \lim_n v_n$ alors $\lim_n (v_n - u_n) = \ell_2 - \ell_1$; par hypothèse $\lim_n (v_n - u_n) = 0$ donc $\ell_1 = \ell_2$.

? Exercice 8.16 moyenne arithmético-harmonique

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 > b_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

1. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites bien définies puis que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > b_n.$$

2. Vérifier que la suite $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.
3. En supposant qu'elle existe, calculer la limite commune au deux suites.
4. Montrer que les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

SOLUTION. 1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n > b_n > 0$:

▷ vraie pour $n = 0$ car $a_0 > b_0 > 0$

▷ supposons que $a_n > b_n > 0$, alors $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} > 0$, ainsi $a_{n+1} > b_{n+1}$ et comme $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$ alors $b_{n+1} > 0$.

2. La suite $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, en effet

$$a_{n+1} b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n b_n = \dots = a_0 b_0$$

3. Si $\alpha = \lim_n a_n$ et $\beta = \lim_n b_n$, alors $\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$ donc $\alpha = \beta$. De plus, comme la suite $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante égale à $a_0 b_0$ et comme $\lim_n (a_n b_n) = \alpha \beta$ on conclut que $\alpha = \beta = \sqrt{a_0 b_0}$.

4. Les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. On peut soit prouver qu'elles sont adjacentes soit prouver directement la convergence.

▷ Montrons que $a_n \searrow$: $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} < 0$,

▷ montrons que $b_n \nearrow$: $b_{n+1} - b_n = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} - b_n = \frac{(a_n - b_n)b_n}{a_n + b_n} > 0$,

▷ montrons que a_n est minorée par b_0 : $a_n > b_n$ et $b_n > b_0$ car $b_n \nearrow$,

▷ montrons que b_n est majorée par a_0 : $b_n < a_n$ et $a_n < a_0$ car $a_n \searrow$,

▷ on conclut que a_n converge car décroissante et minorée, b_n converge car croissante et majorée. De plus, elles sont adjacentes.

? Exercice 8.17 moyenne géométrico-harmonique

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 > b_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent et ont même limite (appelée *moyenne géométrico-harmonique* de a_0 et b_0).

- SOLUTION.** 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \geq b_n$:
- ▷ vraie pour $n = 0$ car $a_0 > b_0 > 0$
 - ▷ supposons que $a_n > b_n > 0$, alors $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} > 0$, ainsi $a_{n+1} > b_{n+1}$.
2. Les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, en effet :
- ▷ $a_n \searrow$ car $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} < 0$,
 - ▷ $b_n \nearrow$ car $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})\sqrt{b_n} > 0$,
 - ▷ a_n converge car décroissante et minorée par b_0 car $a_n \geq b_n \geq b_0$,
 - ▷ b_n converge car croissante et majorée par a_0 car $b_n \leq a_n \leq a_0$.
3. Si $\alpha = \lim_n a_n$ et $\beta = \lim_n b_n$, alors $\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$ donc $\alpha = \beta$.

? Exercice 8.18

1. Donner l'exemple d'une suite non bornée (donc non convergente).
2. Donner l'exemple d'une suite bornée non convergente.
3. Donner l'exemple de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ diverge.
4. Donner l'exemple de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ converge.
5. Donner l'exemple de deux suites bornées $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que (u_n) ne converge pas, (v_n) ne converge pas, mais $(u_n v_n)$ converge.

SOLUTION. 1. $u_n = n$

2. $u_n = (-1)^n$
3. $u_n = 1/n$ et $v_n = n^2$
4. $u_n = 1/n^2$ et $v_n = n$.
5. $u_n = v_n = (-1)^n$

? Exercice 8.19

Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants

$$(1) \quad u_n := (-1)^n, \quad (2) \quad u_n := \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{n}}, \quad (3) \quad u_n := \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

SOLUTION. (1) $\{-1; 1\}$

(2) $\{-1; 1\}$

(3) $\{-1; 0; 1\}$

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Limite en plus l'infini

Si $D_f \cap]\delta, +\infty[\neq \emptyset$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$) si

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies f(x) < m.$$

Limite en moins l'infini

Les définitions sont du même type que ci-dessus. Il faut simplement remplacer $D_f \cap]\delta, +\infty[\neq \emptyset$ par $D_f \cap]-\infty, \delta[\neq \emptyset$ puis $x > \delta$ par $x < \delta$.

Limite en un point

Si $D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$ alors on dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Cette limite peut exister même si f n'est pas définie en x_0 . Mais si f est définie en x_0 et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, alors

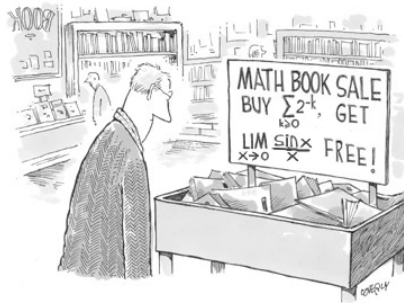
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$) si

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < m.$$



Théorème (unicité)

Si une fonction admet une limite ℓ en x_0 , cette limite est unique.

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes ou sandwich ou de l'étau)

Soit f , g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et vérifiant $f \leq g \leq h$ au voisinage de x_0 . Si f et h ont la même limite ℓ (finie ou infinie) en x_0 alors g a pour limite ℓ en x_0 .

Limites fondamentales

Soit deux polynômes $P(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_ax^a$ et $Q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_bx^b$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b, \\ \frac{p_a}{q_b} & \text{si } a = b, \\ \infty & \text{si } a > b, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_0}{q_0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad (x \text{ en radian})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (x \text{ en radian})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} (1 + \alpha x)^{1/x} = e^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(a^{1/x} - 1 \right) = \ln a$$

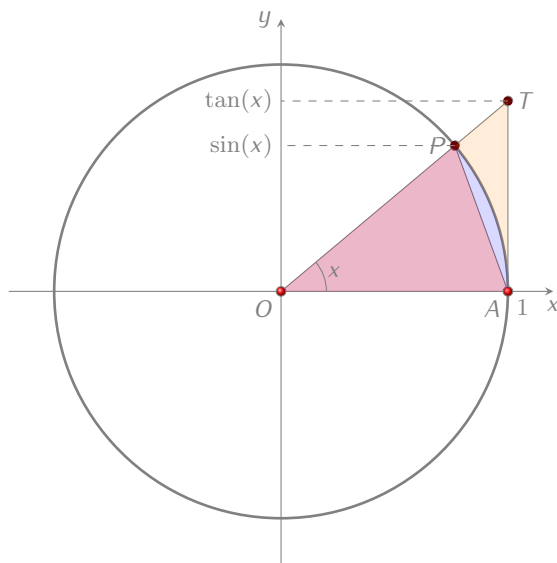
$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1 \right) = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exemple

On veut montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.



L'observation des aires des triangles $\triangle OAP$, $\triangle OAT$ et du secteur OAP lorsque $0 < x < \frac{\pi}{2}$ conduit aux inégalités

$$\text{Aire } \triangle OAP < \text{Aire secteur } OAP < \text{Aire } \triangle OAT.$$

Soit $|OA| = 1$, alors l'aire du triangle $\triangle OAP$ est $\sin(x)/2$, l'aire du secteur OAP est égale à $x/2$ et l'aire du triangle $\triangle OAT$ est $\tan(x)/2$, donc

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan(x)}{2}.$$

Lorsque $0 < x < \frac{\pi}{2}$ on peut diviser par $2/\sin(x)$ en conservant le sens des inégalités

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

soit encore

$$1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x).$$

Les fonctions $\sin(x)/x$ et $\cos(x)$ étant paires, les mêmes inégalités restent satisfaites lorsque $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. En prenant la limite de ces inégalités lorsque $x \rightarrow 0$ on conclut que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Continuité en un point

On dit que f est continue en x_0 si $x_0 \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Continuité

On dit que f est continue si elle est continue dans tout point de son domaine de définition.

Par conséquent la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue car $D_f = \mathbb{R}^*$ et f est continue dans tout point de son domaine de définition.

Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \notin I$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par $\tilde{f}(x_0) = \ell$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$ est la seule fonction continue en x_0 dont la restriction à I soit f . On l'appelle le prolongement par continuité de f à x_0 .

Théorème (fonctions composées)

Si $(x_0, f(x_0)) \in D_f \times D_g$ et f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $x_0 \in D_{g \circ f}$ et $g \circ f$ est continue en x_0 .

Théorème (valeurs intermédiaires)

Formulation 1 L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Formulation 2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soient $a, b \in I$ avec $f(a) \leq f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. Autrement dit :

$$\forall d \in [f(a), f(b)], \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

Exemple

Ce théorème permet d'affirmer par exemple que si un marcheur parcourt 12 Km en une heure alors il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 6 Km. En effet, soit $f: [0; 1] \rightarrow [0; 12]$ l'application telle que $f(t)$ soit le nombre de kilomètres parcourus par le marcheur en t heures (on suppose que f est continue). On se demande s'il existe $T \in [0; 0.5]$ tel que $f(T + 0.5) - f(T) = 6$. Posons alors $g: [0; 0.5] \mapsto [0; 12]$ l'application définie par $g(t) = f(t + 0.5) - f(t)$. Comme $6 \in [0; 12]$ et g est continue, alors il existe au moins un $T \in [0; 0.5]$ tel que $g(T) = 6$: pendant la demi-heure $[T, T + 0.5]$ le marcheur a parcouru 6 Km.

Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur I , monotone sur I et de même sens de variation que f .

Dans un repère orthonormé, les graphes de f et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.

Comparaison au voisinage d'un point

Soit f et g deux fonctions définies sur I et soit x_0 un point (fini ou infini) appartenant à I ou une extrémité de I .

- ▷ On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 , et on écrit $f = O(g)$, s'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ pour tout x d'un voisinage de x_0 . Si g ne s'annule pas dans ce voisinage, cela signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée dans ce voisinage.
- ▷ On dit que f est négligeable devant g ou que g est prépondérant devant f au voisinage de x_0 , et on écrit $f = o(g)$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage de x_0 tel que $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ pour tout x de ce voisinage. Si g ne s'annule pas dans ce voisinage, cela signifie que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Asymptotes

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de f .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$), la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f .

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$), la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe représentative de f .

? Exercice 9.1

Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m , l'évolution de sa température est donnée par $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?

SOLUTION. $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = T_m$.

? Exercice 9.2

En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de $g \text{ m s}^{-2}$. Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$. En présence d'un frottement, la masse subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle du frottement laminaire, la force de frottement est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Quelle est la limite de cette fonction pour $t \rightarrow +\infty$?

SOLUTION. $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg}{\mu}$.

? Exercice 9.3

La force d'attraction entre deux masses est donnée par la loi de Newton $F(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ où F est la force d'attraction (en newtons), $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ est une constante universelle, r est la distance (en mètres) entre les masses et m_1 et m_2 sont les masses. Soit la masse de la Terre $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ et celle, approximative, d'un satellite 10^4 kg .

1. À partir de quelle distance la force exercée par la Terre sur le satellite est-elle inférieure à 10 N ?
2. Inférieure à 1 N ?
3. Inférieure à 0.01 N ?
4. Inférieure à $\varepsilon > 0$?
5. Que vaut la limite $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r)$?

SOLUTION. 1. À partir de $r = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{10}}$ mètres la force exercée par la Terre sur le satellite est inférieure à 10 N .

2. À partir de $r = \sqrt{Gm_1m_2}$.
3. À partir de $r = \sqrt{10Gm_1m_2}$.
4. À partir de $r = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{\varepsilon}} \approx \frac{2 \times 10^9}{\varepsilon} \text{ m}$.
5. $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0$.

? Exercice 9.4

Dans le modèle de croissance de population de Verhulst la taille de la population est donnée par

$$P(t) = P_m \frac{e^{rP_m t}}{K + e^{rP_m t}}$$

où K , r et P_m désignent des constantes positives. Trouvez la limite de $P(t)$ pour $t \rightarrow +\infty$.

SOLUTION. $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_m \frac{1}{\frac{K}{e^{rP_m t}} + 1} = P_m$.

? Exercice 9.5

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{llll}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \sin(x), & \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin(x), \\
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \cos(x), & \lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cos(x), \\
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right), & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \tan(x), & \lim_{x \rightarrow 0} x \tan\left(\frac{1}{x}\right), & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \tan(x).
\end{array}$$

SOLUTION.

$$\begin{array}{ll}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 & \\
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \sin(x) = 0 & \text{(théorème d'encadrement, } -1 \leq \sin(x) \leq 1) \\
\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 & \text{(théorème d'encadrement, } -1 \leq \sin(x) \leq 1) \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin(x) = 1 & \\
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\infty & \\
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \cos(x) = 0 & \text{(théorème d'encadrement, } -1 \leq \cos(x) \leq 1) \\
\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 & \text{(théorème d'encadrement, } -1 \leq \cos(x) \leq 1) \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cos(x) & \text{n'existe pas car } \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x} \cos(x) = \pm\infty \\
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right) = 1 & \\
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \tan(x) & \text{n'existe pas} \\
\lim_{x \rightarrow 0} x \tan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{n'existe pas} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \tan(x) = 1 &
\end{array}$$

? Exercice 9.6

Calculer les limites suivantes avec la méthode que l'on préfère :

$$\begin{array}{lll}
1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}), & 3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - \cos x}{x}, & 5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{4x - 12}. \\
2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{\ln x}, & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1+2x)}{2 \sin(x)(\cos(3x) - 1)}, &
\end{array}$$

SOLUTION.

$$\begin{array}{l}
1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0^+; \\
2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x} + \frac{\sin x}{\ln x} \right) = +\infty \text{ car } \frac{-1}{\ln x} \leq \frac{\sin x}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pm 1}{\ln x} = 0; \\
3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - 1 + 1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x - 1}{x} + x \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \ln(2) + 0 \cdot \frac{1}{2} = \ln(2),
\end{array}$$

4. En se rappelant que $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ on conclut que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1+2x)}{2 \sin(x)(\cos(3x)-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{x}{\sin(x)} \times \frac{(3x)^2}{\cos(3x)-1} \times \frac{1}{9} \right) = 1 \times 1 \times (-2) \times \frac{1}{9} = -\frac{2}{9};$$

5. Comme $\frac{x^2 - 4x + 3}{4x - 12} = \frac{(x-1)(x-3)}{4(x-3)} = \frac{x-1}{4}$ alors $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{4x - 12} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$.

? Exercice 9.7

Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes

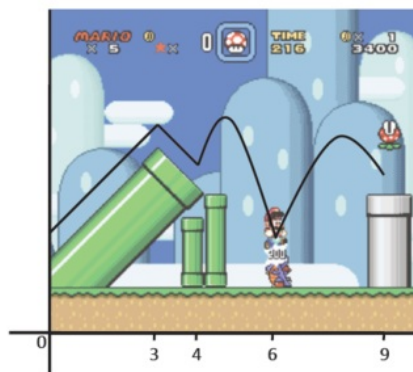
$$f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) := \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}.$$

SOLUTION.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1 \right)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x^3}}}} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

? Exercice 9.8



Mario is running and jumping to the right in level 1 of Super Mario World. When his horizontal position is x , his height $h(x)$ is given by the following branch function:

$$h(x) := \begin{cases} x+3, & 0 \leq x < 3 \\ 9-x, & 3 \leq x < 4 \\ -4x^2+39x-87, & 4 \leq x < 6 \\ -x^2+16x-57, & 6 \leq x \leq 9 \end{cases}.$$

Prove that Mario's path is continuous on the interval $[0, 9]$. That is, check that the function $h(x)$ is continuous at $x = 3, 4$, and 6 .

SOLUTION. TO DO

? Exercice 9.9 *discontinuité de première espèce*

Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

SOLUTION. On ne peut pas définir une application $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1.$$

? Exercice 9.10 *discontinuité de seconde espèce*

Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f(x) := \sin \frac{1}{x}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

SOLUTION. La limite de $f(x)$ pour x qui tend vers 0 n'existe pas.

? Exercice 9.11 *fonction prolongeable par continuité*

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f(x) := x \sin \frac{1}{x}.$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

SOLUTION. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, on peut définir la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

qui est continue.

? Exercice 9.12

Étudier la continuité de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) := \begin{cases} \lim_n \frac{x^n + 1}{x^n - 1} & \text{si } |x| \neq 1, \\ 1 & \text{si } |x| = 1. \end{cases}$$

SOLUTION. Comme

$$\lim_n \frac{x^n + 1}{x^n - 1} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x < -1, \\ -1 & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

on obtient que le domaine de définition de la fonction f est $[-1; +\infty]$ et elle peut se réécrire comme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = -1, \\ -1 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On conclut qu'elle n'est pas continue en $x = -1$ et en $x = 1$.

? Exercice 9.13

Étudier, en fonction des deux paramètres réels n et m , si f est prolongeable en 0

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$

SOLUTION. En faisant intervenir l'expression conjuguée on réécrit la fonction sous la forme

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} \frac{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}}.$$

L'étude de la limite en 0 est alors le même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n, \\ 1 & \text{si } m = n, \\ +\infty & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ est pair,} \\ +\infty & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ est impair,} \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n, \\ 1 & \text{si } m = n, \\ +\infty & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ est impair.} \end{cases}$$

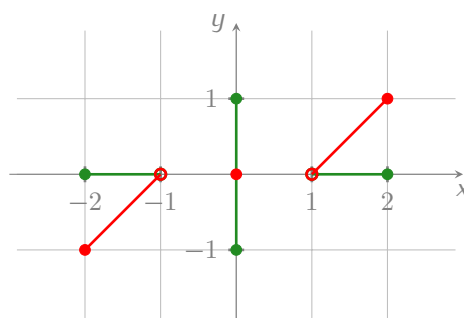
? Exercice 9.14

Soient $E := [-2, -1[\cup \{0\} \cup]+1, +2]$ et $F := [-1, +1]$. Soit f l'application de E dans F définie par

$$\forall x \in E \quad f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-2, -1[, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x-1 & \text{si } x \in]+1, +2]. \end{cases}$$

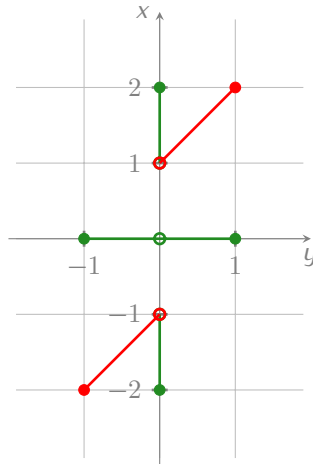
Montrer que f est bijective et continue en tout point de E mais qu'il existe un point de F en lequel f^{-1} n'est pas continue.

SOLUTION. f est clairement bijective car pour tout $x \in E$ il existe un et un seul $y \in F$ tel que $f(x) = y$



et est continue. De plus on a

$$\forall y \in F \quad f^{-1}(y) := \begin{cases} y - 1 & \text{si } y \in [-1, 0[, \\ 0 & \text{si } y = 0, \\ y + 1 & \text{si } y \in]0, +1]. \end{cases}$$



La réciproque n'est pas continue car

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} f^{-1}(y) = \pm 1 \neq f^{-1}(0) = 0.$$

? Exercice 9.15

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

SOLUTION. Elle est continue car $\frac{\sin x}{x}$ est continue pour $x \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$.

? Exercice 9.16

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

SOLUTION. Elle est continue car $x^2 \sin \frac{1}{x}$ est continue pour $x > 0$, $x \cos \frac{1}{x}$ est continue pour $x < 0$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0), \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cos \frac{1}{x} = 0 = f(0). \end{aligned}$$

? Exercice 9.17

1. Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Établir si f est continue.

2. Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Établir si f est continue.

3. Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Établir si f est continue.

4. Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}.$$

4.1. Montrer que f est continue.

4.2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

4.3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5. Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x - 1 - \ln |x|.$$

5.1. Calculer les limites de f en 0, en $-\infty$ et en $+\infty$.

5.2. Établir si f est prolongeable par continuité en 0.

SOLUTION. 1. À partir des inégalités $-x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{x} \leq x^2$ et en utilisant le théorème de l'encadrement on déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = f(0) = 0$ donc f est continue en 0.

2. À partir des inégalités $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$ et en utilisant le théorème de l'encadrement on déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = f(0) = 0$ donc f est continue en 0.

3. À partir des inégalités $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$ et en utilisant le théorème de l'encadrement on déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} -x \sin \frac{1}{x} = f(0) = 0$ donc f est continue en 0.

4. 4.1. La fonction $1/x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. En composant par la fonction exponentielle qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{1/x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. De même, la fonction $1 + e^{1/x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction f , qui est le quotient de x et $1 + e^{1/x}$, est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ sauf en les points où le dénominateur s'annule. Comme $1 + e^{1/x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on conclut que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

4.2. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, on peut prolonger par continuité f en 0 en posant $f(0) = 0$.

4.3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5. 5.1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1 - \ln(-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(-x)}{x} \right) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

5.2. f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

? Exercice 9.18

1. Établir si la fonction

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \frac{\sin(x)}{x}, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est prolongeable par continuité en 0.

2. Établir si la fonction

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x > 0, \\ x \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est prolongeable par continuité en 0.

3. Établir si la fonction

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

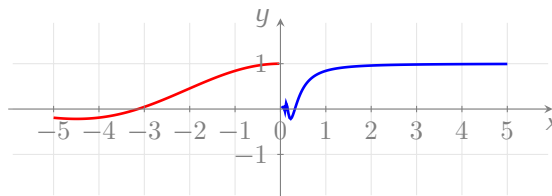
est prolongeable par continuité en 0.

SOLUTION. 1. Étant donné que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad (\text{on a utilisé le théorème d'encadrement})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad (\text{on a utilisé une limite connue})$$

la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$.

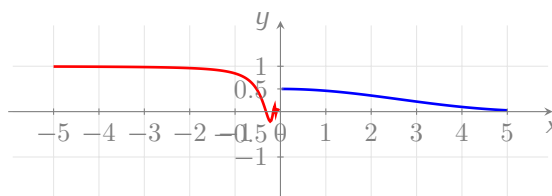


2. Étant donné que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad (\text{on a utilisé une limite connue})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad (\text{on a utilisé le théorème d'encadrement})$$

la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$.

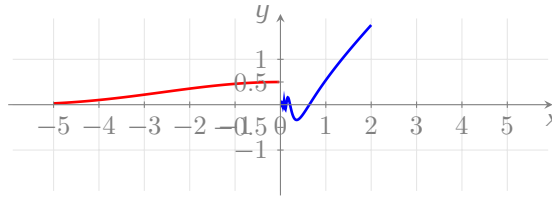


3. Étant donné que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos \frac{1}{x} = 0, \quad (\text{on a utilisé le théorème d'encadrement})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad (\text{on a utilisé une limite connue})$$

la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$.



? Exercice 9.19

Soit f l'application définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln |x|}{x-1} & \text{si } x \notin \{0, 1\}, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Est-elle continue ?

SOLUTION. En utilisant les propriétés générales sur les domaines de définition de la somme, du produit, du quotient et de la composition de fonctions, on obtient aisément que la fonction $x \mapsto \frac{x \ln |x|}{x-1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln |x|}{x-1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln |x|}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} (t+1) \frac{\ln |1+t|}{t} = 1$: la fonction f est donc continue.

? Exercice 9.20

1. Dire si l'application $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1 . Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Dire si l'application $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1 . Donner le prolongement par continuité le cas échéant.

SOLUTION. 1. On a $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{x-1}$ donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \pm\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1 mais elle est prolongeable par continuité en -1 et ce prolongement vaut $-1/2$.

2. On a $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x}$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^\pm} f(x) = \mp\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en -1 mais elle est prolongeable par continuité en 1 et ce prolongement vaut $-1/2$.

? Exercice 9.21 application du théorème de la bijection

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - 2 + \ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique qu'on notera a .
2. Soit g la bijection réciproque de f . Étudier monotonie et continuité de g en précisant son comportement aux bornes du domaine de définition.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

SOLUTION. 1. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ donc f est monotone croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $f(\mathbb{R}_+^*) =]\lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= \mathbb{R}$. Comme $0 = \inf(\mathbb{R}_+^*)$ on déduit qu'il existe un et un seul $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(a) = 0$. On peut donc conclure que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

2. Comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, la bijection réciproque g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Sachant que f est continue et monotone croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut en déduire que g est continue et monotone croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

3. $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

? Exercice 9.22

Soit f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

SOLUTION. On considère la fonction

$$h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - g(x)$$

On remarque que $h(a) < 0$ et $h(b) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $h(x_0) = 0$. Comme $h(a) < 0$ et $h(b) > 0$, alors $x_0 \in]a, b[$. Comme $h(x_0) = 0$ alors $f(x_0) = g(x_0)$.

? Exercice 9.23

Soit f une fonction continue et injective de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que f est strictement monotone.

SOLUTION. On considère trois points x_i tels que $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$. Supposons par absurde que $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, si on considère l'intervalle $I = [f(x_2), \min f(x_1), f(x_3)]$, pour tout $u \in I$ il existe $s \in]x_1, x_2[$ et $t \in]x_2, x_3[$ tels que $f(s) = u = f(t)$. Puisque f est injective, $s = t$, en contradiction avec le fait que $x_1 < s < x_2 < t < x_3$.

? Exercice 9.24

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (un tel point est appelé *point fixe* de f).

SOLUTION. Si $f(0) = 0$ alors $\alpha = 0$ est solution du problème.

Si $f(1) = 1$ alors $\alpha = 1$ est solution du problème.

Supposons $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1$. Soit g la fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x) - x$. Comme $f(0) > 0$ alors $g(0) > 0$. Comme $f(1) < 1$ alors $g(1) < 0$. Or g est continue sur $[0, 1]$ donc il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $g(\alpha) = 0$, ce qui implique $f(\alpha) = \alpha$.

? Exercice 9.25 application du théorème des valeurs intermédiaires

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

SOLUTION. Soit le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ avec n impair. Si $a_n > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$; P étant une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$. De même, si $a_n < 0$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$; P étant une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

? Exercice 9.26

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 16 = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ sans résoudre l'équation.
2. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 16 = 0$ sur l'intervalle $] -\infty, 0[$ sans résoudre l'équation.
3. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2 - \sqrt{2} = 0$ sur l'intervalle $] -\infty, 0[$ sans résoudre l'équation.

SOLUTION. Les énoncés du *théorème des valeurs intermédiaires* suivants sont équivalents :

- ▷ Si f est définie et continue en tout point d'un intervalle I alors pour tout sous-intervalle J de I , l'image $f(J)$ est un intervalle.
- ▷ L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- ▷ Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a, b \in I$ avec $f(a) \leq f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$; plus précisément :

$$\forall d \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

1. On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - 16$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0, -16)$, la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus $f(0) = -16$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Par conséquent, la fonction f , strictement croissante sur $]0; +\infty[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \rightarrow +\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - 16$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0, -16)$, la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$. De plus $f(0) = -16$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Par conséquent, la fonction f , strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \rightarrow -\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.
3. On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - \sqrt{2}$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0, -\sqrt{2})$, la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$. De plus $f(0) = -\sqrt{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Par conséquent, la fonction f , strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \rightarrow -\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.

? Exercice 9.27 application du théorème des valeurs intermédiaires

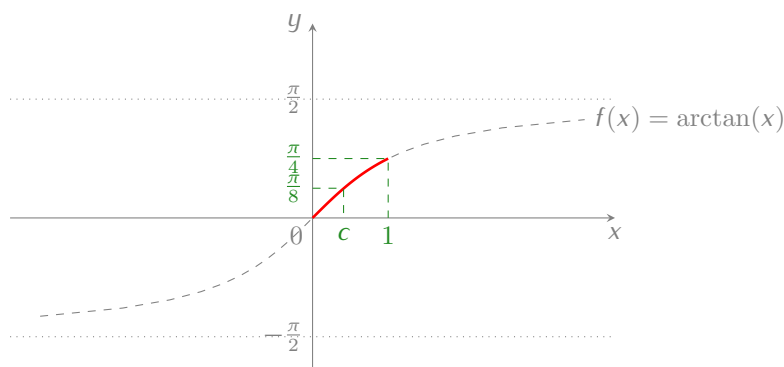
⚡ Combien de solutions a-t-elle l'équation $x^3 - \sqrt{\pi} = 0$ dans $]0, +\infty[$.

SOLUTION. Soit $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi} = 0$. f est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Elle est strictement croissante, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\sqrt{\pi} < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un et un seul $c \in]0, +\infty[$ tel que $f(c) = 0$ et ce c est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

? Exercice 9.28

⚡ Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $\arctan(x) = \pi/8$, puis qu'il est unique. Déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

SOLUTION. Rappelons le théorème des valeurs intermédiaires : *soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.* Comme la fonction $\arctan$ est définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $] -\pi/2, \pi/2[$, elle est donc continue sur l'intervalle $[0; 1]$. Puisque $\pi/8$ est compris entre $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \pi/4$, alors il existe un $c \in [0, 1]$ tel que $\arctan(c) = \pi/8$. De plus, la fonction $\arctan$ est monotone croissante donc ce c est unique.



Dichotomie :

k	a_k	b_k	x_k	$\text{erreur}_k \leq$
1	0	1	$1/2$	1
2	0	$1/2$	$1/4$	$1/2$
3	$1/4$	$1/2$	$3/8$	$1/4$
4	$3/8$	$1/2$	$7/16$	$1/8$



Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dérivabilité en un point

On dit que f est dérivable en x_0 si f est définie en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 et si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe dans $\mathbb{R}$. Lorsque cette limite existe, elle est notée $f'(x_0)$.

Nota bene

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 . Attention, la réciproque est fautive : par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Tangente

f dérivable en x_0 signifie que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. Son équation est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Théorème (fonctions composées)

Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

Théorème (fonctions réciproques)

Si f est continue strictement monotone sur un intervalle I , dérivable en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$ alors la réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Sens de variation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I .

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
3. f est constante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) = 0$.

4. Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I .
5. Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I .



Dérivées successives

Soit f dérivable sur E . Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit par récurrence la dérivée n -ième, ou dérivée d'ordre n , de f en posant $f^{(0)} = f$ puis $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur E .

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur E , et on écrit $f \in \mathcal{C}^n(E)$, lorsque f est n fois dérivable sur E et $f^{(n)}$ est continue sur E .



Théorème (accroissements finis)

Si f est continue en tout point d'un intervalle fermé $[a, b]$ (avec $a < b$) et dérivable en tout point de $]a, b[$ alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

? Exercice 10.1

Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de Van der Waals qui s'écrit $P(V) = nRT/(V - nb) - an^2/V^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P' .

SOLUTION. $P'(V) = -nRT/(V - nb)^2 + 2an^2/V^3$.

? Exercice 10.2

Trouver la vitesse au temps $t = 2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t) = A \cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A ?

SOLUTION. $x'(t) = -2\pi\omega A \sin(2\pi\omega t)$. Lorsque l'amplitude double, la vitesse double.

? Exercice 10.3

Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de 10 m s^{-1} . S'il se trouve initialement au sol à une distance de 200 m d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur lorsque l'angle d'élévation est égal à $\pi/4$?

SOLUTION. $h(t) = 10t$ et $\frac{h(t)}{200} = \tan(\vartheta(t))$ donc $\vartheta(t) = \arctan \frac{t}{20}$ et $\vartheta'(t) = \frac{20}{400+t^2}$. Si $\bar{t}$ est l'instant tel que $\vartheta(\bar{t}) = \pi/4$, alors $\bar{t} = 20 \tan(\pi/4) = 20$ et $\vartheta'(\bar{t}) = \frac{20}{400+400} = \frac{1}{40}$ radians par second.

? Exercice 10.4

Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de 10 m s^{-1} . S'il se trouve initialement au sol à une distance de 100 m d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur après 10 s?

SOLUTION. $h(t) = 10t$ et $\frac{h(t)}{100} = \tan(\vartheta(t))$ donc $\vartheta(t) = \arctan \frac{t}{10}$ et $\vartheta'(t) = \frac{10}{100+t^2}$ et $\vartheta'(10) = \frac{1}{20}$ radians par second.

? Exercice 10.5

Une masse tombe avec une accélération constante a . Comment évolue sa vitesse?

SOLUTION. $v(t) = at + v(0)$.

? Exercice 10.6

Quelle accélération constante (en m s^{-2}) un véhicule doit-il avoir pour passer d'une vitesse de 0 km h^{-1} à une vitesse de 100 km h^{-1} en 10 s?

SOLUTION. $100 \text{ km h}^{-1} = 100\,000/3600 \text{ m s}^{-1} = 1000/36 \text{ m s}^{-1}$ donc $a = (1000/36 - 0)/10 \text{ m s}^{-2} = 100/36 \text{ m s}^{-2}$.

? Exercice 10.7

Une ligne de téléphone relie deux pylônes distants de 14 m. Les sommets des pylônes se trouvent aux points $(-7, 0)$ et $(7, 0)$. La ligne décrit une courbe d'équation $y = 8(\cosh(x/7) - \cosh 1)$. Trouver l'angle entre le pylône

↖ et la tangente à la ligne au point d'attache.

SOLUTION. $y' = \frac{8}{7} \sinh(x/7)$. L'angle entre le pylône et la tangente à la ligne au point d'attache est égal à $\frac{8}{7} \sinh(-1) \approx -1.3431$ radians.

? Exercice 10.8

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x < 0, \\ x^2 |x - 1| & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.
Dans la suite ce prolongement sera encore noté f .
2. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$, puis $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[$, puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.
4. Calculer $f'(0)$.
5. Étudier la dérivabilité de f dans $\mathbb{R}$.

SOLUTION. TO DO

? Exercice 10.9

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \frac{\sin(x)}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.
Dans la suite ce prolongement sera encore noté f .
2. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$, puis $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.
4. Calculer $f'(0)$.
5. Étudier la dérivabilité de f dans $\mathbb{R}$.

SOLUTION. TO DO

? Exercice 10.10

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$?
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

SOLUTION. TO DO

? Exercice 10.11

Calculer les limites suivantes (on pourra par exemple utiliser la règle de L'Hôpital)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln(x)}{x - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x),$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x)}{x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(ax)}{x^2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}.$$

SOLUTION. $\triangleright$ Soient $f(x) = \sin(\pi x)$ et $g(x) = \ln x$; alors $f'(x) = \pi \cos(\pi x)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (\pi x) \cos(\pi x) = -\pi$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)} = -\pi.$$

$\triangleright$ Soient $f(x) = 2 \ln x$ et $g(x) = x - 1$; alors $f'(x) = \frac{2}{x}$, $g'(x) = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln(x)}{x - 1} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x} = 2$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln(x)}{x - 1} = 2.$$

$\triangleright$ Soient $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$; alors $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$\triangleright$ Soient $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \frac{1}{x}$; alors $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \frac{-\infty}{+\infty}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0.$$

$\triangleright$ Soient $f(x) = \sin(\pi x)$ et $g(x) = x - 2$; alors $f'(x) = \pi \cos(\pi x)$, $g'(x) = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x)}{x - 2} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \pi \cos(\pi x) = \pi$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x)}{x - 2} = \pi.$$

$\triangleright$ $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$. Soient $f(x) = 1 - \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$; alors $f'(x) = \sin(x)$, $g'(x) = \cos(x)$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)} \right) = 0.$$

$\triangleright$ Soient $f(x) = x$ et $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$; alors $f'(x) = 1$, $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1 - x}}$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} -2\sqrt{1 - x} = -2$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} = -2.$$

▷ $\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$. Soient $f(x) = x - \sin(x)$ et $g(x) = x \sin(x)$; alors $f'(x) = 1 - \cos(x)$, $g'(x) = \sin(x) + x \cos(x)$, $f''(x) = \sin(x)$, $g''(x) = 2 \cos(x) - x \sin(x)$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x \cos(x)} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2 \cos(x) - x \sin(x)} = 0$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

▷ Soient $f(x) = 1 - \cos(ax)$ et $g(x) = x^2$; alors $f'(x) = a \sin(ax)$, $g'(x) = 2x$, $f''(x) = a^2 \cos(ax)$, $g''(x) = 2$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin(ax)}{2x} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \cos(ax)}{2} = \frac{a^2}{2}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}.$$

▷ Soient $f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$ et $g(x) = x^5$; alors $f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$, $g'(x) = 5x^4$, $f''(x) = -\sin(x) + x$, $g''(x) = 20x^3$, $f'''(x) = -\cos(x) + 1$, $g'''(x) = 60x^2$, $f^{(iv)}(x) = \sin(x)$, $g^{(iv)}(x) = 120x$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(iv)}(x)}{g^{(iv)}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{120x} = \frac{1}{120}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{120}.$$

? Exercice 10.12 application du théorème des accroissements finis

Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 Km/h. Quand il ressort, deux heures plus tard et à 305 Km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait été jamais matériellement contrôlée. Ont-ils raison?

SOLUTION. TO DO

? Exercice 10.13

Soit $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0, 1, 2, 3$, répondre aux questions suivantes :

- ▷ f_α est-elle continue en $x = 0$?
- ▷ f_α est-elle dérivable en $x = 0$?
- ▷ f_α est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

SOLUTION. **Cas $\alpha = 0$:** $f_0(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ▷ f_0 n'est pas continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ n'existe pas.
- ▷ f_0 n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas continue en 0.
- ▷ f_0 n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car elle n'est pas continue en 0.

Cas $\alpha = 1$: $f_1(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ▷ f_1 est continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0 = f_1(0)$ (il suffit d'observer que $-x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x$).
- ▷ f_1 n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ n'existe pas.
- ▷ f_1 n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car elle n'est pas dérivable en 0.

Cas $\alpha = 2$: $f_2(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ▷ f_2 est continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0 = f_2(0)$ (il suffit d'observer que $-x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{x} \leq x^2$).
- ▷ f_2 est dérivable en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$ (il suffit d'observer que $-x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x$).
- ▷ f_2 n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car

$$f'_2(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et $\lim_{x \rightarrow 0} f'_2(x)$ n'existe pas (car $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas).

Cas $\alpha = 3$: $f_3(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ▷ f_3 est continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) = 0 = f_3(0)$ (il suffit d'observer que $-x^3 \leq x^3 \cos \frac{1}{x} \leq x^3$). De plus, elle est continue dans tout $\mathbb{R}$.
- ▷ f_3 est dérivable en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$ (il suffit d'observer que $-x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{x} \leq x^2$).
- ▷ f_3 est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car

$$f'_3(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et $\lim_{x \rightarrow 0} f'_3(x) = 0 = f'_3(0)$.

Donc on a

α	f est-elle continue en $x = 0$?	f est-elle dérivable en $x = 0$?	f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?
0	Non	Non	Non
1	Oui	Non	Non
2	Oui	Oui	Non
3	Oui	Oui	Oui

? Exercice 10.14

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Établir si f est continue en $x = 0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. Établir si f est dérivable en $x = 0$.
4. Établir si f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

SOLUTION. 1. La fonction est clairement continue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cos \frac{1}{x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0, \end{aligned}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.

2. Pour $x \neq 0$ la fonction est clairement dérivable et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La droite tangente à f en $x = x_0$ a équation $y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0 = \frac{1}{\pi}$ on a $y = -\frac{3}{\pi^2}x + \frac{2}{\pi^3}$.

3. La fonction est dérivable en $x = 0$ ssi existe finie la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0,\end{aligned}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$: f est dérivable en 0 et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

4. f' est clairement continue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ on a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x} \right) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \right) = 0,\end{aligned}$$

donc f' est continue en 0. Par conséquent f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

? Exercice 10.15

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$?
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

SOLUTION. 1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln x = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.

$$2. f'(x) = \begin{cases} x(2 \ln x + 1), & \text{si } x > 0, \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La droite tangente à f en $x = x_0$ a équation $y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0 = 1$ on a $y = x - 1$.

3. La fonction est dérivable en $x = 0$ ssi existe finie la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 \ln x - 0}{x - 0} = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x - 0} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = f'(0)$: f est dérivable en 0.

4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x(2 \ln x + 1) = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, donc f' n'est pas continue en 0. Par conséquent f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.



Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$?
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

SOLUTION. 1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.

$$2. f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La droite tangente à f en $x = x_0$ a équation $y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0 = \frac{1}{\pi}$ on a $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{1}{\pi^2}$.

3. La fonction est dérivable en $x = 0$ ssi il existe fini la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = f'(0)$: f est dérivable en 0.

4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x})$ n'existe pas, donc f' n'est pas continue en 0. Par conséquent f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 10.17

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$?
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

SOLUTION. 1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.

$$2. f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La droite tangente à f en $x = x_0$ a équation $y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0 = \frac{1}{\pi}$ on a $y = x - \frac{1}{\pi^2}$.

3. La fonction est dérivable en $x = 0$ ssi il existe fini la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = f'(0)$: f est dérivable en 0.

4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$ n'existe pas, donc f' n'est pas continue en 0. Par conséquent f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

? Exercice 10.18

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ le cas échéant.
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

SOLUTION. 1. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ (théorème d'encadrement), la fonction est continue en 0.

2. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'équation de la droite tangente à f en $x = 1$ est donc $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(\cos(1) + \sin(1))(x - 1) + \cos(1)$.

3. f est dérivable en $x = 0$ et on a $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - 0}{x} = 0$ (théorème d'encadrement). L'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ est donc $y = f'(0)x + f(0) = 0$.

4. f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas.

? Exercice 10.19

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ le cas échéant.
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

SOLUTION. 1. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ (théorème d'encadrement), la fonction est continue en 0.

2. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'équation de la droite tangente à f en $x = 1$ est donc $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(\sin(1) - \cos(1))(x - 1) + \sin(1)$.

3. f est dérivable en $x = 0$ car on a $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 0}{x} = 0$ (théorème d'encadrement). L'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ est donc $y = f'(0)x + f(0) = 0$.

4. f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas.

? Exercice 10.20

Soit $h: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème de Rolle?

SOLUTION. Théorème de Rolle Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

h est continue sur l'intervalle fermé $[-1; 1]$. On a bien $h(1) = h(-1)$ avec $h'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ si $x \neq 0$ mais $h'(0)$ n'existe pas car $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \mp\infty$.

? Exercice 10.21

Soit $h: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème des accroissements finis?

SOLUTION. Théorème des accroissements finis Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

h est continue sur $[-1; 1]$ et $h'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ si $x \neq 0$ mais $h'(0)$ n'existe pas car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \mp\infty$.

? Exercice 10.22

Soit $g:]0; \frac{\pi}{2}[\rightarrow]0, 1[$ une application telle que $g(x) = \sin(x)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1} . Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]0; 1[$.

SOLUTION. 1. $g(x) = \sin(x)$, $g'(x) = \cos(x)$, $g'(x) > 0$ pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc g est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

2. **Théorème de la bijection** Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, est monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f .

g est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, ce qui prouve que g réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ dans

$$g\left(]0; \frac{\pi}{2}[\right) =]\lim_{x \rightarrow 0} g(x); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x)[=]0; 1[.$$

Comme $\frac{1}{2} \in g\left(]0; \frac{\pi}{2}[\right)$, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $g(\alpha) = \frac{1}{2}$.

3. $g^{-1}:]0; 1[\rightarrow]0; \frac{\pi}{2}[$ avec $g^{-1}(y) = \arcsin(x)$. Comme g réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ dans $]0; 1[$, la bijection réciproque g^{-1} est une bijection de $]0; 1[$ dans $]0; \frac{\pi}{2}[$. Sachant que g est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, on peut en déduire que g^{-1} est continue sur $]0; 1[$.
4. La dérivée de g^{-1} sur $]0; 1[$ est $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

? Exercice 10.23

Soit $g:]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $g(x) = e^x - 1$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x) = -\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1} . Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $] -1; 0[$.

SOLUTION. 1. $g(x) = e^x - 1$, $g'(x) = e^x$, $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_*$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*$.

2. **Théorème de la bijection** Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, est monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f .

g est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}_*$, ce qui prouve que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_*$ dans

$$g(\mathbb{R}_*) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x); \lim_{x \rightarrow 0} g(x)[=] -1; 0[.$$

Comme $-\frac{1}{2} \in g(\mathbb{R}_*)$, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_*$ tel que $g(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

3. $g^{-1}:] -1; 0[\rightarrow \mathbb{R}_*$ avec $g^{-1}(y) = \ln(y + 1)$. Comme g réalise une bijection de $\mathbb{R}_*$ dans $] -1; 0[$, la bijection réciproque g^{-1} est une bijection de $] -1; 0[$ dans $\mathbb{R}_*$. Sachant que g est continue sur $\mathbb{R}_*$, on peut en déduire que g^{-1} est continue sur $] -1; 0[$.
4. La dérivée de g^{-1} sur $] -1; 0[$ est $\frac{1}{1+y}$.

? Exercice 10.24

Soit $g:]-1, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $g(x) = \ln(1+x)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $] -1, 0[$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x) = -2$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1} . Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $] -\infty; 0[$.

SOLUTION. 1. $g(x) = \ln(1+x)$, $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, $g'(x) > 0$ pour tout $x \in]-1; 0[$ donc g est strictement croissante sur $] -1; 0[$.

2. **Théorème de la bijection** Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, est monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f .

g est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $] -1; 0[$, ce qui prouve que g réalise une bijection de $] -1; 0[$ dans

$$g(]-1; 0[) =] \lim_{x \rightarrow -1} g(x); \lim_{x \rightarrow 0} g(x)[=] -\infty; 0[.$$

Comme $-2 \in g(]-1; 0[)$, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha \in] -1; 0[$ tel que $g(\alpha) = -2$.

3. $g^{-1}: \mathbb{R}_*^- \rightarrow] -1; 0[$ avec $g^{-1}(y) = e^y - 1$. Comme g réalise une bijection de $] -1; 0[$ dans $\mathbb{R}_*^-$, la bijection réciproque g^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}_*^-$ dans $] -1; 0[$. Sachant que g est continue sur $] -1; 0[$, on peut en déduire que g^{-1} est continue sur $\mathbb{R}_*^-$.

4. La dérivée de g^{-1} sur $] -\infty, 0[$ est e^y .

? Exercice 10.25

↳ Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4, 0)$.

SOLUTION. Soit $(x, \sqrt{x})$ un point quelconque de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$. Il s'agit de trouver le minimum de la distance entre ce point et le point $(4, 0)$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^+} \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \min_{x \in \mathbb{R}^+} \underbrace{\sqrt{x^2 - 7x + 16}}_{d(x)}.$$

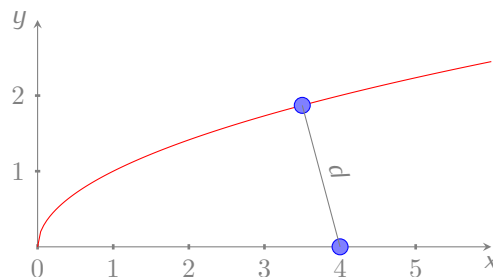
Sa dérivée vaut

$$d'(x) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}$$

et on a

$$\begin{array}{lll} d'(x) = 0 & \iff & x = \frac{7}{2}, \\ d'(x) > 0 & \iff & x > \frac{7}{2}, \\ d'(x) < 0 & \iff & x < \frac{7}{2}, \end{array}$$

par conséquent le point cherché est $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.



? Exercice 10.26 Dérivée d'une fonction composée

↳ Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

SOLUTION. Le rayon est fonction du temps donc $V'(t) = 4\pi[r(t)]^2 r'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k4\pi[r(t)]^2$. Donc $4\pi[r(t)]^2 r'(t) = k4\pi[r(t)]^2$, autrement dit $k = r'(t)$ ce qui implique que $r(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement, on a $r(0) = 1$ et $r(1) = 0$ et on obtient la relation $r(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $\frac{4}{3}\pi(1 - \hat{t})^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{2}$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h = 12 minutes.

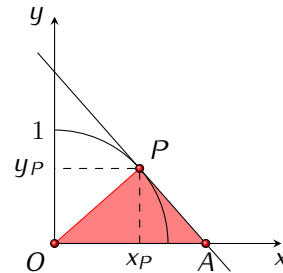
? Exercice 10.27

Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de côté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

SOLUTION. La surface et le volume d'un cube de côté ℓ sont respectivement $S = 6\ell^2$ et $V = \ell^3$. Le côté est fonction du temps donc $V'(t) = [\ell(t)]^2 \ell'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k6[\ell(t)]^2$. Donc $[\ell(t)]^2 \ell'(t) = k6[\ell(t)]^2$, autrement dit $6k = \ell'(t)$ ce qui implique que $\ell(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de côté fonde totalement, on a $\ell(0) = 1$ et $\ell(1) = 0$ et on obtient la relation $\ell(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $(1 - \hat{t})^3 = 1/2$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h = 12 minutes.

? Exercice 10.28

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1 - x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par A le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe x . Exprimer la surface du triangle OAP en fonction de x_P .



SOLUTION. Soit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. L'équation de la droite tangente en $x = x_P$ s'écrit

$$y = f'(x_P)(x - x_P) + f(x_P) = \frac{-x_P}{\sqrt{1 - x_P^2}}(x - x_P) + \sqrt{1 - x_P^2}$$

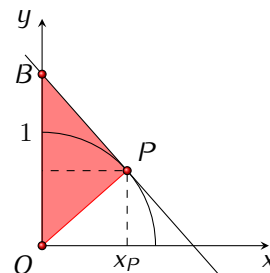
$A = (x_A, 0)$ est le point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation $y = 0$, donc on a

$$\frac{-x_P}{\sqrt{1 - x_P^2}}(x_A - x_P) + \sqrt{1 - x_P^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_A = \frac{1}{x_P}$$

et la surface du triangle OAP en fonction de x_P est $\frac{x_A y_P}{2} = \frac{\sqrt{1 - x_P^2}}{2x_P}$.

? Exercice 10.29

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1 - x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par B le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe y . Exprimer la surface du triangle OBP en fonction de x_P .



SOLUTION. Soit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. L'équation de la droite tangente en $x = x_P$ s'écrit

$$y = f'(x_P)(x - x_P) + f(x_P) = \frac{-x_P}{\sqrt{1 - x_P^2}}(x - x_P) + \sqrt{1 - x_P^2}$$

$B = (0, y_B)$ est le point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation $x = 0$, donc on a

$$y_B = \frac{x_P^2}{\sqrt{1-x_P^2}} + \sqrt{1-x_P^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x_P^2}}$$

et la surface du triangle OBP en fonction de x_P est $\frac{y_B x_P}{2} = \frac{x_P}{2\sqrt{1-x_P^2}}$.

Notation

On écrit $f(x) = \varepsilon(x)$ si f est une fonction telle que $D_f \cap]-\delta, +\delta[\setminus \{0\} \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Développement limité.

f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 , et on le note $DL_n(x_0)$, si $D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$ et s'il existe un polynôme P_n de degré n tel que

$$f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

Lorsqu'il existe, le polynôme P_n est unique.

Au lieu de $(x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$ on écrit souvent $o((x - x_0)^n)$.

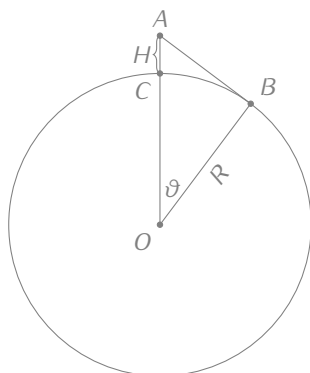
Théorème (Taylor)

Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

Exemple

On veut déterminer la limite de visibilité depuis un point d'altitude H au-dessus du niveau de la mer. Du point A on voit jusqu'au point B .



$$\cos \vartheta = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R + H} = \frac{1}{1 + \frac{H}{R}}.$$

Pour une altitude «raisonnable», $\frac{H}{R}$ est petit et ϑ également. On utilise les deux développements limités

$$\cos \vartheta \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2}, \quad \frac{1}{1 + \frac{H}{R}} = \left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{H}{R},$$

qui conduisent à $\vartheta \approx \sqrt{2\frac{H}{R}}$. On conclut que la distance CB à la surface de la Terre, c'est-à-dire la longueur de l'arc de cercle, est $\ell = R\vartheta = \sqrt{2RH}$. Par exemple, du sommet de la tour Eiffel on peut voir à une distance de 60 kilomètres.

Asymptotes

Soit f définie sur un intervalle $]A, +\infty[$ (ou $] -\infty, A[$). On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) s'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(1/x) + o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.

Lorsque x et $f(x)$ tendent vers l'infini, on obtient une asymptote oblique (si elle existe) en effectuant un développement limité au voisinage de l'infini :

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

où $\frac{c}{x^k}$ est le premier terme non nul après $\frac{b}{x}$. Dans ce cas, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f . Et la position relative de la courbe et de l'asymptote résulte du signe de $\frac{c}{x^k}$ lorsque x tend vers l'infini.

Développements limités usuels

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + \left| \left(-\frac{1}{2} \right)_n \right| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

avec les cas particuliers

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + o(x^4)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{k=n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

 Exercices

 Exercice 11.1 Somme et produit de développements limités

Calculer les développements limités suivants au point 0 :

- $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3,
- $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4,
- $\sin(x) \cos(2x)$ à l'ordre 5,
- $\cos(x) \ln(1+x)$ à l'ordre 4,
- $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3,
- $\ln^2(x+1)$ à l'ordre 4.

SOLUTION.

- $\frac{1}{1-x} - e^x = \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$
- $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)\right) + \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{5x^4}{128} + o(x^4)\right) + o(x^4) = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{64}x^4 + o(x^4)$
- $\sin(x) \cos(2x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^5)\right) = x - \frac{13}{6}x^3 + \frac{121}{120}x^5 + o(x^5)$
- $\cos(x) \ln(1+x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
- $(x^3+1)\sqrt{1-x} = (x^3+1) \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15}{16}x^3 + o(x^3)$
- $\ln^2(x+1) = (\ln(x+1))(\ln(x+1)) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$

 Exercice 11.2 Composition de développements limités

Calculer les développements limités suivants au point 0 :

- $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4,
- $e^{\sin(x)}$ à l'ordre 4,
- $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5.

SOLUTION.

- $\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$. On note $u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, alors $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2}{2} + o(x^4) = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) - \frac{\frac{x^4}{36} + o(x^4)}{2} + o(x^4) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. On note $u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, alors $e^{\sin(x)} = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$. Comme $u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, alors $u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$, $u^3 = x^3 + o(x^4)$ et $u^4 = x^4 + o(x^4)$ et on trouve $e^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(u^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$
- $(\cos x)^{\sin x} = \exp((\sin x) \ln(\cos x))$. Comme $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, on pose $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, alors $\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$. Comme $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, alors $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$ et $u^3 = u^4 = u^5 = o(x^5)$, donc $\ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \frac{\left(\frac{x^4}{4} + o(x^5)\right)}{2} + o(u^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$. Sachant que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ on en déduit $(\sin x) \ln(\cos x) = -\frac{x^3}{2} + o(x^5)$. On pose alors $v = -\frac{x^3}{2} + o(x^5) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, et l'on a $\exp((\sin x) \ln(\cos x)) = \exp(v) = 1 + v + \frac{v^2}{2} + o(v^2) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$.

 Exercice 11.3 Division de développements limités

Calculer les développements limités suivants au point 0 :

- $x \mapsto \frac{\sinh^2(t)}{1-\cos(t)}$ à l'ordre 4,
- $\tan(x)$ à l'ordre 2,
- $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3.
- $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4,
- $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2,

SOLUTION. 1. $\sinh(t) = t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)$ et $1 - \cos(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} + o(t^7)$ donc

$$\frac{\sinh^2(t)}{1 - \cos(t)} = \frac{\left(t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)\right)^2}{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} + o(t^7)} = \frac{t^2 + \frac{t^4}{3} + \frac{2t^6}{45} + o(t^7)}{\frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360} + o(t^5)\right)} = \frac{2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)}{1 - \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360} + o(t^5)}.$$

Maintenant on peut utiliser deux méthodes :

1.1. la première utilise le développement limité de $\frac{1}{1-A}$ avec $A = \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{360} + o(t^5)$:

$$\begin{aligned} \frac{\sinh^2(t)}{1 - \cos(t)} &= \frac{2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)}{1 - A} \\ &= \left(2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)\right) (1 + A + A^2 + o(A^2)) \\ &= \left(2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)\right) \left(1 + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{360} + o(t^5) + \frac{t^4}{144}\right) \\ &= 2 + \frac{5}{6}t^2 + \frac{11}{72}t^4 + o(t^4); \end{aligned}$$

1.2. la deuxième méthode (qu'on utilisera dans la suite de cet exercice) applique la technique de la division suivant les puissances croissantes : si f et g ont au point a un développement limité à l'ordre n et si $g(a) \neq 0$, le polynôme d'approximation de f/g à l'ordre n s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n le polynôme d'approximation de f par celui de g . Ici $f(x) = 2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45}$ et $g(x) = 1 - \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360}$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 :

$$\begin{array}{r|l} 2 & +\frac{2}{3}t^2 & +\frac{4}{45}t^4 & 1 & -\frac{1}{12}t^2 & +\frac{1}{360}t^4 \\ -2 & +\frac{1}{6}t^2 & -\frac{1}{180}t^4 & 2 & +\frac{5}{6}t^2 & +\frac{11}{72}t^4 \\ \hline & +\frac{5}{6}t^2 & +\frac{1}{12}t^4 & & & \\ & -\frac{5}{6}t^2 & +\frac{5}{72}t^4 & & & \\ \hline & & +\frac{11}{72}t^4 & & & \\ & & -\frac{11}{72}t^4 & & & \\ \hline & & & & & 0 \end{array}$$

On conclut que $\frac{\sinh^2(t)}{1 - \cos(t)} = 2 + \frac{5}{6}t^2 + \frac{11}{72}t^4 + o(t^4)$.

2. Ici $f(x) = 1$ et $g(x) = 1 + x + x^2$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 + x + x^2 \\ -1 & -x & -x^2 & 1 - x + x^3 - x^4 \\ \hline & -x & -x^2 & \\ & x & +x^2 & +x^3 \\ \hline & & x^3 & \\ & & -x^3 & -x^4 & +o(x^4) \\ \hline & & & x^4 & +o(x^4) \\ & & & -x^4 & +o(x^4) \\ \hline & & & & o(x^4) \end{array}$$

Le développement limité de $\frac{1}{1+x+x^2}$ au point 0 à l'ordre 4 est donc $1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$

3. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)}{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)}$. Ici $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$ et $g(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal

à 5 :

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x \\
 -x \\
 \hline
 \frac{1}{3}x^3 \\
 -\frac{1}{3}x^3 \\
 \hline
 \frac{2}{15}x^5 \\
 -\frac{2}{15}x^5 \\
 \hline
 o(x^5)
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \\
 +\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5 + o(x^5) \\
 -\frac{1}{30}x^5 + o(x^5) \\
 +\frac{1}{6}x^5 + o(x^5) \\
 +o(x^5) \\
 +o(x^5)
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{l}
 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) \\
 x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5
 \end{array}$$

Le développement limité de $\tan(x)$ au point 0 à l'ordre 5 est donc $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

4. $\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1} = \frac{-1+x+o(x^2)}{2+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}$. Ici $f(x) = -1 + x + o(x^2)$ et $g(x) = 2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 -1 + x \\
 +1 \\
 \hline
 x \\
 -x \\
 \hline
 -\frac{1}{4}x^2 \\
 -\frac{1}{4}x^2 \\
 \hline
 o(x^2)
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 +o(x^2) \\
 +o(x^2) \\
 +o(x^2) \\
 +o(x^2) \\
 +o(x^2)
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{l}
 2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
 -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2
 \end{array}$$

Le développement limité de $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ au point 0 à l'ordre 2 est donc $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

5. $\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x(-1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2))}{x(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2))}$. Ici $f(x) = -1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 -1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 \\
 -1 \\
 \hline
 -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \\
 \frac{1}{2}x \\
 \hline
 \frac{1}{2}x^2 \\
 -\frac{1}{2}x^2 \\
 \hline
 o(x^2)
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 +o(x^2) \\
 +o(x^2) \\
 +o(x^2) \\
 +o(x^2) \\
 +o(x^2)
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{l}
 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2) \\
 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2
 \end{array}$$

Le développement limité de $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ au point 0 à l'ordre 2 est donc $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

? Exercice 11.4

Développer dans le voisinage de zéro les fonctions suivantes :

- $x \mapsto \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ à l'ordre 3,
- $x \mapsto \ln(1+3x)$ à l'ordre 3,
- $x \mapsto (1 - \cos x) \ln(1+x^2)$ à l'ordre plus bas,
- $x \mapsto (\sin(x^2))(e^{-x} - 1)$ à l'ordre plus bas,
- $x \mapsto e^x - 1 + \sin x - 2x - \frac{x^2}{2}$ à l'ordre 4,
- $x \mapsto (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2,
- $x \mapsto \frac{e^x}{\cos x}$ à l'ordre 3,
- $x \mapsto \frac{\cos x}{e^x}$ à l'ordre 3,
- $x \mapsto \frac{e^x}{(\sin x)/x}$ à l'ordre 3.

SOLUTION. Comme

$$\begin{aligned}
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5), \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

alors

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3),$$

donc

1. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) = x + \frac{x^3}{8} + o(x^3);$
2. $\ln(1+3x) = (3x) - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) = 3x - \frac{9x^2}{2} + 9x^3 + o(x^3);$
3. $(1 - \cos x) \ln(1+x^2) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = \frac{x^4}{2} + o(x^4);$
4. $(\sin(x^2))(e^{-x} - 1) = \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)\right) \left(-x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -x^3 + o(x^3).$
5. À partir des développements limités des fonctions e^x et $\sin x$ en 0 à l'ordre 4

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

on conclut que $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - 1 + x - \frac{x^3}{6} - 2x - \frac{x^2}{2} + o(x^4) = \frac{x^4}{24} + o(x^4).$

6. On réécrit d'abord la fonction $g(x)$ sous forme exponentielle :

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{x^{-1} \ln(1 + \sin x)}.$$

On commence par déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto x^{-1} \ln(1 + \sin x)$. Comme on divise par x , il faut déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \ln(1 + \sin x)$. Or,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

donc

$$\ln(1 + \sin x) = \ln \left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right).$$

On pose $u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} u = 0$ et

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$

on en déduit que

$$\ln(1 + \sin x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

d'où

$$x^{-1} \ln(1 + \sin x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

On a donc

$$e^{x^{-1} \ln(1 + \sin x)} = e e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}.$$

On pose $v = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} v = 0$ et

$$e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + o(v^2),$$

on en déduit que

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{x^{-1} \ln(1 + \sin x)} = e \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2) \right] = e - \frac{e}{2}x + \frac{7e}{24}x^2 + o(x^2).$$

7. À partir du DL donné dans le tableau $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, on trouve le DL en zéro de $\frac{1}{\cos(x)}$ (en utilisant le DL en zéro de $\frac{1}{1-x}$) :

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} \stackrel{u = \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{=} 1 + u + o(u^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

En multipliant ce résultat par le DL donné dans le tableau $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ on obtient finalement

$$1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

8. À partir du DL donné dans le tableau $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, on trouve le DL en zéro de $\frac{1}{e^x}$ (en utilisant le DL en zéro de $\frac{1}{1+x}$) :

$$\frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \stackrel{u = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{=} 1 - u + u^2 + o(u^3) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

En multipliant ce résultat par le DL donné dans le tableau $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ on obtient finalement

$$1 - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

9. À partir du DL donné dans le tableau $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, on trouve le DL en zéro de $\frac{1}{\cos(x)}$ (en utilisant le DL en zéro de $\frac{1}{1-x}$) :

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} \stackrel{u = \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{=} 1 + u + o(u^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

En multipliant ce résultat par le DL donné dans le tableau $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ on obtient finalement

$$1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

? Exercice 11.5

Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

de trois façons :

1. par la formule de Taylor-Young
2. par composition de développements limités
3. en commençant par calculer le développement limité de f' .

SOLUTION. 1. Pour utiliser la formule de Taylor-Young on doit d'abord calculer les dérivées de f jusqu'à l'ordre 3 en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+2}\right)^2} \cdot \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} & f'(0) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -2 \frac{x+1}{(x^2 + 2x + 2)^2} & f''(0) &= -\frac{1}{2} \\ f'''(x) &= 2 \frac{3x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^3} & f'''(0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où le développement limité

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

2. Comme $u(x) \equiv \frac{x}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan(u(x)) = u(x) - \frac{(u(x))^3}{3} + o(u^3) \\ &= \frac{x}{x+2} - \frac{x^3}{3(x+2)^3} + o(x^3) \\ &= 2x \frac{x^2 + 6x + 6}{3(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)} + o(x^3) \end{aligned}$$

En effectuant la division selon les puissances croissantes et en s'arrêtant à $o(x^2)$ car le résultat sera multiplié par x on a

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{rrrr} 6 & +6x & +x^2 & o(x^2) \\ -6 & -9x & -\frac{9}{2}x^2 & o(x^2) \\ \hline & -3x & -\frac{7}{2}x^2 & o(x^2) \\ & +3x & +\frac{9}{2}x^2 & o(x^2) \\ \hline & & x^2 & o(x^2) \\ & & -x^2 & o(x^2) \\ \hline & & & o(x^2) \end{array} & \begin{array}{l} 8 + 12x + 6x^2 + x^3 \\ \hline \frac{3}{4} - \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}x^2 \end{array} \end{array}$$

ainsi

$$f(x) = \frac{2x}{3} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}x^2 \right) + o(x^3) = \frac{x}{12} (6 - 3x + x^2) + o(x^3) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

3. $f'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ et le développement limité de f' au point 0 à l'ordre 2 peut être calculé par la division selon les puissances croissantes :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{rrrr} 1 & & & o(x^2) \\ -1 & -x & -\frac{1}{2}x^2 & o(x^2) \\ \hline & -x & -\frac{1}{2}x^2 & o(x^2) \\ & x & +x^2 & o(x^2) \\ \hline & & \frac{1}{2}x^2 & o(x^2) \\ & & -\frac{1}{2}x^2 & o(x^2) \\ \hline & & & o(x^2) \end{array} & \begin{array}{l} 2 + 2x + x^2 \\ \hline \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \end{array} \end{array}$$

ainsi

$$f(x) = \int f'(x) \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \right) dx + o(x^3) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

? Exercice 11.6

1. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 + \sin^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2x^2}$.
2. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 + x \cos^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \cos^2 x)}{4x}$.
3. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 - \sin^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{2x^2}$.
4. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 - x \cos^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x \cos^2 x)}{3x}$.
5. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 - \sin^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{7x^2}$.

SOLUTION.

1. Étant donné que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

alors

$$\sin^2(x) = x^2 + o(x^4).$$

Comme $x^2 + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1 + u)$ en $u = 0$ est

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

on conclut que

$$\ln(1 + \sin^2 x) = x^2 + o(x^4).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

2. Étant donné que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$$

alors

$$\cos^2(x) = 1 - x^2 + o(x^4).$$

Comme $x \cos^2(x) = x - x^3 + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1 + u)$ en $u = 0$ est

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

on conclut que

$$\ln(1 + x \cos^2 x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \cos^2 x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

3. Étant donné que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

alors

$$\sin^2(x) = x^2 + o(x^4).$$

Comme $\sin^2(x) = x^2 + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1 - u)$ en $u = 0$ est

$$\ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots - \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

on conclut que

$$\ln(1 - \sin^2 x) = -x^2 + o(x^4).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

4. Étant donné que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$$

alors

$$\cos^2(x) = 1 - x^2 + o(x^4).$$

Comme $x \cos^2(x) = x - x^3 + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1 - u)$ en $u = 0$ est

$$\ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots - \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

on conclut que

$$\ln(1 - x \cos^2 x) = -x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x \cos^2 x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4}.$$

5. Étant donné que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

alors

$$\sin^2(x) = x^2 + o(x^4).$$

Comme $\sin^2(x) = x^2 + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1-u)$ en $u=0$ est

$$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots - \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

on conclut que

$$\ln(1 - \sin^2 x) = -x^2 + o(x^4).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2} = -1.$$

? Exercice 11.7 Développements limités au point $x_0 \neq 0$

Calculer les développements limités suivants :

1. $\sqrt{x}$ au point 2 à l'ordre 3,
2. $\sin x$ au point $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3,
3. $\cos x$ au point $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 3,
4. $\frac{\ln x}{(1+x)^2}$ en 1 à l'ordre 2.
5. x^3 au point $x=1$ à l'ordre 4,
6. x^3 au point $x=-1$ à l'ordre 4,
7. x^3 au point $x=-2$ à l'ordre 4,
8. x^3 au point $x=2$ à l'ordre 4,
9. x^3 au point $x=-3$ à l'ordre 4,
10. $x^4 - 1$ au point -1 à l'ordre 3,
11. $x^4 + 1$ au point 1 à l'ordre 3.

SOLUTION. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

1. On pose $h = x - 2$, alors $x = h + 2$ et on a $\sqrt{x} = \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}}$. On se rappelle que, pour $u \rightarrow 0$, on peut écrire $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$; ici $u = \frac{h}{2}$ donc $\sqrt{x} = \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{1+u} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)\right) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{32} + \frac{h^3}{128} + o(h^3)\right) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{(x-2)}{4} - \frac{(x-2)^2}{32} + \frac{(x-2)^3}{128} + o((x-2)^3)\right)$
2. Pour calculer le développement limité de $\sin x$ en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3 on utilise la formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^k).$$

Ici $n=3$, $a = \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = \sin x$ d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(a) &= \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ f'(x) &= \cos x, & f'(a) &= \frac{1}{2}; \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(a) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(a) &= -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

donc

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

3. Pour calculer le développement limité de $\cos x$ en $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 3 on utilise la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^k).$$

Ici $n = 3$, $a = \frac{\pi}{6}$ et $f(x) = \cos x$ d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(a) &= \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ f'(x) &= -\sin x, & f'(a) &= -\frac{1}{2}; \\ f''(x) &= -\cos x, & f''(a) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ f'''(x) &= \sin x, & f'''(a) &= \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

donc

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3\right).$$

4. On pose $y = x - 1$. Alors $\frac{\ln x}{(1+x)^2} = \frac{\ln(1+y)}{(2+y)^2}$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} y = 0$, on calcule le développement limité de $\frac{\ln(1+y)}{(2+y)^2}$ en zéro. Or,

$$\begin{aligned} \ln(1+y) &= y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \\ (2+y)^{-2} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{4} \left(1 - 2\frac{y}{2} + \frac{(-2)(-2-1)}{2} \frac{y^2}{2^2} + o(y^2)\right) = \frac{1}{4} \left(1 - y + \frac{3}{2}y^2 + o(y^2)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{4} \left(1 - (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)\right).$$

5. $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = 1$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) \frac{(x-1)^0}{0!} + f'(1) \frac{(x-1)^1}{1!} + f''(1) \frac{(x-1)^2}{2!} + f^{(3)}(1) \frac{(x-1)^3}{3!} + f^{(4)}(1) \frac{(x-1)^4}{4!} \\ &= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3. \end{aligned}$$

6. $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = -1$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-1) \frac{(x+1)^0}{0!} + f'(-1) \frac{(x+1)^1}{1!} + f''(-1) \frac{(x+1)^2}{2!} + f^{(3)}(-1) \frac{(x+1)^3}{3!} + f^{(4)}(-1) \frac{(x+1)^4}{4!} \\ &= -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3. \end{aligned}$$

7. $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = -2$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-2) \frac{(x+2)^0}{0!} + f'(-2) \frac{(x+2)^1}{1!} + f''(-2) \frac{(x+2)^2}{2!} + f^{(3)}(-2) \frac{(x+2)^3}{3!} + f^{(4)}(-2) \frac{(x+2)^4}{4!} \\ &= -8 + 12(x+2) - 6(x+2)^2 + (x+2)^3. \end{aligned}$$

8. $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = 2$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) \frac{(x-2)^0}{0!} + f'(2) \frac{(x-2)^1}{1!} + f''(2) \frac{(x-2)^2}{2!} + f^{(3)}(2) \frac{(x-2)^3}{3!} + f^{(4)}(2) \frac{(x-2)^4}{4!} \\ &= 8 + 12(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3. \end{aligned}$$

9. $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = -3$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-3) \frac{(x+3)^0}{0!} + f'(-3) \frac{(x+3)^1}{1!} + f''(-3) \frac{(x+3)^2}{2!} + f^{(3)}(-3) \frac{(x+3)^3}{3!} + f^{(4)}(-3) \frac{(x+3)^4}{4!} \\ &= -27 + 27(x+3) - 9(x+3)^2 + (x+3)^3. \end{aligned}$$

10. Selon la formule de Taylor, le développement limité à l'ordre n au point x_0 de f peut être calculé selon la formule $DL_n(x_0) = \sum_{k=0}^{k=n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + o((x-x_0)^n)$. Ici $f(x) = x^4 - 1$, $x_0 = -1$ et

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x^4 - 1 & f^{(0)}(-1) &= 0, \\ f^{(i)}(x) &= 4x^3 & f^{(i)}(-1) &= -4, \\ f^{(ii)}(x) &= 12x^2 & f^{(ii)}(-1) &= 12, \\ f^{(iii)}(x) &= 24x & f^{(iii)}(-1) &= -24, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= f^{(0)}(-1) \frac{(x+1)^0}{0!} + f^{(i)}(-1) \frac{(x+1)^1}{1!} + f^{(ii)}(-1) \frac{(x+1)^2}{2!} + f^{(iii)}(-1) \frac{(x+1)^3}{3!} + o((x+1)^3) \\ &= 0 \frac{1}{1} + (-4) \frac{(x+1)}{1} + 12 \frac{(x+1)^2}{2} + (-24) \frac{(x+1)^3}{6} + o((x+1)^3) \\ &= -4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + o((x+1)^3). \end{aligned}$$

11. Selon la formule de Taylor, le développement limité à l'ordre n au point x_0 de f peut être calculé selon la formule $DL_n(x_0) = \sum_{k=0}^{k=n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + o((x-x_0)^n)$. Ici $f(x) = x^4 + 1$, $x_0 = 1$ et

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x^4 + 1 & f^{(0)}(1) &= 2, \\ f^{(i)}(x) &= 4x^3 & f^{(i)}(1) &= 4, \\ f^{(ii)}(x) &= 12x^2 & f^{(ii)}(1) &= 12, \\ f^{(iii)}(x) &= 24x & f^{(iii)}(1) &= 24, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= f^{(0)}(1) \frac{(x-1)^0}{0!} + f^{(i)}(1) \frac{(x-1)^1}{1!} + f^{(ii)}(1) \frac{(x-1)^2}{2!} + f^{(iii)}(1) \frac{(x-1)^3}{3!} + o((x-1)^3) \\ &= 2 \frac{1}{1} + 4 \frac{(x-1)}{1} + 12 \frac{(x-1)^2}{2} + 24 \frac{(x-1)^3}{6} + o((x-1)^3) \\ &= 2 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + o((x-1)^3). \end{aligned}$$

? Exercice 11.8 Développements limités généralisés

Calculer les développements limités suivants :

- $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3,
- $f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{x^2+1}$ en $-\infty$ et en $+\infty$ à l'ordre 1,
- $f(x) = e^{2/x}$ en $+\infty$ à l'ordre 3,
- $f(x) = e^{3/x}$ en $+\infty$ à l'ordre 3,
- $f(x) = e^{-2/x}$ en $-\infty$ à l'ordre 3,
- $f(x) = e^{-1/x}$ en $-\infty$ à l'ordre 3,
- $f(x) = e^{4/x}$ en $+\infty$ à l'ordre 3,
- $f(x) = \frac{x^2-x}{1+x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2,
- $f(x) = \frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{2-x+x^2}}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2.

SOLUTION. Soit f définie sur un intervalle $]A, +\infty[$ (ou $] -\infty, A]$). On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) s'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(1/x) + o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.

- On pose $u = \frac{1}{x}$, ainsi $u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x+2}{x}} = \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{1+2u} = 1 + \frac{2u}{2} - \frac{(2u)^2}{8} + \frac{(2u)^3}{16} + o(u^3) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o(x^{-3})$
- ▷ Développement limité asymptotique en $+\infty$: on pose $y = \frac{1}{x}$ et on remarque que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0^+$. Alors

$$\ell^+(y) = \frac{1}{y} \frac{y}{1-y} \sqrt{\frac{1+y^2}{y^2}} \stackrel{(y>0)}{=} \frac{1}{y(1-y)} \sqrt{1+y^2}$$

$$= \frac{1}{y} (1 + y + y^2 + o(y^2)) \left(1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \right) = \frac{1}{y} + 1 + \frac{3}{2}y + o(y^2)$$

d'où

$$\ell(x) = x + 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o(x^{-1}).$$

On en déduit que le graphe de la fonction ℓ admet la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote en $+\infty$.

▷ Développement limité asymptotique en $-\infty$: on pose encore $y = \frac{1}{x}$ et on remarque que $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0^-$. Alors

$$\begin{aligned} \ell^-(y) &= \frac{1}{y} \frac{y}{1-y} \sqrt{\frac{1+y^2}{y^2}} \stackrel{(y \leq 0)}{=} -\frac{1}{y(1-y)} \sqrt{1+y^2} \\ &= -\frac{1}{y} (1 + y + y^2 + o(y^2)) \left(1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \right) = \frac{1}{y} + 1 + \frac{3}{2}y + o(y^2) \end{aligned}$$

d'où

$$\ell(x) = -x - 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o(x^{-1}).$$

On en déduit que le graphe de la fonction ℓ admet la droite d'équation $y = -x - 1$ comme asymptote en $-\infty$.

3. $f(x) = e^{2/x}$, $n = 3$ et $a = +\infty$ donc

$$e^{2/x} = e^{2t} = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) = 1 + 2t + \frac{4t^2}{2} + \frac{8t^3}{6} + o(t^3) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

4. $f(x) = e^{3/x}$, $n = 3$ et $a = +\infty$ donc

$$e^{3/x} = e^{3t} = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) = 1 + 3t + \frac{9t^2}{2} + \frac{27t^3}{6} + o(t^3) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} + \frac{9}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

5. $f(x) = e^{-2/x}$, $n = 3$ et $a = -\infty$ donc

$$e^{-2/x} = e^{-t} = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{2x^2} - \frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

6. $f(x) = e^{-1/x}$, $n = 3$ et $a = -\infty$ donc

$$e^{-1/x} = e^{-t} = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

7. $f(x) = e^{4/x}$, $n = 3$ et $a = \infty$ donc

$$e^{4/x} = e^t = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) = 1 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{32}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

8. On pose $y = \frac{1}{x}$. Il s'agit de calculer le développement limité en zéro à l'ordre 3 de la fonction $r(y) = \frac{1-y}{y(1+y)}$.

Or, $\frac{1-y}{1+y} = (1-y)(1-y+y^2-y^3+o(y^3))$ donc $r(y) = \frac{1}{y} - 2y + 2y^2 - 2y^3 + o(y^3)$ et finalement $f(x) = x - 2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o(x^{-2})$.

9.

$$\begin{aligned} f(1/t) &= t \left(\sqrt{3 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} - \sqrt{2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} \right) \\ &= \sqrt{3t^2 + t + 1} - \sqrt{2t^2 - t + 1} \\ &= (1-A)^{1/2} - (1-B)^{1/2} \quad \text{avec } A = -t - 3t^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \quad B = t - 2t^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{8}A^2 + o(A^2) \right) - \left(1 - \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2 + o(B^2) \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) \right) - \left(1 - \frac{1}{2}t + t^2 + \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) \right) \\ &= t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(1/x^2). \end{aligned}$$

? Exercice 11.9 *développement limité au voisinage de l'infini*

Déterminer les asymptotes de la courbe d'équation

$$y = 5x + 3\sqrt{x^2 - 1}.$$

Préciser la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

SOLUTION.

TO DO

? Exercice 11.10 *développement limité au voisinage de l'infini*

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + y + y^2)$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de l'infini de la fonction

$$f(x) := (2x - 1) \ln \frac{x^2}{1 + x + x^2}.$$

3. Calculer la limite de $x^2(f(x) + 2)$ quand x tend vers $+\infty$.

SOLUTION.

TO DO

? Exercice 11.11

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) := x^3 \sin \frac{1}{x}$. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f puis montrer que f n'admet pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.

SOLUTION. On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n (entier naturel) au point a s'il existe un polynôme P de degré au plus n tel que

$$f(x) = P(x) + o((x - a)^n) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

au voisinage de a .

Si f est n fois continûment dérivable sur un intervalle I avec n entier positif ou nul, alors pour tout point $a \in I$, f a un développement limité au point a donné par la formule de Taylor-Young

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

Dans notre cas, comme f n'admet pas de dérivée seconde en 0, on ne peut pas utiliser la formule de Taylor-Young pour calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

Il est tentant de penser que la réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'une fonction qui admet un développement limité à l'ordre n en un point a est dérivable n fois en ce point. C'est effectivement le cas si $n = 0$ ou $n = 1$. Dans le premier cas, le développement limité s'écrit juste $f(x) = a_0 + o(1)$ et donc $a_0 = f(a)$ par définition d'un $o(1)$. Si $n = 1$ et $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o(x - a)$, alors $a_0 = f(a)$ pour la même raison, et par suite :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a_1 + o(1)$$

ce qui implique que l'accroissement fini a une limite égale à a_1 , ainsi f est bien dérivable en a et $a_1 = f'(a)$. Mais la réciproque est fautive pour $n \geq 2$, autrement dit une fonction peut admettre un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ bien qu'elle ne soit pas n fois continûment dérivable.

Dans notre cas, on peut utiliser la formule de Taylor-Young pour calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 1 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = 0 + o(x).$$

Pour calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 il suffit de remarquer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 \ln(-x)}{x^2} = 0,$$

c'est-à-dire $f(x) = o(x^2)$: le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 est $f(x) = 0 + o(x^2)$. Remarquons que, en revanche, il n'existe pas de développement limité de f en 0 à l'ordre 3 car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^3}$$

n'existe pas.

? Exercice 11.12 Calculs de limites

Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x} \right)$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh \frac{1}{x^2} \right)^{x^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - e^x}{\arcsin x - x^2} \right)$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x - \sin x} + \frac{1}{x - \sinh x} \right)$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} \right)$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{x} \right)^x$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\tanh x - x)}{\ln(1+x)}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\tan x - \sin x) - x^3}{x^5}$
14. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x - \sin x}$
16. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cosh(x) + \cos(x) - 2)}{\sinh(x) + \sin(x) - 2x}$
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) + \sin(x) - 2x}{x(\cosh(x) + \cos(x) - 2)}$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cosh(x) + \cos(x) - 2)}{\tanh(x) + \tan(x) - 2x}$
21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$
22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2x+7}}{x^2 + x - 2}$
23. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x} + \sqrt{x+2} - \sqrt{7-2x}}{x^2 - x - 2}$
24. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^x - 1 - x}$

SOLUTION. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} + o(x)}{1 + o(x)} = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)}{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -1$

3. On pose $u = \frac{1}{x^2}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh \left(\frac{1}{x^2} \right) \right)^{x^2} = \lim_{u \rightarrow 0} (\cosh(u))^{1/u} = \lim_{u \rightarrow 0} \exp \left(\frac{\ln(\cosh(u))}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \exp \left(\frac{\ln \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \exp \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{u^2}{2} + o(u^2) \right)}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \exp \left(\frac{\frac{u^2}{2} + o(u^2)}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \exp \left(\frac{u}{2} + o(u) \right) = 1$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{\arcsin x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}{(x + o(x)) - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 - x + o(x)}{1 + x + o(x)} = -1$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x - \sin x} + \frac{1}{x - \sinh x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^3 + o(x^3)} + \frac{3}{x^3 + o(x^3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{x^3 + o(x^3)}$ n'existe pas car $\frac{1}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} \pm\infty$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u + o(u))}{-6u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u + o(u)}{-6u} = -\frac{1}{6}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{x} \right)^x = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + 7u)^{1/u} = \lim_{u \rightarrow 0} \exp \left(\frac{\ln(1 + 7u)}{u} \right) = \lim_{v \rightarrow 0} \exp \left(\frac{7 \ln(1 + v)}{v} \right) = \lim_{v \rightarrow 0} \exp \left(\frac{7(v - v^2/2 + o(v^2))}{v} \right) = \lim_{v \rightarrow 0} \exp(7(1 - v/2 + o(v))) = e^7$

8. Comme $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = -\frac{1}{2}$.

9. En déterminant les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \tanh(x)$ on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\tanh(x) - x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + o(x))(-\frac{x^3}{3} + o(x^3))}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + o(1))(-\frac{x^3}{3} + o(x^3))}{1 + o(1)} = 0.$$

10. Comme $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ et en utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 on a $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)}$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}$.

11. On note $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$. On réécrit d'abord la fonction comme

$$f(x) = x \left[\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

On pose $y = \frac{1}{x}$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + y^2 + y^3)^{\frac{1}{3}} - (1 + y)^{\frac{1}{2}}}{y}.$$

En utilisant le développement limité de $(1+y)^\alpha$ en 0 on a

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + y^2 + y^3)^{\frac{1}{3}} - (1 + y)^{\frac{1}{2}}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + o(y) - 1 - \frac{y}{2} + o(y)}{y} = -\frac{1}{2}.$$

12. En utilisant les développements limités on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1. \end{aligned}$$

13. En utilisant les développements limités on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\tan(x) - \sin(x)) - x^3}{x^5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) - x^3}{x^5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^5}{4} + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

14. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \cos(a)$. (On s'aperçoit que c'est la définition de la dérivée de $\sin(x)$ en $x = a$.)

15. En utilisant les développements limités on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos(x)}{x - \sin(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 3. \end{aligned}$$

16. On pose $y = \frac{\pi}{2} - x$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{\frac{\pi}{2} - x} &= \lim_{y \rightarrow 0} (\cos(\frac{\pi}{2} - y))^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (\sin(y))^y = \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln(\sin(y))} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln(y - \frac{y^3}{6} + o(y^3))} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln(y(1 - \frac{y^2}{6} + o(y^2)))} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln y} e^{y \ln(1 - \frac{y^2}{6} + o(y^2))} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln y} e^{y(-\frac{y^2}{6} + o(y^2))} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln y} e^{-\frac{y^3}{6} + o(y^3)} = 1. \end{aligned}$$

17. Pour calculer la limite donnée on peut utiliser les développements limités :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 2x + o(x^3)}{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 2.$$

Sinon on peut utiliser la règle de L'Hôpital car

$$\begin{aligned} n(x) &= e^x - e^{-x} - 2x, & \lim_{x \rightarrow 0} n(x) &= 0; \\ d(x) &= x - \sin x, & \lim_{x \rightarrow 0} d(x) &= 0. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} n'(x) &= e^x + e^{-x} - 2, & \lim_{x \rightarrow 0} n'(x) &= 0; \\ d'(x) &= 1 - \cos x, & \lim_{x \rightarrow 0} d'(x) &= 0; \\ n''(x) &= e^x - e^{-x}, & \lim_{x \rightarrow 0} n''(x) &= 0; \\ d''(x) &= \sin x, & \lim_{x \rightarrow 0} d''(x) &= 0; \\ n'''(x) &= e^x + e^{-x}, & \lim_{x \rightarrow 0} n'''(x) &= 2; \\ d'''(x) &= \cos x, & \lim_{x \rightarrow 0} d'''(x) &= 1; \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n'''(x)}{d'''(x)} = 2.$$

$$\begin{aligned} 18. \sinh(x) + \sin(x) - 2x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - 2x + o(x^5) \\ \cosh(x) + \cos(x) - 2 &= 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{24} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2 + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) + \sin(x) - 2x}{\cosh(x) + \cos(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{60} + o(1)}{\frac{1}{12} + o(1)} = \frac{1}{5}.$$

$$\begin{aligned} 19. \cosh(x) + \cos(x) - 2 &= 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{24} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2 + o(x^4) \\ \sinh(x) + \sin(x) - 2x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - 2x + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cosh(x) + \cos(x) - 2)}{\sinh(x) + \sin(x) - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12} + o(1)}{\frac{1}{60} + o(1)} = 5.$$

$$\begin{aligned} 20. \cosh(x) + \cos(x) - 2 &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2 + o(x^4) = \frac{x^4}{12} + o(x^4), \\ \tanh(x) + \tan(x) - 2x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - 2x + o(x^5) = \frac{4x^5}{15} + o(x^5), \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cosh(x) + \cos(x) - 2)}{\tanh(x) + \tan(x) - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12} + o(1)}{\frac{4}{15} + o(1)} = \frac{5}{16}.$$

$$21. \text{ On pose } y = x - 1 \text{ Alors } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y) \ln(1+y)}{y(2+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y) \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3) \right)}{y(2+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{6} + o(y^2)}{2(1 + \frac{y}{2})} = \frac{1}{2}.$$

22. Soit $f(x) = \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2x+7}$ et $g(x) = x^2 + x - 2$. f et g sont continues sur $[0; 2]$, dérivables sur $]0; 2[$ et $f(1) = g(1) = 0$. On a

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{2x+7}}, \quad g'(x) = 2x + 1$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{36}. \text{ On en déduit que } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{36}.$$

23. Soit $f(x) = \sqrt{1-3x} + \sqrt{x+2} - \sqrt{7-2x}$ et $g(x) = x^2 - x - 2$. f et g sont continues sur $[-2; 0]$, dérivables sur $] -2; 0[$ et $f(-1) = g(-1) = 0$. On a

$$f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{1-3x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{7-2x}}, \quad g'(x) = 2x - 1$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{36}. \text{ On en déduit que } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{36}.$$

24. On commence par factoriser le terme dominant (comme on s'intéresse à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, on peut supposer $x > 0$) :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x} = \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)} - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = x \left[\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right].$$

On peut alors écrire

$$g(t) = f(1/t) = \frac{1}{t} \left[(1 + t^2 + t^3)^{\frac{1}{3}} - (1 + t)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{t} \left[(1 + o(t)) - \left(1 + \frac{t}{2} + o(t) \right) \right] = \frac{1}{t} \left[-\frac{t}{2} + o(t) \right] = -\frac{1}{2} + o(1).$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

25. Pour calculer la limite donnée on peut utiliser les développements limités :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^x - 1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x + o(x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 4. \end{aligned}$$

Sinon on peut utiliser la règle de L'Hôpital car

$$\begin{aligned} n(x) &= 1 - \cos(2x), & \lim_{x \rightarrow 0} n(x) &= 0; \\ d(x) &= e^x - 1 - x, & \lim_{x \rightarrow 0} d(x) &= 0. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} n'(x) &= 2 \sin(2x), & \lim_{x \rightarrow 0} n'(x) &= 0; \\ d'(x) &= e^x - 1, & \lim_{x \rightarrow 0} d'(x) &= 0; \\ n''(x) &= 4 \cos(2x), & \lim_{x \rightarrow 0} n''(x) &= 4; \\ d''(x) &= e^x, & \lim_{x \rightarrow 0} d''(x) &= 1; \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n''(x)}{d''(x)} = 4.$$

? Exercice 11.13

Écrire

▷ le développement limité de $\sin x$ en 0 à l'ordre 3;

▷ le développement limité de e^{2x} en 0 à l'ordre 3.

Puis calculer

▷ le développement limité de $f(x) = \sin x \times e^{2x}$ en 0 à l'ordre 3.

▷ le développement limité de $g(x) = \frac{\sin x}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 3.

SOLUTION. On commence par écrire

▷ le développement limité de $\sin x$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3);$$

▷ le développement limité de e^{2x} en 0 à l'ordre 3 :

$$e^{2x} \underset{0}{=} 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3);$$

On peut alors facilement calculer

▷ le développement limité de $f(x) = e^{2x} \sin x$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{0}{=} & \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] \times \left[1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \right] = \\ & = x - \frac{x^3}{6} + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3) = \\ & = x + 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3); \end{aligned}$$

▷ le développement limité de $g(x) = \frac{\sin x}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} \quad \underbrace{u=2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}_{=} \\
 &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1+u} = \\
 &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] [1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)] = \\
 &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] \left[1 - (2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3) + (2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3)^2 - (2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3)^3 + o(x^3) \right] = \\
 &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] \left[1 - 2x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + x^3 - 8x^3 + o(x^3) \right] = \\
 &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] [1 - 2x + 2x^2 - 8x^3 + o(x^3)] = \\
 &= x - 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3).
 \end{aligned}$$

? Exercice 11.14

On considère la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$.

- ▷ Écrire le développement limité de $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3.
- ▷ En déduire le développement asymptotique de f à l'ordre 2 en $-\infty$ et en $+\infty$.
- ▷ Écrire les équations des asymptotes pour f en $-\infty$ et en $+\infty$.

SOLUTION. On considère la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$. On remarque que

$$f(x) = \begin{cases} x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right), & \text{si } x \geq 0, \\ x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- ▷ Pour écrire le développement limité de $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3 on commence par se ramener à un développement limité en 0 en posant $y = 1/x$: il s'agit alors de calculer le développement limité de $\sqrt{1+y}$ en 0 à l'ordre 3

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$$

d'où

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(x^{-2})$$

- ▷ On en déduit le développement asymptotique de f à l'ordre 2

(i) en $-\infty$:

$$f(x) = x \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} + o(x^{-2}) \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + o(x^{-1})$$

(ii) en $+\infty$:

$$f(x) = x \left(2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(x^{-2}) \right) = 2x + 1 - \frac{1}{4x} + o(x^{-1})$$

- ▷ On en déduit les équations des asymptotes pour f en

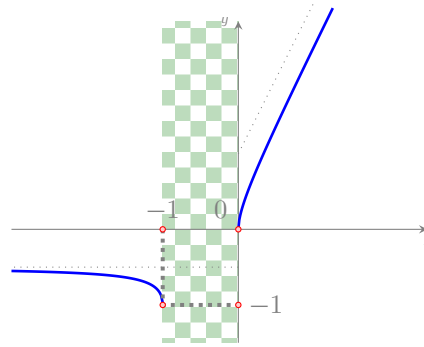
(i) en $-\infty$:

$$y = -\frac{1}{2}$$

(ii) en $+\infty$:

$$y = 2x + 1.$$

En effet, le graphe de la fonction est le suivant :



? Exercice 11.15

1. Écrire le développement limité généralisé de $\cos\left(\frac{1}{2x}\right)$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
2. Écrire le développement limité généralisé de $\sqrt{2 + \frac{1}{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
3. En déduire le développement limité généralisé de $f(x) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
4. Écrire l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$.

SOLUTION. Soit f définie sur un intervalle $]A, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a = +\infty$ s'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(1/x) + o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.

1. Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\cos\left(\frac{1}{2x}\right) = \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) = 1 - \frac{1}{8x^2} + o(x^{-3})$$

2. Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\sqrt{2 + \frac{1}{x}} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \sqrt{2} \sqrt{1 + t} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)\right) = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} + \frac{1}{128x^3} + o(x^{-3})\right)$$

3. Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}} = \frac{1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)}{\sqrt{2} \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)\right)}$$

Comme

1	$-\frac{1}{2}t^2$	$o(t^3)$	$1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$
-1	$-\frac{1}{2}t$	$+\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$	$1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$
$-\frac{1}{2}t$	$-\frac{3}{8}t^2$	$-\frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$	
$\frac{1}{2}t$	$+\frac{1}{4}t^2$	$+\frac{1}{32}t^3 + o(t^3)$	
$-\frac{1}{8}t^2$	$-\frac{1}{32}t^3 + o(t^3)$	$o(t^3)$	
$\frac{1}{8}t^2$	$+\frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$	$o(t^3)$	
	$\frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$	$o(t^3)$	
	$-\frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$	$o(t^3)$	
	$o(t^3)$	$o(t^3)$	

alors

$$\frac{1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)}{\sqrt{2} \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} - \frac{1}{128x^3} + o(x^{-3})\right)$$

4. L'équation de l'asymptote de f en $+\infty$ est $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

? Exercice 11.16

1. Écrire le développement limité généralisé de $\sin\left(\frac{1}{2x}\right)$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
2. Écrire le développement limité généralisé de $\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
3. En déduire le développement limité généralisé de $f(x) = \frac{x \sin\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
4. Écrire l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$.

SOLUTION. Soit f définie sur un intervalle $]A, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a = +\infty$ s'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(1/x) + o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.

1. Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\sin\left(\frac{1}{2x}\right) = \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{48x^3} + o(x^{-4})$$

2. Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \sqrt{1 + t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3) = 1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} + \frac{1}{128x^3} + o(x^{-3})$$

3. Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\frac{x \sin\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}} = \frac{\sin(t)}{2t\sqrt{1+t}} = \frac{t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)}{2t \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)\right)} = \frac{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^3)}{2 + t - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{8} + o(t^3)}$$

Comme

$\begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array}$	$\begin{array}{r} -\frac{1}{6}t^2 \\ -\frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{8}t^2 \\ -\frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ \frac{5}{24}t^2 \\ -\frac{5}{24}t^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} o(t^3) \\ o(t^3) \\ -\frac{1}{16}t^3 \\ o(t^3) \\ -\frac{1}{16}t^3 \\ o(t^3) \\ -\frac{1}{8}t^3 \\ -\frac{5}{48}t^3 \\ -\frac{11}{48}t^3 \\ \frac{11}{48}t^3 \\ o(t^3) \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 + t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t^3 + o(t^3) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{48}t^2 - \frac{11}{96}t^3 + o(t^3) \end{array}$
--	--	---	---

alors

$$\frac{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^3)}{2 + t - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{8} + o(t^3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{48}t^2 - \frac{11}{96}t^3 + o(t^3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{5}{192x^2} - \frac{11}{768x^3} + o(x^{-3})$$

4. L'équation de l'asymptote de f en $+\infty$ est $y = \frac{1}{2}$.

? Exercice 11.17

- a) Écrire le développement limité de $\sin(2x)$ et de $\cos(2x)$ en 0 à l'ordre 3; en déduire le développement limité de $\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$ en 0 à l'ordre 3 soit en utilisant le développement limité en $u = 0$ de la fonction $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ soit en appliquant la technique de la division suivant les puissances croissantes.
- Suggestion : comme on connaît le développement limité de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 3, il est facile de calculer le développement limité de $\tan(2x)$ et de vérifier qu'on a bien fait les calculs.*
- b) En utilisant le développement limité de $\ln(1+z)$ en 0 à l'ordre 3 et le développement limité de $\tan(2x)$ en 0 à l'ordre 3 calculé au point a), déterminer le développement limité de $\ln(1+\tan(2x))$ en 0 à l'ordre 3.
- c) En utilisant le développement limité de $\arcsin(x)$ en 0 à l'ordre 3 et le développement limité de $\ln(1+\tan(2x))$ en 0 à l'ordre 3 calculé au point b), calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\tan(2x)) + 2x(x-1)}{\arcsin(x) - x}.$$

SOLUTION.

- a) Comme $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, les développements limités de $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$ en 0 à l'ordre 3 sont

$$\sin(2x) = (2x) - \frac{(2x)^3}{6} + o((2x)^3) = 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3), \quad \cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^3) = 1 - 2x^2 + o(x^3);$$

on peut alors utiliser deux méthodes pour calculer le développement limité de $\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$ en 0 à l'ordre 3 :

▷ la première méthode utilise le développement limité de $\frac{1}{1+u}$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)}{1 - 2x^2 + o(x^3)} \stackrel{u = -2x^2 + o(x^3)}{=} \\ &= \frac{2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)}{1 + u} = \\ &= \left[2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \right] [1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)] = \\ &= \left[2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \right] [1 - (-2x^2) + (-2x^2)^2 - (-2x^2)^3 + o(x^3)] = \\ &= \left[2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \right] [1 + 2x^2 + o(x^3)] = \\ &= 2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

▷ la deuxième méthode applique la technique de la division suivant les puissances croissantes : si f et g ont au point a un développement limité à l'ordre n et si $g(a) \neq 0$, le polynôme d'approximation de f/g à l'ordre n s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n le polynôme d'approximation de f par celui de g . Ici $f(x) = 2x - \frac{4x^3}{3}$ et $g(x) = 1 - 2x^2$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 3 :

$2x$	$-\frac{4}{3}x^3$	1	$-2x^2$
$-2x$	$+4x^3$	$2x$	$\frac{8}{3}x^3$
$\frac{8}{3}x^3$	$-\frac{8}{3}x^3$	0	0

Le développement limité de $\tan(2x)$ à l'ordre 3 en $x = 0$ est donc $2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$.

▷ Pour vérifier nos calculs on va utiliser le développement limité de $\tan(z)$: comme $\tan(z) = z + \frac{z^3}{3} + o(x^3)$, le développement limité de $\tan(2x)$ en 0 à l'ordre 3 est bien $\tan(2x) = 2x + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$.

b) Étant donné que les développements limités en $u = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1+u)$ et $\tan(2u)$ sont

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3), \quad \tan(2u) = 2u + \frac{8u^3}{3} + o(u^3),$$

on en déduit le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 + \tan(2x))$:

$$\begin{aligned} \ln(1 + \tan(2x)) &= \ln \left(1 + \underbrace{2x + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)}_{=z \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \right) \\ &= \ln(1+z) \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + o(z^3) \end{aligned}$$

si on remplace $z = 2x + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$ on a

$$\begin{aligned} &= 2x + \frac{8x^3}{3} - \frac{\left(2x + \frac{8x^3}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(2x + \frac{8x^3}{3}\right)^3}{3} + o(x^3) \\ &= 2x + \frac{8x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + o(x^3) \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

c) Étant donné que les développements limités en $u = 0$ à l'ordre 3 de $\arcsin(u)$ et $\ln(1 + \tan(2u))$ sont

$$\arcsin(u) = u + \frac{u^3}{6} + o(u^3) \quad \ln(1 + \tan(2u)) = 2u - 2u^2 + \frac{16}{3}u^3 + o(u^3)$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan(2x)) + 2x(x-1)}{\arcsin(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3) + 2x^2 - 2x}{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{16}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 32.$$

? Exercice 11.18



1. Soit $f(x) := \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\ln(x)}$. Quel est son domaine de définition ? Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Soit $f(x) := \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\ln(x)}$. Quel est son domaine de définition ? Est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

SOLUTION. 1. Pour que f soit bien définie il faut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, x vérifie le système suivant

$$\begin{cases} 1+x \neq 0, \\ \frac{1-x}{1+x} > 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

donc $\mathcal{D}_f =]0; 1[$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x) \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1/\ln(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1-x)^2}}{1/(x \ln^2(x))} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x \ln^2(x)(1+x)}{(1-x)^3} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2(1+x)}{(1-x)^3} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x) \right) = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x) = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0 = 1.$$

2. Pour que f soit bien définie il faut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, x vérifie le système suivant

$$\begin{cases} 1+x \neq 0, \\ \frac{1+x}{1-x} > 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

donc $\mathcal{D}_f =]0; 1[$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\ln(x) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1/\ln(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{1/(x \ln^2(x))} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x \ln^2(x)}{(1-x^2)} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x}{1+x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^2(x)}{1-x} \right) = -1 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \ln(x)}{-x} = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = e^0 = 1.$$

? Exercice 11.19

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 3x + 4x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrez que f admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre 2 et que, pourtant, $f''(0)$ n'existe pas.

SOLUTION. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, on peut écrire

$$f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + o(x^2)$$

ce qui, par définition, montre que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

D'autre part,

$$f'(x) = \begin{cases} 3 + 8x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 + 4x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 3 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Mais $f''(0)$ n'existe pas car le quotient

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 8 + 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0.

On sait que, pour qu'une fonction admette un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, il est suffisant qu'elle soit n fois dérivable en 0. Cet exercice montre que ce n'est pas nécessaire.

? Exercice 11.20

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \ln|x|, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.

2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Est-ce que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?
5. Calculer la dérivée seconde $f''(0)$ si elle existe.
6. Peut-on utiliser la formule de Taylor-Young pour écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 ? Pourquoi ?
7. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 s'il existe.

SOLUTION. L'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se réécrit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \ln(-x), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. f est continue en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \ln(-x) = 0 = f(0).$$

2. Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 \ln(-x) - 0}{x - 0} = 0$$

la dérivée de f est l'application $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ 3x^2 \ln(-x) + x^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3. f' est continue en $x = 0$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} = 0 = f'(0)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 \ln(-x) + x^2 = 0 = f'(0).$$

4. $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car elle est continue, dérivable et sa dérivée est continue.

5. La dérivée seconde de f en $x = 0$ n'existe pas car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

n'existe pas.

6. TO DO

? Exercice 11.21

Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $g(x) := \ln f(x)$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

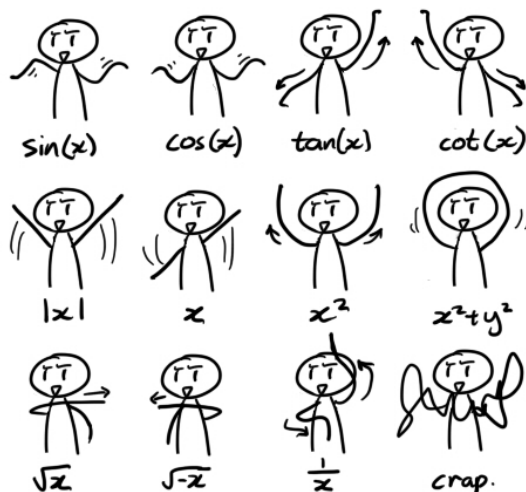
On notera ce prolongement f .

- 3. Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
- 4. Montrer que f' est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

SOLUTION.

TO DO

Beautiful Dance Moves



Fonction logarithme népérien.

La fonction "ln" est définie pour $x > 0$ par

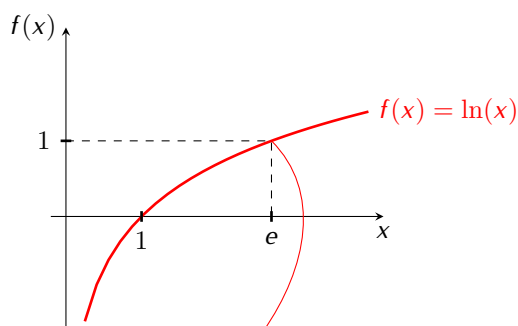
$$\begin{cases} \ln(1) = 0 \\ (\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0. \end{cases}$$

Elle est strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

La dérivée en $x = 1$ étant égale à 1, on a aussi $\ln(1+x) = x + o(x^2)$ au voisinage de 0.



L'unique solution de l'équation $\ln(x) = 1$ est notée e ($e \approx 2,718$).

Propriétés algébriques $\forall a > 0, \forall b > 0, \forall r \in \mathbb{Q}$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b); \quad \ln(a^r) = r \ln a; \quad \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b).$$

Convexité La fonction $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$ ce qui entraîne

$$\forall x > -1 \quad \ln(1+x) \leq x.$$

Fonction exponentielle.

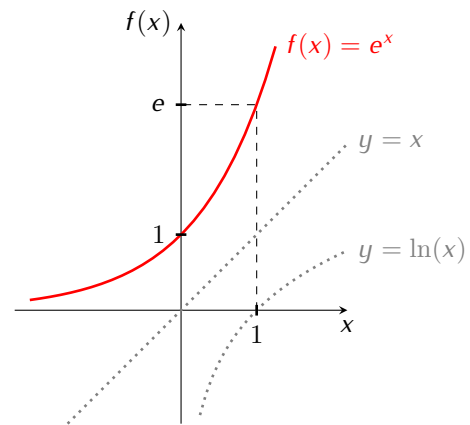
La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction $\ln$; elle est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$; elle est notée $\exp$ ou $x \mapsto e^x$:

$$y = e^x \iff x = \ln(y).$$

Elle est strictement croissante,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0^+, & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty, \end{aligned}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et $(e^x)' = e^x$. La dérivée en $x = 0$ étant égale à 1, on a aussi $e^x - 1 = x + o(x^2)$ au voisinage de 0.



L'unique solution de l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$.

Propriétés algébriques $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b; \quad e^{ra} = (e^a)^r; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

Convexité La fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui entraîne

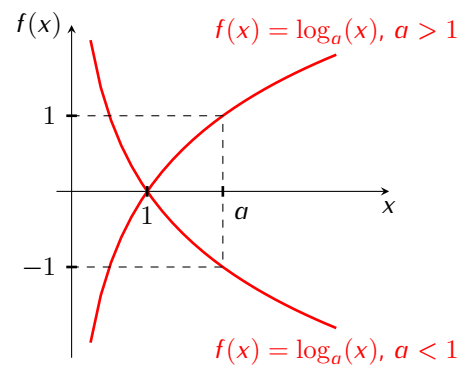
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + x \leq e^x.$$

Logarithme de base a .

La fonction logarithme de base a ($a > 0, a \neq 1$) est la fonction définie par

$$\forall x > 0 \quad \log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Sa dérivée est $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$. Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction $\ln$.

Exponentielle de base a .

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$) est la fonction définie par

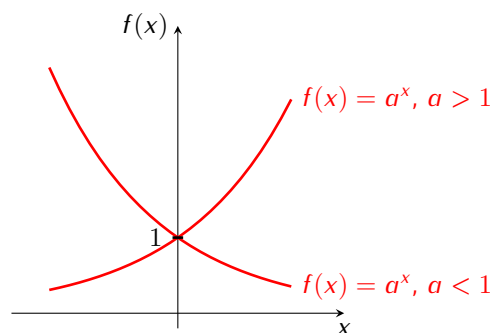
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x := e^{x \ln(a)}.$$

Pour $a \neq 1$ c'est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$:

$$y = a^x \iff x = \log_a(y).$$

Sa dérivée est $(a^x)' = a^x \ln a$.

Remarquez bien qu'ici la variable est en exposant.



Fonctions puissances.

La fonction $x \mapsto x^r$ pour $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$ est connue. On la généralise pour $r \in \mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^r := e^{r \ln x}.$$

Les propriétés connues pour les exposants rationnels sont prolongées ; en particulier $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Remarquez bien qu'ici l'exposant est constant.

Pour $r < 0$, la fonction $x \mapsto x^r$ est décroissante de $+\infty$ à 0.

Pour $r > 0$, la fonction $x \mapsto x^r$ est croissante de 0 à $+\infty$. Dans ce cas on peut prolonger la fonction par continuité en 0 ; la fonction prolongée est dérivable en 0 si $r > 1$.

Pour $b > 0$ on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^b \ln x = 0.$$

Pour $a > 1$ et $b \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty.$$

Pour $a > 1$ on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{a^x} = 0.$$

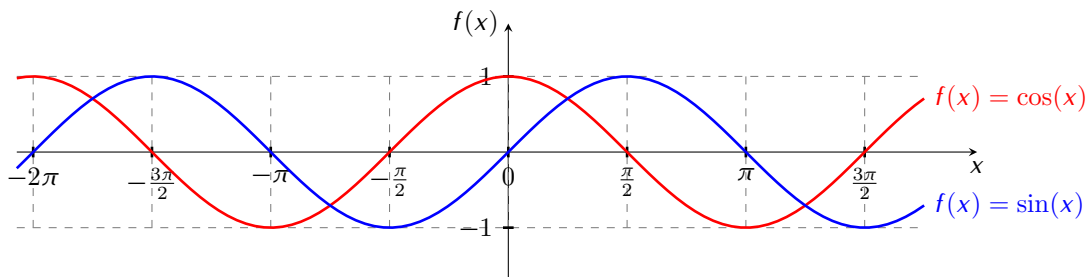
Fonctions circulaires et trigonométriques.

Fonctions sinus et cosinus Elles sont définies dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1, 1]$. Elles sont 2π -périodiques. La fonction cos est paire, la fonction sin est impaire.

Dérivées : $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(x))' = \cos(x)$.

Si $x \in \mathbb{R}$ est la mesure d'un angle, ces expressions des dérivées ne sont correctes que si x est exprimé en radians.

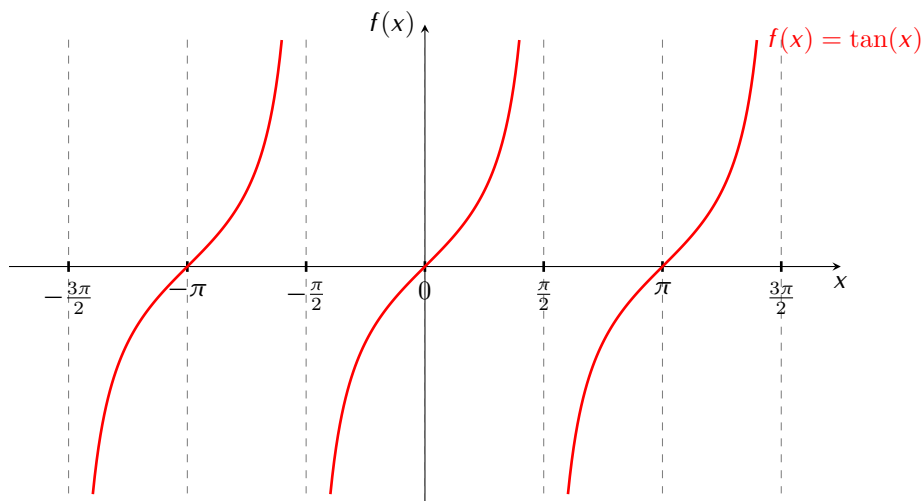
Limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{1}{2}$.



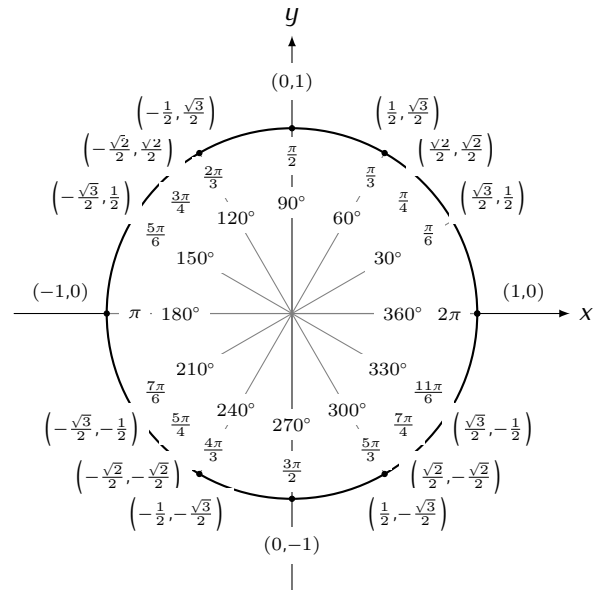
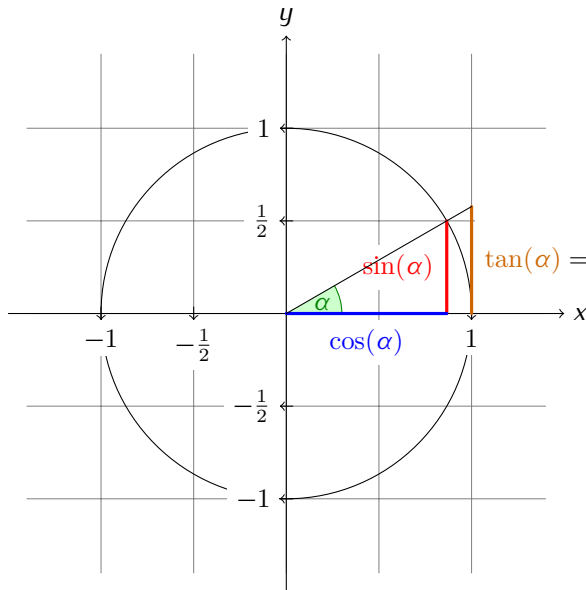
Fonction tangente Elle est définie sur $D := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Elle est π -périodique et impaire.

Dérivée : $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ pour tout $x \in D$.

Limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.



Propriétés



$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$$

$$\tan(\pi/2 - x) = 1/\tan(x)$$

$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$$

$$\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$$

$$\tan(\pi/2 + x) = -1/\tan(x)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

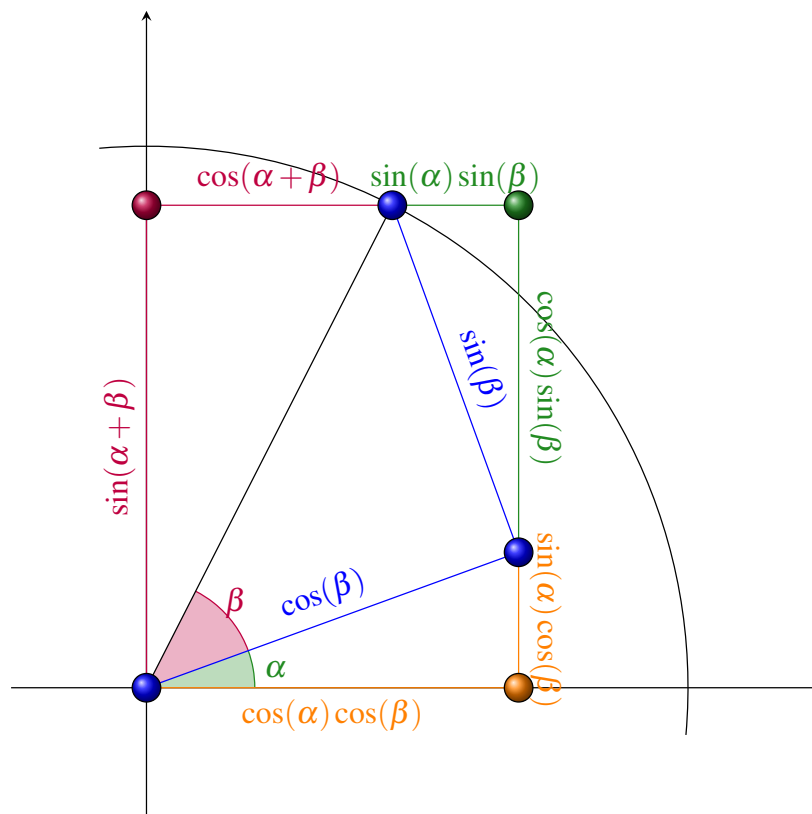
$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$



$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

$$\begin{aligned}\cos(a) + \cos(b) &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & \cos(a) - \cos(b) &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) + \sin(b) &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & \sin(a) - \sin(b) &= 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Soit $t := \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, alors

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Fonctions circulaires réciproques.

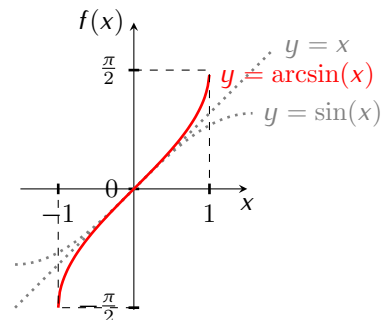
Fonction arc-sinus

C'est la bijection réciproque de la restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus :

$$\left. \begin{aligned} y &= \arcsin(x) \\ -1 &\leq x \leq 1 \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} x &= \sin(y) \\ -\frac{\pi}{2} &\leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right.$$

Elle est impaire et pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



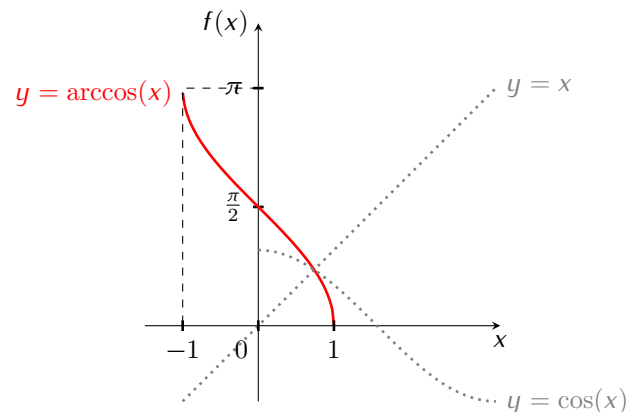
Fonction arc-cosinus

C'est la bijection réciproque de la restriction à $[0, \pi]$ de la fonction cosinus :

$$\left. \begin{aligned} y &= \arccos(x) \\ -1 &\leq x \leq 1 \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} x &= \cos(y) \\ 0 &\leq y \leq \pi \end{aligned} \right.$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



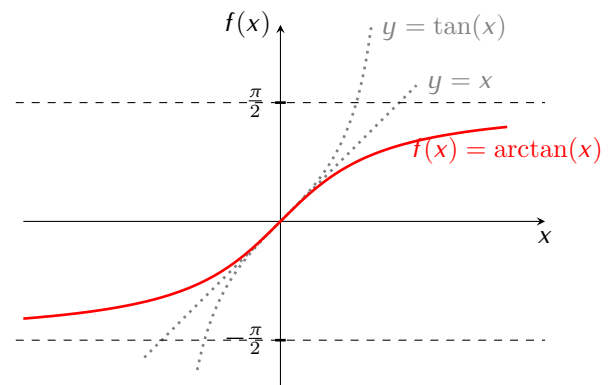
Fonction arc-tangente

C'est la bijection réciproque de la restriction à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente :

$$\left. \begin{array}{l} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \tan(y) \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Elle est impaire et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}.$$



Propriétés

$$\forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin(x))$$

$$\forall x > 0$$

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x < 0$$

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}$$

Fonctions hyperboliques.

On définit les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique pour tout $x \in \mathbb{R}$ respectivement par

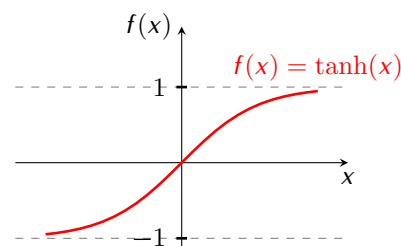
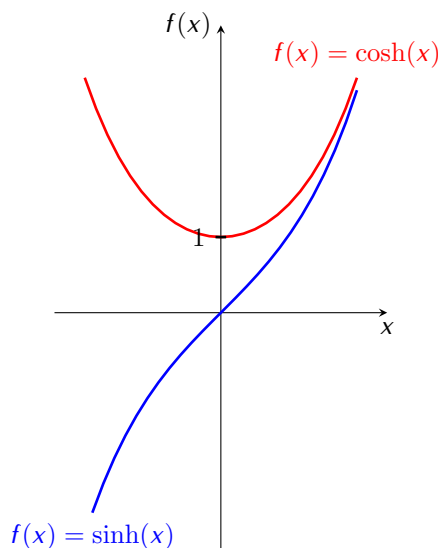
$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{1 + e^{2x}}.$$

Propriétés : $\cosh$ est paire ; $\sinh$ et $\tanh$ sont impaires et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x; \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1; \quad 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Dérivées : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\sinh(x))' = \cosh(x); \quad (\cosh(x))' = \sinh(x); \quad (\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x).$$



Fonctions hyperboliques réciproques.

Fonction argument sinus hyperbolique C'est la bijection réciproque de la fonction $\sinh$. Elle est impaire et on a

$$(\operatorname{argsinh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Fonction argument cosinus hyperbolique C'est la bijection réciproque de la restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction $\cosh(x)$.
Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$(\operatorname{argcosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Fonction argument tangente hyperbolique C'est la bijection réciproque de la fonction $\tanh$. Elle est impaire et pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$(\operatorname{argtanh}(x))' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Propriétés

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

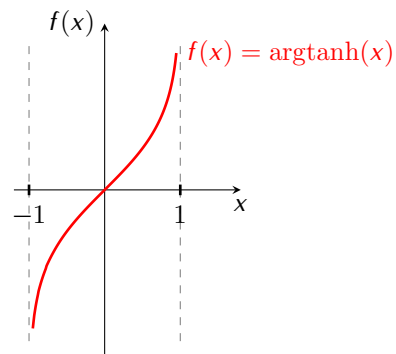
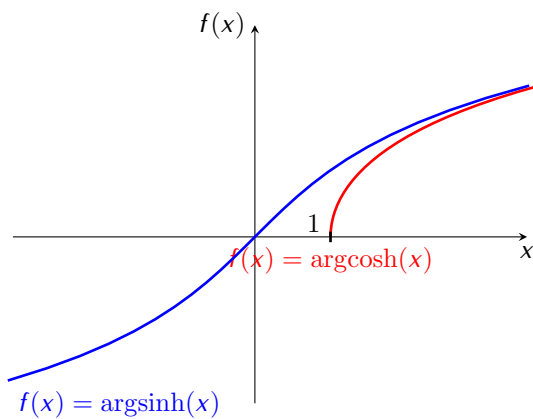
$$\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\forall x \in [1, +\infty[$$

$$\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\forall x \in]-1, 1[$$

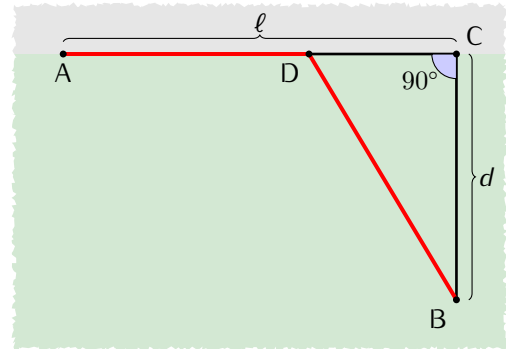
$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$



Exercices

Exercice 12.1

Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ (voir la figure ci-contre). On connaît les distances $AC = \ell$ et $CB = d$ et on sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route. Il quitte la route en un point D de $[AC]$ à préciser. Les trajets de A à D et de D à B sont supposés rectilignes. Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant ℓ et d .



SOLUTION. Soit $AD = x$ avec $0 \leq x \leq \ell$. On a alors $DB = \sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}$. Si v désigne la vitesse du tracteur dans le champ, sa vitesse sur la route est de $2v$ et le temps total mis par le tracteur pour atteindre B depuis A est

$$t(x) = \frac{x}{2v} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}}{v}.$$

On cherche $x \in [0; \ell]$ qui minimise la fonction t . On a

$$t'(x) = \frac{1}{2v} + \frac{-2(\ell - x)}{2v\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2} - 2(\ell - x)}{2v\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}}$$

donc $t'(x) = 0$ si et seulement si $x = \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$ et

$$t''(x) = \frac{d^2}{v((\ell - x)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

ce qui implique que $t'(x) > 0$ si et seulement si $x < \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$. Par conséquent,

- ▷ si $\ell < \frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x) < 0$ pour tout $x \in [0; \ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x = 0$, c'est-à-dire que le tracteur quitte la route en A ;
- ▷ si $\ell > \frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x) < 0$ pour tout $x \in [0; \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}]$ et $t'(x) > 0$ pour tout $x \in [\ell - \frac{d}{\sqrt{3}}; \ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x = \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Exercice 12.2 définition des sinus et cosinus hyperboliques

Sinus et cosinus hyperbolique sont définies par

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Vérifier que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ puis que la dérivée de $\sinh$ est $\cosh$ et la dérivée de $\cosh$ est $\sinh$.
2. Montrer que $\sinh$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa fonction réciproque (notée arsinh) satisfait

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \quad \text{et} \quad \operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

3. Montrer que $\cosh$ est une bijection de $[0, \infty[$ dans $[1, \infty[$ et que sa fonction réciproque (notée $\operatorname{argcosh}$) satisfait

$$\forall y \in [1, \infty[\quad \operatorname{argcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad \text{et} \quad \forall y \in [1, \infty[\quad \operatorname{argcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

SOLUTION. TO DO

? Exercice 12.3 définition des arcsinus et arccosinus

1. Montrer que l'application f de $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, +1]$ définie par

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \quad f(x) := \sin x,$$

est bijective. La fonction réciproque f^{-1} est notée "arcsin". Montrer que

$$\forall y \in]-1, +1[\quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

2. Montrer que l'application g de $[0, \pi]$ dans $[-1, +1]$ définie par

$$\forall x \in [0, \pi] \quad g(x) := \cos x,$$

est bijective. La fonction réciproque g^{-1} est notée "arccos". Montrer que

$$\forall y \in]-1, +1[\quad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

SOLUTION. TO DO

? Exercice 12.4 définition de l'arctangente

Montrer que la fonction f de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\quad f(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$$

est bijective. La fonction réciproque f^{-1} est notée "arctan". Montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \arctan'(y) := \frac{1}{1+y^2}.$$

SOLUTION. TO DO

? Exercice 12.5 application du théorème des accroissements finis

Soit I un intervalle ouvert non vide et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en tout point de I .

1. Montrer que

$$\forall x \in I \quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) = c.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a

$$\arctan(x) + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a

$$\arctan \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \arctan(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x > 1, \\ -\frac{3\pi}{4} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

4. Montrer que pour tout $x \in [-1, +1]$ on a

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

SOLUTION. TO DO

? Exercice 12.6

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
6. graphe

SOLUTION. 1. *Domaine de définition* : il faut $x^2 - 1 > 0$ donc

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$

2. *Comportement aux extrémités du domaine de définition* :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \right) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations* : la dérivée de f est l'application

$$f': \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})}{x^2 - 1}$$

Dans $\mathcal{D}_f$ on a

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]-\infty; -1 - \sqrt{2}[\cup]1; +\infty[,$$

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } x = -1 - \sqrt{2},$$

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]-1 - \sqrt{2}; -1[.$$

On conclut que

▷ f est strictement croissante sur $]-\infty; -1 - \sqrt{2}[$ et sur $]1; +\infty[$,

▷ f est strictement décroissante sur $]-1 - \sqrt{2}; -1[$,

▷ $x = -1 - \sqrt{2}$ est un point de maximum local et on a $f(-1 - \sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2} + \ln(2 + 2\sqrt{2})$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-		+
$f(x)$	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2} + \ln(2 + 2\sqrt{2})$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

4. *Convexité, concavité* : la dérivée seconde de f est l'application

$$f'' : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = -1 - 2x^2$$

Dans $\mathcal{D}_f$ on a $f''(x) < 0$. On conclut que la fonction est concave séparément sur $] -\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$.

5. *Comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptôtes)*

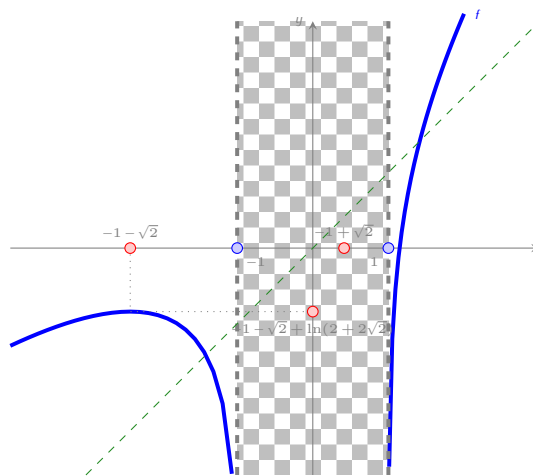
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty.$$

Il n'y a pas d'asymptôtes en $\pm\infty$.

f possède une branche parabolique dans la direction asymptotique x en $+\infty$ et en $-\infty$.

6. *Graph*



? Exercice 12.7

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition et régularité
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
6. graphe

SOLUTION. 1. *Domaine de définition et régularité* : il faut $x^2 - 1 \geq 0$ donc

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\quad \text{et } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}_f).$$

2. *Comportement aux extrémités du domaine de définition* :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations* : la dérivée de f est la fonction

$$f' : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x) = 2 + \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Dans $\mathcal{D}_f \setminus \{\pm 1\}$ on a

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}[\cup]1; +\infty[,$$

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } x = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]-\frac{2}{\sqrt{3}}; -1[$$

et $\lim_{x \rightarrow \pm 1^\pm} f'(x) = +\infty$. On conclut que

▷ f est strictement croissante sur $] -\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}[$ et sur $]1; +\infty[$,

▷ f est strictement décroissante sur $] -\frac{2}{\sqrt{3}}; -1[$,

▷ $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ est un point de minimum local et on a $f(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = -\sqrt{3}$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-		+
$f(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$			$+\infty$

4. *Convexité, concavité* : la dérivée seconde de f est la fonction

$$f'' : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - x \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-1}{x^2-1}$$

Dans $\mathcal{D}_f \setminus \{\pm 1\}$ on a $f''(x) < 0$. On conclut que f est concave sur $\mathcal{D}_f$.

5. *Comportement en $\pm\infty$ (recherche d'un asymptote)*

▷ Si $x > 0$, en calculant le développement asymptotique à l'ordre 2 en $+\infty$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 3 - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o(x^{-2}).$$

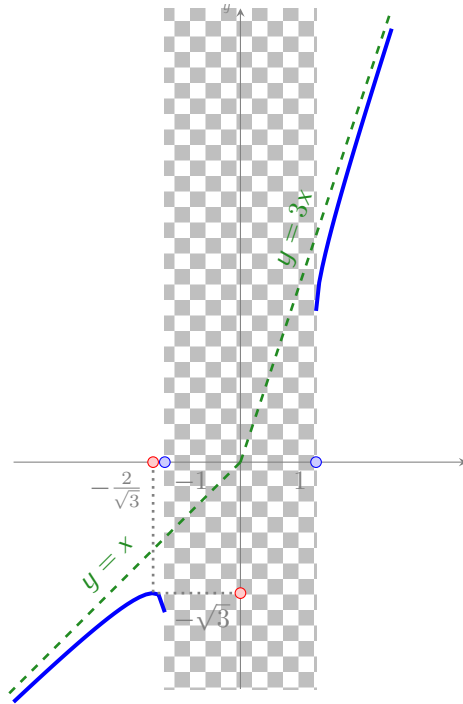
On en déduit que la droite d'équation $y = 3x$ est l'asymptote de f en $+\infty$ (le graphe de f se trouve au dessous de cet asymptote).

▷ Si $x < 0$, en calculant le développement asymptotique à l'ordre 2 en $-\infty$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o(x^{-2}).$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est l'asymptote de f en $-\infty$ (le graphe de f se trouve au dessous de cet asymptote).

6. *Graph*



? Exercice 12.8

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition et régularité
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $+\infty$ (recherche d'asymptotes)
6. graphe

SOLUTION. 1. *Domaine de définition et régularité* : il faut $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ donc

$$\mathcal{D}_f =]0; +\infty[\quad \text{et } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}_f).$$

2. *Comportement aux extrémités du domaine de définition* :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+.$$

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations* : la dérivée de f est la fonction

$$f': \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x) = 2 \frac{\ln x (1 - \ln x)}{x^3}$$

Dans $\mathcal{D}_f$ on a

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]1; e[.$$

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } x = e,$$

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]0; 1[\cup]e; +\infty[.$$

On conclut que

▷ f est strictement croissante sur $]1; e[$,

▷ f est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et sur $]e; +\infty[$,

▷ $x = 1$ est un point de minimum absolu, $x = e$ est un point de maximum local et on a $f(1) = 0$, $f(e) = \frac{1}{e^2}$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		−	+	−
$f(x)$	$+\infty$	0	e^{-2}	0

4. *Convexité, concavité* : la dérivée seconde de f est la fonction

$$f'' : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f''(x) = 2 \frac{3 \ln^2 x - 5 \ln x + 1}{x^4}$$

Dans $\mathcal{D}_f$ on a

$$f''(x) > 0 \text{ ssi } x \in]0; e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}[\cup]e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}; +\infty[,$$

$$f''(x) = 0 \text{ ssi } x = e^{\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}},$$

$$f''(x) < 0 \text{ ssi } x \in]e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}; e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}[.$$

On conclut que

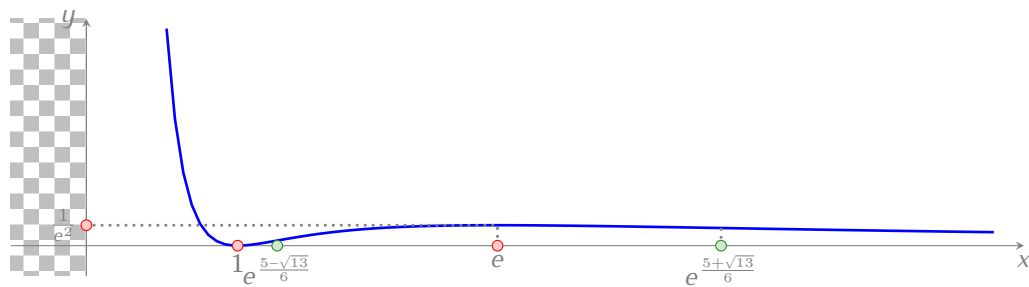
▷ f est convexe sur $]0; e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}[$ et sur $]e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}; +\infty[$,

▷ f est concave sur $]e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}; e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}[$,

▷ $x = e^{\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}}$ sont des flexes.

5. *Comportement en $+\infty$ (recherche d'une asymptote)* : $y = 0$ est asymptote pour $x \rightarrow +\infty$.

6. *Graph*



? Exercice 12.9

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \ln(x - x^5)$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. comportement en $-\infty$ (recherche d'asymptotes)
5. graph

SOLUTION. 1. *Domaine de définition de f* : il faut $x - x^5 > 0$ donc

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +1[.$$

2. *Comportement de f aux extrémités du domaine de définition* :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +1^+} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations de f* : la dérivée de f est l'application

$$\begin{aligned} f' : \mathcal{D}_f &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = \frac{1 - 5x^4}{x(1 - x^4)} \end{aligned}$$

Dans $\mathcal{D}_f$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ ssi } x \in]0; 5^{-1/4}[, \\ f'(x) &= 0 \text{ ssi } x = 5^{-1/4}, \\ f'(x) &< 0 \text{ ssi } x \in]-\infty; -1[\cup]5^{-1/4}; 1[. \end{aligned}$$

On conclut que

- ▷ f est strictement croissante sur $]0; 5^{-1/4}[$,
- ▷ f est strictement décroissante sur $] -\infty; -1[$ et sur $]5^{-1/4}; 1[$,
- ▷ $x_M = 5^{-1/4}$ est un point de minimum local et on a $f(x_M) < 0$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$5^{-1/4}$	$+1$
$f'(x)$	—			+	—
$f(x)$	$+\infty \rightarrow -\infty$			$-\infty \rightarrow f(x_M) \rightarrow -\infty$	

4. *Comportement de f en $-\infty$ (recherche d'un asymptote)* :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

Il n'y a pas d'asymptotes en $-\infty$.

5. *Graphes de f* : voir la figure 12.1.

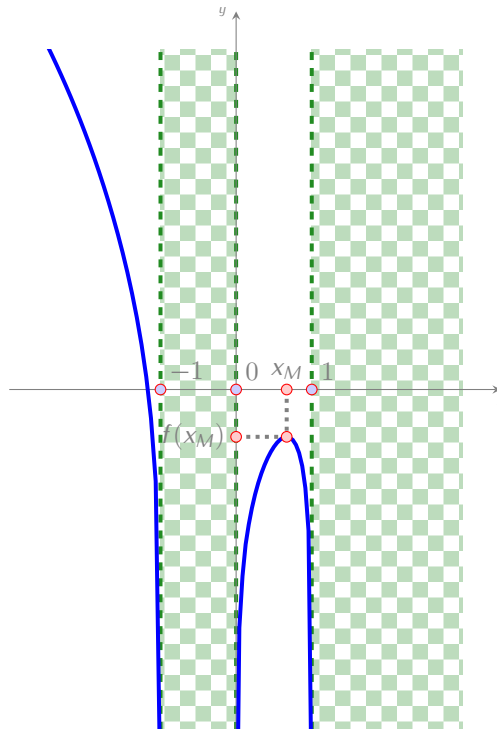
? Exercice 12.10

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2) - 1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
5. graphe

FIGURE 12.1: $f(x) = \ln(x - x^5)$.

SOLUTION. La fonction est paire, i.e. $f(-x) = f(x)$: on étudie donc seul la fonction f^+ restriction de f à $\mathbb{R}^+$.

1. *Domaine de définition de f^+* : il faut $\begin{cases} \ln(x^2) - 1 \neq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$ donc

$$\mathcal{D}_{f^+} =]0, \sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}, +\infty[.$$

2. *Comportement de f^+ aux extrémités du domaine de définition* :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f^+(x) &= 0^-, & \lim_{x \rightarrow (\sqrt{e})^-} f^+(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow (\sqrt{e})^+} f^+(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f^+(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations de f^+* : la dérivée de f^+ est l'application

$$\begin{aligned} (f^+)' : \mathcal{D}_{f^+} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (f^+)'(x) &= \frac{2x(2 \ln x - 1) - x^2 \frac{2}{x}}{(2 \ln x - 1)^2} = 4 \frac{x(\ln x - 1)}{(2 \ln x - 1)^2} \end{aligned}$$

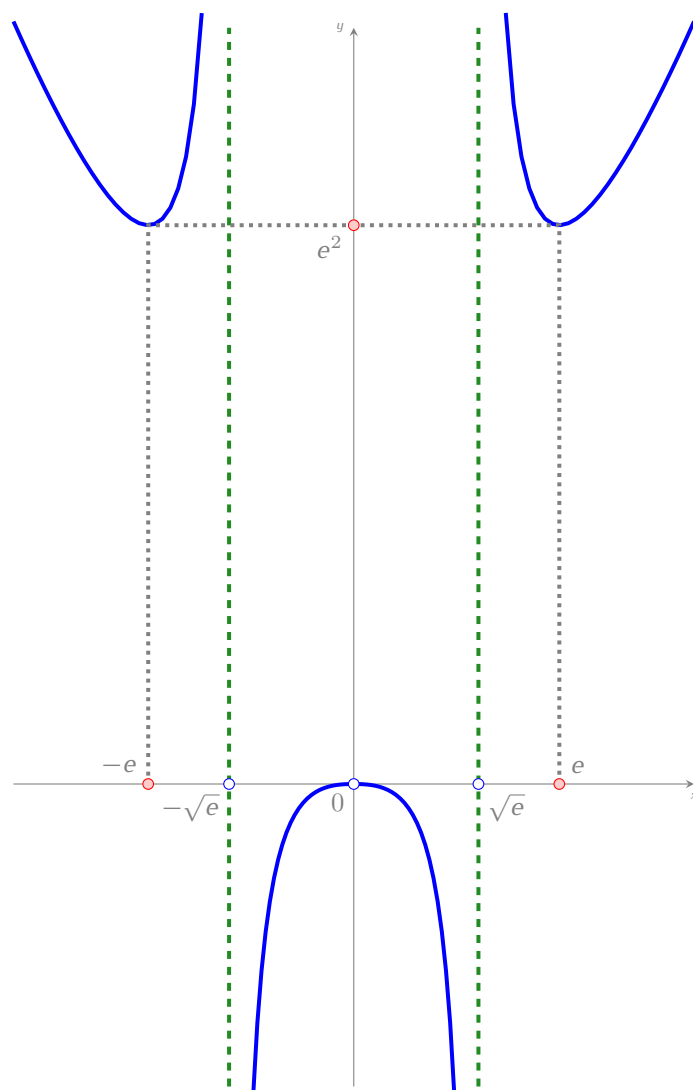
Dans $\mathcal{D}_{f^+}$ on a

$$\begin{aligned} (f^+)'(x) &> 0 \text{ ssi } x \in]e; +\infty[, \\ (f^+)'(x) &= 0 \text{ ssi } x = e, \\ (f^+)'(x) &< 0 \text{ ssi } x \in]0; \sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; e[\end{aligned}$$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$. On conclut que

- ▷ f^+ est strictement croissante sur $]e; +\infty[$,
- ▷ f^+ est strictement décroissante sur $]0; \sqrt{e}[$ et sur $] \sqrt{e}; e[$,
- ▷ $x = e$ est un point de minimum local et on a $f^+(e) = e^2$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

FIGURE 12.2: $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)-1}$

x	0	$\sqrt{e}$	e	$+\infty$
$(f^+)'(x)$	—	—	0	+
$f^+(x)$	0 $\rightarrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\rightarrow$ e^2	e^2	$+\infty$

4. Comportement de f^+ en $+\infty$ (recherche d'une asymptote) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^+(x)}{x} = +\infty.$$

Il n'y a pas d'asymptotes en $+\infty$.

5. Graphe de f : voir la figure 12.2.

? Exercice 12.11

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Établir si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
5. Calculer les limites de f aux extrémités du domaine de définition.
6. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. Étudier le comportement de f en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes).
8. Dresser le graphe de f .

SOLUTION. L'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se réécrit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^2 \ln(-x), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. f est continue en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln |x| = 0 = f(0).$$

2. La dérivée de f est l'application $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \ln x + x, & \text{si } x > 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0, & \text{si } x = 0, \\ 2x \ln(-x) + x, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \ln |x| + x, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. f' est continue en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \ln |x| + x = 0 = f'(0).$$

4. $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car elle est clairement continue dans $\mathbb{R}$ (l'unique point délicat était 0 mais on a vu qu'elle y est continue) et de même pour sa dérivée première.

5. Limites de f aux extrémités du domaine de définition :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

6. On a

$$\triangleright f'(x) = 0 \text{ ssi } x \in \left\{0, \pm \frac{1}{\sqrt{e}}\right\},$$

$$\triangleright f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}}; 0\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[,$$

$$\triangleright f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{e}}\right[\cup \left]0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right[;$$

donc

$$\triangleright f \text{ est croissante pour } x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}}; 0\right[\text{ et pour } x \in \left]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[,$$

$$\triangleright f \text{ est décroissante pour } x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{e}}\right[\text{ et pour } x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right[,$$

$$\triangleright f \text{ a un maximum (locale) en } x = 0 \text{ et } f(0) = 0,$$

$$\triangleright f \text{ a un minimum (absolue) en } x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ et } f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{2e}$	0	$-\frac{1}{2e}$	$+\infty$

7. Comportement de f en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

Il n'y a pas d'asymptotes en $\pm\infty$.

8. Graphe de f : voir la figure 12.3.

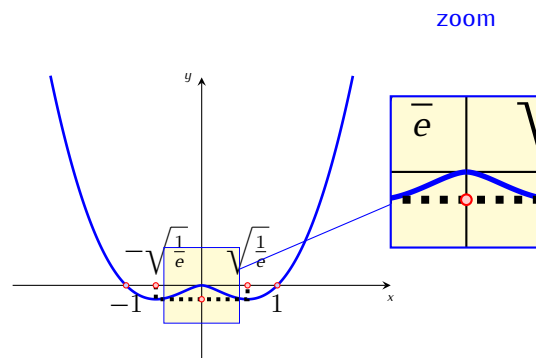


FIGURE 12.3: Graphe de f .

? Exercice 12.12

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \ln |x-1|, & \text{si } x \neq 1, \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 1$, puis $f'(1)$.
3. Étudier la continuité de f' en 1.
4. Écrire l'équation de la tangente au graphe de f au point $(1, 0)$. Écrire l'équation de la tangente au graphe de f au point $(2, 0)$.
5. Établir si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
6. Calculer les limites de f aux extrémités du domaine de définition.
7. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
8. Dresser le graphe de f .

SOLUTION. L'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se réécrit

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \ln(x-1), & \text{si } x > 1, \\ 0, & \text{si } x = 1, \\ (1-x)^2 \ln(1-x), & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1. f est continue en 1 car

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \ln |x-1| = 0 = f(1).$$

2. La dérivée de f est l'application $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) \ln(x-1) + (x-1), & \text{si } x > 1, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln |x-1| = 0, & \text{si } x = 1, \\ 2(1-x) \ln(1-x) + (1-x), & \text{si } x < 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$f'(x) = \begin{cases} (1 + 2 \ln |x - 1|)|x - 1|, & \text{si } x \neq 1, \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

3. f' est continue en 1 car

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + 2 \ln |x - 1|)|x - 1| = 0 = f'(1).$$

4. L'équation de la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est $y = mx + q$ où $m = f'(x_0)$ et $q = f(x_0) - mx_0$. Par conséquent l'équation de la tangente au graphe de f au point $(1, 0)$ est $y = 0$ et l'équation de la tangente au graphe de f au point $(2, 0)$ est $y = x - 2$.

5. $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car elle est clairement continue dans $\mathbb{R}$ (l'unique point délicat était 1 mais on a vu qu'elle y est continue) et de même pour sa dérivée première.

6. Limites de f aux extrémités du domaine de définition :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

7. On a

$$\triangleright f'(x) = 0 \text{ ssi } x \in \left\{0, 1 \pm \frac{1}{\sqrt{e}}\right\},$$

$$\triangleright f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in \left]1 - \frac{1}{\sqrt{e}}; 0\right[\cup \left]1 + \frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[,$$

$$\triangleright f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in \left]-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right[\cup \left]0; 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}\right[;$$

donc

$$\triangleright f \text{ est croissante pour } x \in \left]1 - \frac{1}{\sqrt{e}}; 0\right[\text{ et pour } x \in \left]1 + \frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[,$$

$$\triangleright f \text{ est décroissante pour } x \in \left]-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right[\text{ et pour } x \in \left]0; 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}\right[,$$

$$\triangleright f \text{ a un maximum (locale) en } x = 1 \text{ et } f(0) = 0,$$

$$\triangleright f \text{ a un minimum (absolue) en } x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ et } f(1 \pm \frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}.$$

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$	$1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$	1	$1 + \frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{2e}$	0	$-\frac{1}{2e}$	$+\infty$

8. Graphe de f : voir la figure 12.4.

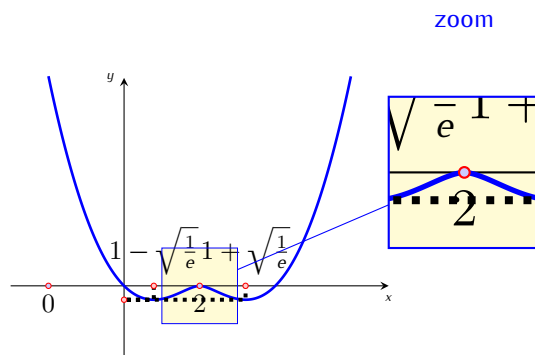


FIGURE 12.4: Graphe de f .

? Exercice 12.13

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2}.$$

1. Trouver le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
2. Calculer les limites de f aux extrémités du domaine de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f , son domaine de définition et étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f .
5. Établir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis en $+\infty$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à ces asymptotes.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f .

SOLUTION. 1. La fonction $\star \mapsto \sqrt{\star}$ n'est définie que si $\star \geq 0$ donc

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 2 \geq 0\} =]-\infty; -1 - \sqrt{3}] \cup [-1 + \sqrt{3}; +\infty[.$$

2. Observons d'abord que $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2} = 2x + |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 - \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1 - \sqrt{3}} 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2} = f(-1 - \sqrt{3}) = -2 - 2\sqrt{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1 + \sqrt{3}} 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2} = f(-1 + \sqrt{3}) = -2 + 2\sqrt{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) = +\infty.$$

3. $f'(x) = 2 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 2}}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_f \setminus \{-1 \pm \sqrt{3}\}$ (car il faut exclure les $x \in \mathcal{D}_f$ qui annulent le dénominateur).
Pour en étudier le signe on se rappelle que

	Solutions de l'équation $A(x) = \sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x) > \sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x) < \sqrt[n]{B(x)}$
Si n est im- pair	$(A(x))^n = B(x)$	$(A(x))^n > B(x)$	$(A(x))^n < B(x)$
Si n est pair	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ (A(x))^n = B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ (A(x))^n > B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ (A(x))^n < B(x) \end{cases}$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 2\sqrt{x^2 + 2x - 2} + x + 1 = 0 \iff \underbrace{-\frac{x+1}{2}}_{A(x)} = \underbrace{\sqrt{x^2 + 2x - 2}}_{\sqrt{B(x)}} \\ &\iff \begin{cases} -\frac{x+1}{2} \geq 0, \\ x^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 8x - 8, \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1, \\ x^2 + 2x - 3 = 0, \end{cases} \iff x = -3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \frac{x+1+2\sqrt{x^2+2x-2}}{\sqrt{x^2+2x-2}} > 0 \iff x+1+2\sqrt{x^2+2x-2} > 0 \\ &\iff \underbrace{-\frac{x+1}{2}}_{A(x)} < \underbrace{\sqrt{x^2+2x-2}}_{\sqrt{B(x)}} \iff \begin{cases} -\frac{x+1}{2} < 0, \\ x^2+2x-2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -\frac{x+1}{2} \geq 0, \\ x^2+2x+1 < 4x^2+8x-8, \end{cases} \iff x > -1+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

4. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-3	$-1 - \sqrt{3}$	$-1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	-5	$-2 - 2\sqrt{3}$	$-2 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$

5. On a

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 2 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} & \text{si } x > 0, \\ 2 - \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} & \text{si } x < -1 - \sqrt{3} \cup -1 + \sqrt{3} \leq x < 0, \end{cases}$$

donc

▷ le développement limité de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ à l'ordre 2 est

$$g(t) = tf(1/t) = 2 - \sqrt{1 + 2t - 2t^2} = 2 - 1 - \frac{(2t - 2t^2)}{2} + \frac{(2t - 2t^2)^2}{8} + o(t^2) = 1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

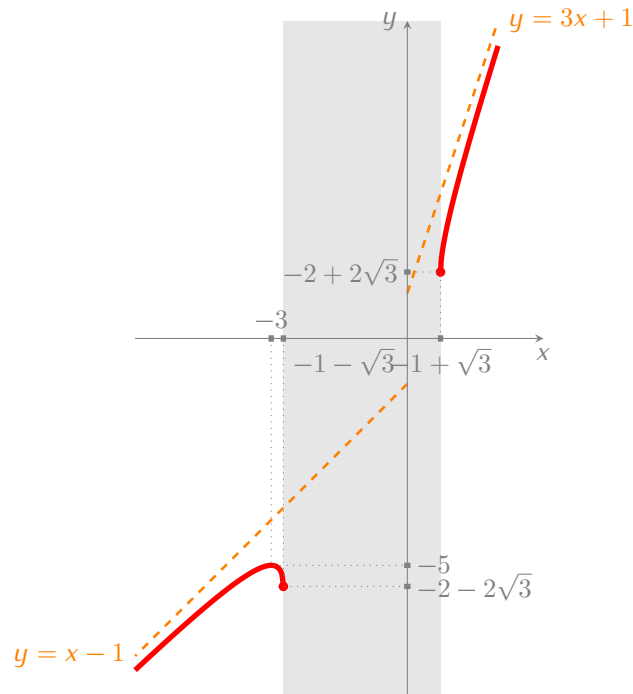
donc $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(x^{-2})$ est le développement limité de $f(x)/x$ en $-\infty$ à l'ordre 2. On conclut que $y = x - 1$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f en $-\infty$; l'asymptote est en dessous de la courbe;

▷ le développement limité de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2 est

$$g(t) = tf(1/t) = 2 + \sqrt{1 + 2t - 2t^2} = 2 + 1 + \frac{(2t - 2t^2)}{2} - \frac{(2t - 2t^2)^2}{8} + o(t^2) = 3 + t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

donc $3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(x^{-2})$ est le développement limité de $f(x)/x$ en $+\infty$ à l'ordre 2. On conclut que $y = 3x + 1$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$; l'asymptote est au dessus de la courbe.

6. On a le graphe suivant



? Exercice 12.14

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}.$$

1. Trouver le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .



2. Calculer les limites de f aux extrémités du domaine de définition.
3. Préciser les asymptotes éventuelles et la position de la courbe par rapport aux asymptotes.
4. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f et étudier son signe.
5. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f .
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f .

SOLUTION. 1. Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est l'ensemble $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ et } x \neq 0\}$.

2. On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \mp\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Rechercher l'existence d'une asymptote revient à rechercher un développement limité au voisinage de 0 de la fonction $g(t) = f(1/t)$:

$$g(t) = \frac{1}{t} \frac{1}{1+t} e^t = \frac{1}{t} (1 - t + t^2 + o(t^3)) \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = \frac{1}{t} + \frac{t}{2} + o(t)$$

d'où $f(x) = x + \frac{1}{2x} + o(1/x)$. La courbe $y = f(x)$ admet donc la droite d'équation $y = x$ pour asymptote à la fois lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, $f(x) - x$ est du signe de $\frac{1}{2x}$: la courbe est donc en-dessous de l'asymptote lorsque x tend vers $-\infty$ et au-dessus lorsque x tend vers $+\infty$.

4. La dérivée $f'(x)$ de f est

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{x^2}{x+1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x}}$$

donc le domaine de définition $\mathcal{D}_{f'}$ de f' est encore l'ensemble $\mathcal{D}_f$ et

- ▷ $f'(x) = 0$ si $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
- ▷ $f'(x) > 0$ si $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
- ▷ $f'(x) < 0$ si $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
- ▷ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$.

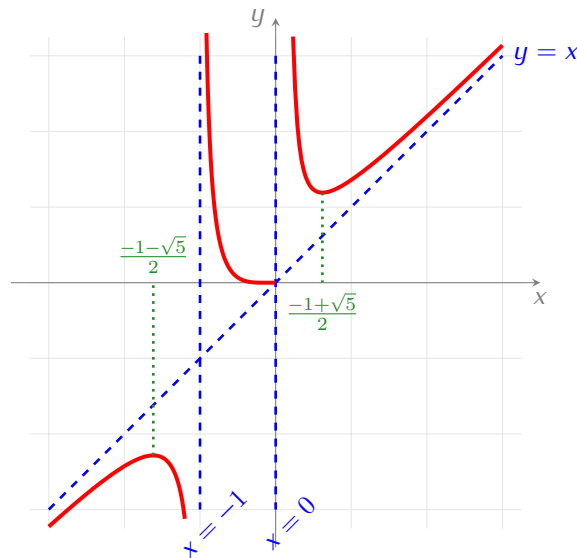
5. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	-1	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	≈ -2.283253698	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

On en déduit que

- ▷ f est croissante sur $[-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}]$ et sur $[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty]$,
- ▷ f est décroissante sur $[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1]$, sur $[-1; 0]$ et sur $[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$,
- ▷ $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ est un maximum local, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ un minimum local.

6. Allure de la courbe de f :

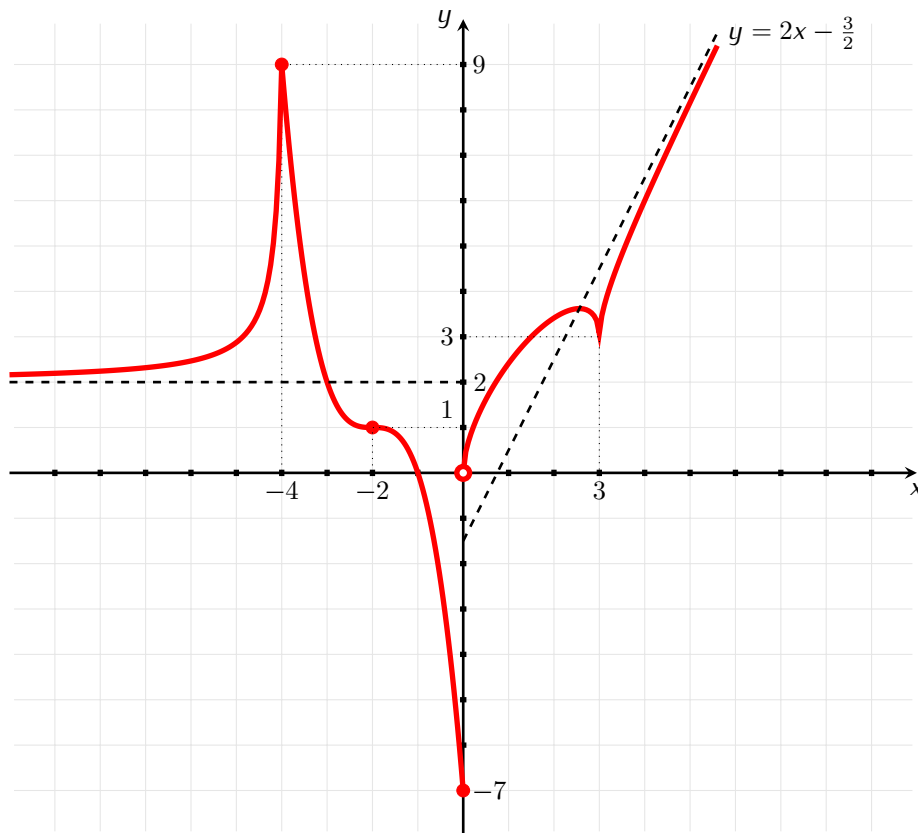


? Exercice 12.15

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{7}{7x-27} & \text{si } x \leq -4, \\ 1 - (x+2)^3 & \text{si } -4 < x \leq 0, \\ x + \sqrt{|x^2 - 3x|} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes (pour la plupart des questions il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse) :

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -4$, en $x = -2$, en $x = 0$ et en $x = 3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces points.

3. Quel est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$? Et en $x = 4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$?
5. Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$?
6. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
8. Qui est le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre? Et en $-\infty$?

SOLUTION.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Considérons chaque point séparément :
 - ▷ f est continue en -4 et $f(-4) = 9$; elle n'est pas dérivable en $x = -4$ car $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2 - \frac{7}{7(h-4)-27} - 9}{h} = \frac{49}{(55)^2}$ tandis que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - (-4+h+2)^3 - 9}{h} = -12$;
 - ▷ f est continue en -2 et $f(-2) = 1$; f est dérivable en -2 et $f'(-2) = 0$;
 - ▷ f n'est pas continue en $x = 0$ car $f(0) = 1 - (-4+2)^3 = -7$ mais $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x + \sqrt{|x^2 - 3x|} = 0$;
 - ▷ f est continue en $x = 3$ et $f(3) = 3$; elle n'est pas dérivable en $x = 3$ car $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h+3+\sqrt{3(h+3)-(h+3)^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h+3+\sqrt{-h(h+3)}}{h} = \infty$ et de même $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h+3+\sqrt{(h+3)^2-3(h+3)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h+3+\sqrt{h(h+3)}}{h} = \infty$.
3. L'équation de la droite tangente en x_0 au graphe d'une fonction f dérivable en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Par conséquent l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$ est $y = 1$ et en $x = 4$ est $y = f'(4)(x - 4) + f(4) = \frac{9}{4}x - 3$.
4. $f'(x) = 0$ pour $x = -2$ et $x = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $f'(x)$ n'existe pas pour $x \in \{-4, 0, 3\}$, $f'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; -4[\cup]0; \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) [\cup]3; +\infty[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]-4; -2[\cup]-2; 0[\cup]\frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right); 3[$.
5. $f''(x) = 0$ pour $x = -2$, $f''(x)$ n'existe pas pour $x \in \{-4, 0, 3\}$, $f''(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; -4[\cup]-4; -2[$ et $f''(x) < 0$ pour $x \in]-2; 0[\cup]0; 3[\cup]3; +\infty[$.
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est asymptote en $-\infty$.
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
8. Le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote oblique, donc c'est $2x - \frac{3}{2} + o(x^{-1})$.
9. Le développement limité asymptotique en $-\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote, donc c'est $1 + o(x^{-1})$.

? Exercice 12.16

Considérons la fonction $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{3x+1}}{x^2 - 2x}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition A .
2. Trouver le signe de f .
3. Trouver les limites où f n'est pas définie et pour $x \rightarrow \pm\infty$.
4. Trouver la dérivée de f et où f est croissante ou décroissante.
5. Dessiner le graphe de f .

SOLUTION.

1. Pour que $\frac{1}{x}$ soit définie il faut que $x \neq 0$ donc

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x \neq 0\} =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}.$$

2. Comme $e^* > 0$ pour tout $* \in \mathbb{R}$, le signe de f coïncide avec le signe du dénominateur et on a

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff \nexists x \in A, \\ f(x) > 0 &\iff x^2 - 2x > 0 \iff x(x-2) > 0 \iff x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, \\ f(x) < 0 &\iff x^2 - 2x < 0 \iff x(x-2) < 0 \iff x \in]0; 2[. \end{aligned}$$

3. Trouver les limites où f n'est pas définie et pour $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 0^+ & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \mp\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

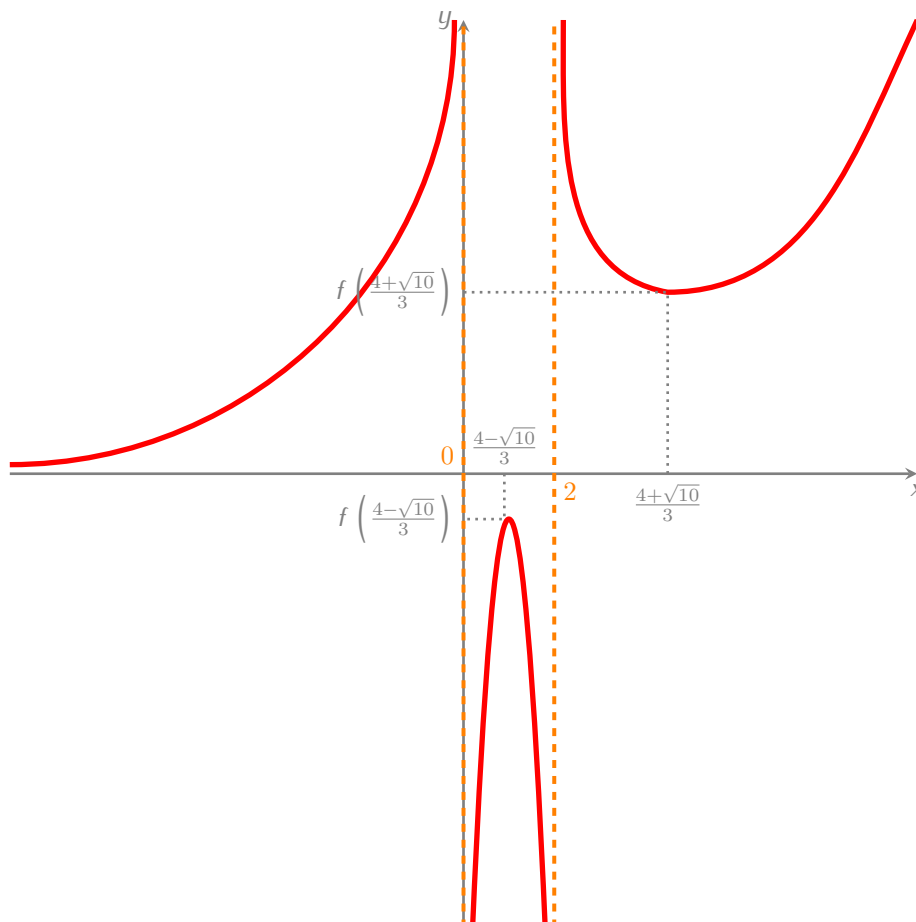
donc $y = 0$ est asymptote horizontale à $-\infty$, $y = 0$ et $y = 2$ sont asymptotes verticales et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ il n'y a pas d'asymptotes à $+\infty$.

$$4. f'(x) = \frac{(e^{3x+1})'(x^2 - 2x) - (e^{3x+1})(x^2 - 2x)'}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{3(e^{3x+1})(x^2 - 2x) - (e^{3x+1})(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{e^{3x+1}}{(x^2 - 2x)^2} (3x^2 - 8x + 2).$$

Comme $\frac{e^{3x+1}}{(x^2 - 2x)^2} > 0$ pour tout $x \in A$, le signe de f' coïncide avec le signe de $3x^2 - 8x + 2$ et on a

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x + 2 = 0 &\iff x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}, \\ 3x^2 - 8x + 2 > 0 &\iff x \in \left] -\infty; \frac{4 - \sqrt{10}}{3} \right[\cup \left] \frac{4 + \sqrt{10}}{3}; +\infty \right[, \\ 3x^2 - 8x + 2 < 0 &\iff x \in \left] \frac{4 - \sqrt{10}}{3}; \frac{4 + \sqrt{10}}{3} \right[. \end{aligned}$$

5. Le graphe de f (non à l'échelle) est le suivant :



? Exercice 12.17

Tracer le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$$

en détaillant

1. son domaine et son signe,
2. les limites pour $x \rightarrow \pm\infty$,
3. étudier la dérivée de f .

SOLUTION.

1. Pour que $\frac{1}{*}$ soit défini il faut que $* \neq 0$ donc le domaine de définition A de f est l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 \neq 0\} =]-\infty; 1[\cup]1; 4[\cup]4; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}.$$

Étude du signe de f :

	$\mathbb{R}$				
	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
signe du numérateur	$-$	0	$+$	$+$	$+$
signe du dénominateur	$+$	$+$	0	$-$	$+$
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

2. Limites de f pour $x \rightarrow \pm\infty$ (et où f n'est pas définie) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \mp\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

donc

- ▷ $y = 0$ est asymptote horizontale à $-\infty$ et à $+\infty$,
- ▷ $y = 1$ et $y = 4$ sont asymptotes verticales.

3. Dérivée première :

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2 - 5x + 4) - x(x^2 - 5x + 4)'}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \frac{(x^2 - 5x + 4) - x(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 - 5x + 4)^2}.$$

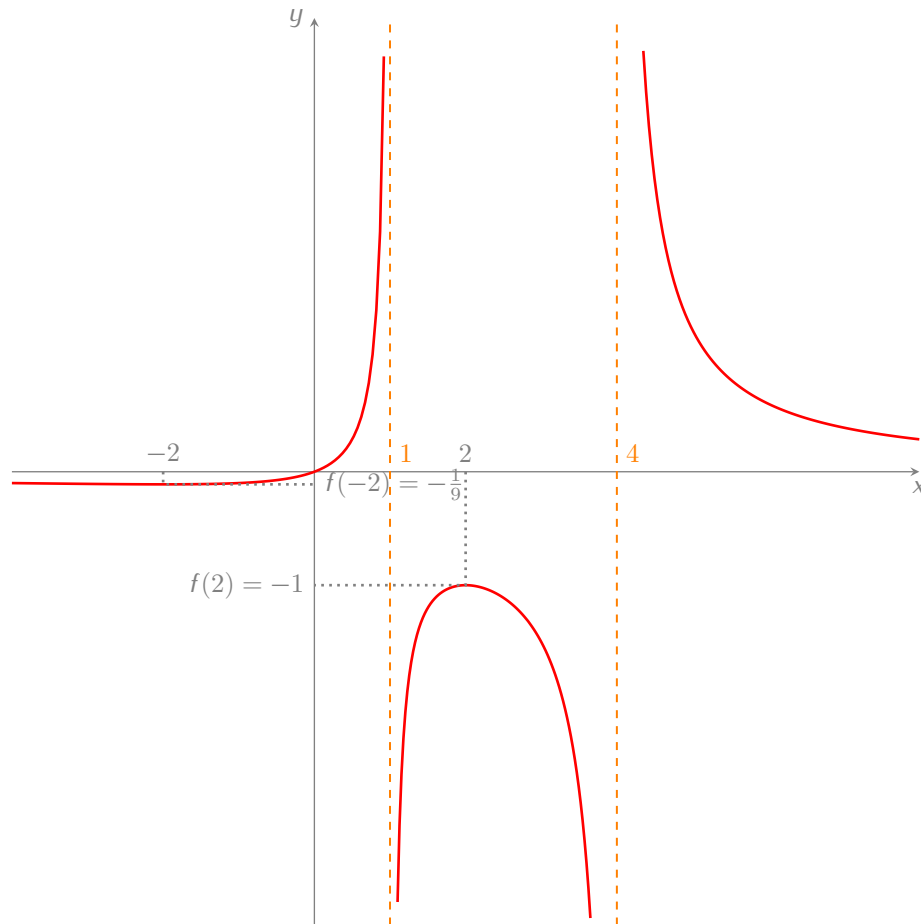
Comme $(x^2 - 5x + 4)^2 > 0$ pour tout $x \in A$, le signe de f' coïncide avec le signe de $-x^2 + 4$ et on a

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm 2,$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in]-\infty; -2[\cup]2; 4[\cup]4; +\infty[,$$

$$f'(x) > 0 \iff x \in]-2; 1[\cup]1; 2[.$$

Ainsi, le graphe de f est le suivant :



? Exercice 12.18

Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-b\}$ telle que $f(x) = \frac{ax^2 - 4}{x + b}$. On note $\mathcal{G}$ la courbe représentative de f .

- ☐ 1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est prolongeable par continuité en $x = -b$.
- ☐ 2. Si $b = -2/\sqrt{a}$ et $a > 0$ alors f est prolongeable par continuité en $x = -b$.
- ☐ 3. Si $b = 2/\sqrt{a}$ et $a > 0$ alors f est prolongeable par continuité en $x = -b$.
- ☐ 4. $\mathcal{G}$ admet une asymptote verticale pour tout a et b .
- ☐ 5. Il existe au moins une valeur de a telle que $\mathcal{G}$ admet une asymptote horizontale.
- ☐ 6. Il existe au moins une valeur de $a \neq 0$ telle que $\mathcal{G}$ admet une asymptote oblique.
- ☐ 7. Soit $a = b = 1$, alors $\mathcal{G}$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
- ☐ 8. Soit $a = -1$ et $b = 1$, alors $\mathcal{G}$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

SOLUTION. ☐ 1. Faux : si $a = 0$, $f(x) = \frac{-4}{x+b}$ et $\lim_{x \rightarrow -b^\pm} f(x) = \mp\infty$

■ 2. Vrai : si $a > 0$, on peut écrire $f(x) = a \frac{(x - \frac{2}{\sqrt{a}})(x + \frac{2}{\sqrt{a}})}{x+b}$, donc si $b = -2/\sqrt{a}$ alors $f(x) = a \left(x + \frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow -b} f(x) = 4\sqrt{a}$

■ 3. Vrai : si $a > 0$, on peut écrire $f(x) = a \frac{(x - \frac{2}{\sqrt{a}})(x + \frac{2}{\sqrt{a}})}{x+b}$, donc si $b = 2/\sqrt{a}$ alors $f(x) = a \left(x - \frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow -b} f(x) = -4\sqrt{a}$

☐ 4. Faux : si $b = \pm 2/\sqrt{a}$ et $a > 0$, $f(x) = a \left(x \mp \frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ donc $\mathcal{G}$ n'admet d'asymptote verticale

■ 5. Vrai : si $a = 0$ alors $f(x) = \frac{-4}{x+b}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ donc $y = 0$ est asymptote horizontale de $\mathcal{G}$.

- 6. Vrai : pour tout $a \neq 0$, la droite d'équation $y = ax - ab$ est asymptote oblique de $\mathcal{G}$ car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = a$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = -ab$.
- 7. Faux : si $a = b = 1$, alors $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1} = x - 1 - \frac{3}{x+1}$ et son asymptote oblique est $y = x - 1$ donc $f(x) < x - 1$ pour $x \rightarrow +\infty$: $\mathcal{G}$ est en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
- 8. Faux : si $a = -1$ et $b = 1$, alors $f(x) = \frac{-x^2-4}{x+1} = -x + 1 - \frac{5}{x+1}$ et son asymptote oblique est $y = -x + 1$ donc $f(x) < -x + 1$ pour $x \rightarrow +\infty$: $\mathcal{G}$ est en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

? Exercice 12.19

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Alors l'expression de f peut être...

- ☐ 1. $f(x) = |x| + 1$
- ☐ 2. $f(x) = e^x - x$
- ☐ 3. $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$
- ☐ 4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
- ☐ 5. $f(x) = \ln(x^2+1)$

SOLUTION. ■ 1. Vrai : $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, f est paire et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$

■ 2. Vrai : $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = e^x - 1$ et $e^x = 1$ ssi $x = 0$, $e^x > 1$ si $x > 0$, $e^x < 1$ si $x < 0$

□ 3. Faux : $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2+1}{-x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donc $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = \frac{(x-(-1-\sqrt{2}))(x-(-1+\sqrt{2}))}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = -\frac{(x-(1-\sqrt{2}))(x-(1+\sqrt{2}))}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ainsi

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	0	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$(2 - \sqrt{2})\sqrt{2}$	1	$(2 - \sqrt{2})\sqrt{2}$	$+\infty$

■ 4. Vrai : $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, f est paire et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$

□ 5. Faux : $f(0) = \ln(1) = 0 \neq 1$

Primitives

 Primitive

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est *intégrable* s'il existe une fonction dérivable $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Une telle fonction F est une *primitive* (ou *intégrale indéfinie*) de f .

 Existence des primitives

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable.

 Propriété

- ▷ Si F est une primitive de f alors, pour tout réel c , la fonction $F + c$ est aussi une primitive de f .
- ▷ Toute primitive de f est nécessairement de la forme $F + c$ pour une certaine constante c .

 Notation

L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f$ ou encore $\int f(x) \, dx$.

 Remarque

Si $a \in I$ alors $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ est l'unique primitive qui s'annule en a .

 Linéarité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $k \in \mathbb{R}$. Alors

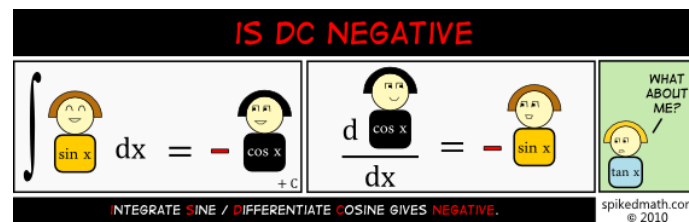
$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \quad \text{et} \quad \int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx.$$

Calcul des primitives

 Intégration directe

Dans le tableau qui suit on sous-entend que l'intégration est réalisée sur un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de la fonction à intégrer.

$$\begin{aligned}
\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c & \Rightarrow \int [f(x)]^n f'(x) dx &= \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln(x) + c & \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln(|f(x)|) + c \\
\int e^x dx &= e^x + c & \Rightarrow \int e^{f(x)} f'(x) dx &= e^{f(x)} + c \\
\int a^x dx &= (\log_a e) a^x + c & \Rightarrow \int a^{f(x)} f'(x) dx &= (\log_a e) a^{f(x)} + c \\
\int \sin(x) dx &= -\cos(x) + c & \Rightarrow \int \sin(f(x)) f'(x) dx &= -\cos(f(x)) + c \\
\int \cos(x) dx &= \sin(x) + c & \Rightarrow \int \cos(f(x)) f'(x) dx &= \sin(f(x)) + c \\
\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx &= \tan(x) + c & \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx &= \tan(f(x)) + c \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c & \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx &= \arcsin(f(x)) + c = -\arccos(f(x)) + c \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan(x) + c & \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx &= \arctan(f(x)) + c \\
\int \cosh(x) dx &= \sinh(x) + c & \Rightarrow \int \cosh(f(x)) f'(x) dx &= \sinh(f(x)) + c \\
\int \sinh(x) dx &= \cosh(x) + c & \Rightarrow \int \sinh(f(x)) f'(x) dx &= \cosh(f(x)) + c \\
\int \frac{1}{\cosh^2(x)} dx &= \tanh(x) + c & \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\cosh^2(f(x))} dx &= \tanh(f(x)) + c
\end{aligned}$$



Intégration par changement de variable

Soit F une primitive de f et g une fonction dérivable. Alors la fonction $f(g(x))g'(x)$ est intégrable et l'on a

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c.$$

Autrement dit, en posant $u = g(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = g'(x)$, soit encore $du = g'(x) dx$ et donc

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c.$$

Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions dérivables. Alors

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

Exemple

Calculer une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ avec les trois méthodes décrites ci-dessus.

Intégration directe :

comme $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int f(x)f'(x) dx$ avec $f(x) = \ln(x)$ et comme $\int f(x)f'(x) dx = \frac{[f(x)]^2}{2}$ on conclut que $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + c$.

Intégration par changement de variable :

on pose $u = \ln(x)$ donc $du = \frac{dx}{x}$ et $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln^2(x)}{2} + c$.

Intégration par parties :

si on pose $g(x) = \ln(x)$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$ alors $g'(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = \ln(x)$ donc $\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2(x) - \int \frac{\ln x}{x} dx$, i.e. $2 \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x + c$ et finalement $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + k$.

Fonctions rationnelles

Fonction rationnelle

Soit $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes de degré respectivement ν et δ . Toute fonction du type $P(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ est dite *fonction rationnelle*.

- ▷ Si $\nu \geq \delta$ on dit que P est une *fonction rationnelle impropre*.
- ▷ Si $\nu < \delta$ on dit que P est une *fonction rationnelle propre*.

Propriété

Soit $P(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fonction rationnelle impropre avec N et D deux polynômes de degré respectivement ν et δ (ainsi $\nu \geq \delta$). Alors, en effectuant la division euclidienne de N par D , on peut réécrire P comme

$$P(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

où Q est un polynôme de degré $\nu - \delta$ et R un polynôme de degré au plus $\delta - 1$, ainsi $\frac{R(x)}{D(x)}$ est une fonction rationnelle propre.

On en déduit que

$$\int P(x) dx = \int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx.$$

L'intégration de Q étant triviale, on conclut que la difficulté de l'intégration d'une fonction rationnelle se réduit à l'intégration d'une fonction rationnelle propre.

Propriété

Si $\frac{R(x)}{D(x)}$ est une fonction rationnelle propre et si $D(x)$ possède

- ▷ k racines réelles a_k chacune de multiplicité m_k et
 - ▷ h couples de racines complexes conjuguées qui sont racines du polynôme $x^2 + b_h x + d_h$ chacune de multiplicité n_h (ainsi $\Delta = b_h^2 - 4d_h < 0$ pour tout h),
- alors D s'écrit

$$D(x) = c(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_k)^{m_k}(x^2 + b_1 x + d_1)^{n_1}(x^2 + b_2 x + d_2)^{n_2} \dots (x^2 + b_h x + d_h)^{n_h}$$

et $\frac{R(x)}{D(x)}$ se décompose en *fractions simples* sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{D(x)} = & \frac{A_{1,1}}{x - a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,m_1}}{(x - a_1)^{m_1}} \\ & + \frac{A_{2,1}}{x - a_2} + \frac{A_{2,2}}{(x - a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2,m_2}}{(x - a_2)^{m_2}} \\ & + \dots + \\ & + \frac{A_{k,1}}{x - a_k} + \frac{A_{k,2}}{(x - a_k)^2} + \dots + \frac{A_{k,m_k}}{(x - a_k)^{m_k}} \\ & + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + b_1 x + d_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + b_1 x + d_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2 + b_1 x + d_1)^{n_1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2 + b_2x + d_2} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2 + b_2x + d_2)^2} + \dots + \frac{B_{2,n_2}x + C_{2,n_2}}{(x^2 + b_2x + d_2)^{n_2}} \\
& + \dots + \\
& + \frac{B_{h,1}x + C_{h,1}}{x^2 + b_hx + d_h} + \frac{B_{h,2}x + C_{h,2}}{(x^2 + b_hx + d_h)^2} + \dots + \frac{B_{h,n_h}x + C_{h,n_h}}{(x^2 + b_hx + d_h)^{n_h}}
\end{aligned}$$

où les $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des constantes.

Pour intégrer une fonction rationnelle il suffit alors de connaître les primitives des fractions simples

$$f_1(x) = \frac{A}{x-a}, \quad f_2(x) = \frac{A}{(x-a)^n}, \quad f_3(x) = \frac{Bx+C}{x^2+bx+d}, \quad f_4(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n}.$$

Intégration des fractions simples

Supposons

▷ $A, B, C, a, b, d \in \mathbb{R}$

▷ $n \in \mathbb{N}, n > 1$

▷ $\Delta = b^2 - 4d < 0$

alors

1. la primitive de $f_1(x) = \frac{A}{x-a}$ est

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + \text{cst};$$

2. la primitive de $f_2(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$ est

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + \text{cst};$$

3. la primitive de $f_3(x) = \frac{Bx+C}{x^2+bx+d}$ est

$$\begin{aligned}
\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+d} dx &= \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(d-\frac{b^2}{4}\right)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}} \int \frac{B\left(\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}t - \frac{b}{2}\right) + C}{t^2+1} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} x+\frac{b}{2} = \sqrt{d-\frac{b^2}{4}}t \\ dx = \sqrt{d-\frac{b^2}{4}} dt \end{array} \right. \\
&= \frac{B}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} dt + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}} \int \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= \frac{B}{2} \ln |1+t^2| + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}} \arctan(t) + \text{cst} = \frac{B}{2} \ln \left| 1 + \frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{d-\frac{b^2}{4}} \right| + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}} \arctan \left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}} \right) + \text{cst}
\end{aligned}$$

4. la primitive de $f_4(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n}$ est

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n} dx = \frac{B}{2} \underbrace{\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+d)^n} dx}_{I_1} + \left(C - \frac{Bb}{2}\right) \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+bx+d)^n} dx}_{I_2}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{B}{2} \int \frac{1}{(x^2+bx+d)^{n-1}} dx \\
I_2 &= \int \frac{1}{(x^2+bx+d)^n} dx \\
&= \left(d - \frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-n} \underbrace{\int \frac{1}{(1+t^2)^n} dt}_{I^n}
\end{aligned}$$

et l'intégrale I^n se calcule par récurrence

$$I^n = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I^{n-1}.$$

Exemple

1. On veut intégrer la fonction rationnelle propre $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4x+5}$. Comme $\Delta = 4^2 - 4 \times 5 < 0$ il s'agit d'un intégrale du type $\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+d} dx$. Le dénominateur se décompose comme $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ et l'intégrale s'écrit

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x-3}{(x-2)^2+1} dx = \int \frac{(t+2)-3}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \arctan(t) + \text{cnst} = \frac{1}{2} \ln((x+2)^2+1) - \arctan(x-2) + \text{cnst} \end{aligned}$$

2. On veut intégrer la fonction rationnelle propre $f(x) = \frac{3x+1}{x^3-4x}$. On doit d'abord la décomposer en fractions simples ; comme $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$ la fonction admet la décomposition

$$f(x) = \frac{3x+1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+2}$$

Pour calculer les constantes A_i on peut utiliser le principe d'identité des polynômes :

$$\frac{3x+1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A_1(x-2)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2 + (2A_2-2A_3)x - 4A_1}{x(x-2)(x+2)} \iff \begin{cases} A_1 + 2A_2 - 4A_3 = 0 \\ 2A_2 - 2A_3 = 3 \\ -4A_1 = 1 \end{cases}$$

ainsi

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx - \frac{5}{8} \int \frac{A_2}{x-2} dx + \frac{7}{8} \int \frac{A_3}{x+2} dx = -\frac{1}{4} \ln|x| - \frac{5}{8} \ln|x-2| + \frac{7}{8} \ln|x+2| + c.$$

3. On veut intégrer la fonction rationnelle impropre $f(x) = \frac{3x^3+2x-5}{3x^2-5x-2}$. On effectue d'abord la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 & 3x^2-5x-2 \\ -3x^3 & +5x^2+2x \\ \hline & 5x^2+4x-5 \\ & -5x^2+\frac{25}{3}x+\frac{10}{3} \\ \hline & \frac{37}{3}x-\frac{5}{3} \end{array}$$

ainsi $f(x) = x + \frac{5}{3} + \frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2 - 5x - 2}$. Maintenant on décompose le terme $\frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2 - 5x - 2}$ en fractions simples : on a $3x^2 - 5x - 2 = (x + \frac{1}{3})(x - 2)$ et on doit chercher les deux constantes A_1 et A_2 telles que

$$\frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{A_1}{x + \frac{1}{3}} + \frac{A_2}{x - 2}$$

En utilisant le principe d'identité des polynômes on a

$$\frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{A_1(x-2) + A_2(x + \frac{1}{3})}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{(A_1+A_2)x - 2A_1 + \frac{A_2}{3}}{3x^2 - 5x - 2} \iff \begin{cases} A_1 + A_2 = \frac{37}{3} \\ -2A_1 + \frac{A_2}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

On conclut que

$$f(x) = x + \frac{5}{3} + \frac{52/63}{x + \frac{1}{3}} + \frac{207/63}{x - 2}$$

et

$$\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x + \frac{52}{63} \ln \left| x + \frac{1}{3} \right| + \frac{207}{63} \ln|x-2| + c.$$

4. On veut intégrer la fonction rationnelle propre $f(x) = \frac{x-4}{x^3-x^2-5x-3}$. On doit d'abord la décomposer en fraction simples ; comme $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x-3)(x+1)^2$ la fonction f admet la décomposition

$$f(x) = \frac{A_{1,1}}{x-3} + \frac{A_{2,1}}{x+1} + \frac{A_{2,2}}{(x+1)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{x^3-x^2-5x-3} &= \frac{A_{1,1}(x+1)^2 + A_{2,1}(x-3)(x+1) + A_{2,2}(x-3)}{x^3-x^2-5x-3} \\ &= \frac{(A_{1,1}+A_{2,1})x^2 + (2A_{1,1}-2A_{2,1}+A_{2,2})x + A_{1,1}-3A_{2,1}-3A_{2,2}}{x^3-x^2-5x-3} \iff \begin{cases} A_{1,1}+A_{2,1}=0 \\ 2A_{1,1}-2A_{2,1}+A_{2,2}=1 \\ A_{1,1}-3A_{2,1}-3A_{2,2}=-4 \end{cases} \end{aligned}$$

On conclut que

$$f(x) = \frac{-1/16}{x-3} + \frac{1/16}{x+1} + \frac{-5/4}{(x+1)^2}$$

et

$$\int f(x) \, dx = -\frac{1}{16} \ln|x-3| + \frac{1}{16} \ln|x+1| - \frac{5}{4(x+1)} + c.$$

5. On veut intégrer la fonction rationnelle propre $f(x) = \frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)^2}$. Comme $\Delta = 4 - 20 < 0$, la fonction f se décompose comme

$$f(x) = \frac{B_1x + C_1}{x^2 - 2x + 5} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 - 2x + 5)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)^2} &= \frac{B_1x + C_1}{x^2 - 2x + 5} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 - 2x + 5)^2} \\ &= \frac{B_1x^3 + (C_1 - 2B_1)x^2 + (5B_1 - 2C_1 + B_2)x + 5C_1 + C_2}{(x^2 - 2x + 5)^2} \iff \begin{cases} B_1 = 0 \\ C_1 - 2B_1 = 1 \\ 5B_1 - 2C_1 + B_2 = 0 \\ 5C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient alors que

$$\int f(x) \, dx = \underbrace{\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \, dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{2x-3}{(x^2 - 2x + 5)^2} \, dx}_{I_2}.$$

▷ On calcule I_1 :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \, dx &= \int \frac{1}{(x-1)^2 + 4} \, dx \xrightarrow{\substack{x-1=2t \\ dx=2 \, dt}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} \, dt = \frac{1}{2} \arctan(t) + c = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c; \end{aligned}$$

▷ On calcule I_2 :

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{(x^2-2x+5)^2} \, dx &= \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2} \, dx - \int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2} \, dx = -\frac{1}{x^2-2x+5} - \int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2} \, dx \\ &= -\frac{1}{x^2-2x+5} - \int \frac{1}{((x-1)^2+4)^2} \, dx = -\frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{8} \int \frac{1}{(t^2+1)^2} \, dt \\ &= -\frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} \, dt \right) = -\frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{16} \left(\frac{t}{1+t^2} + \arctan(t) \right) \\ &= -\frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{16} \left(\frac{2(x-1)}{x^2-2x+5} + \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \right) + c \\ &= -\frac{x+7}{8(x^2-2x+5)} - \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c. \end{aligned}$$

On conclut que

$$\int f(x) \, dx = \frac{7}{16} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{x+7}{8(x^2-2x+5)} + c.$$

6. On veut intégrer la fonction rationnelle propre $f(x) = \frac{1}{x^3(x^2+1)^2}$ qui se décompose comme

$$f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + 1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + 1)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3(x^2+1)^2} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(A_1+B_1)x^6 + (A_2+C_1)x^5 + (2A_1+A_3+B_1+B_2)x^4 + (2A_2+C_1+C_2)x^3 + (A_1+2A_3)x^2 + (A_2)x + (A_3)}{x^3(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ A_2 + C_1 = 0 \\ 2A_1 + A_3 + B_1 + B_2 = 0 \\ 2A_2 + C_1 + C_2 = 0 \\ A_1 + 2A_3 = 0 \\ A_2 = 0 \\ A_3 = 1 \end{cases}$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &= -2 \int \frac{1}{x} \, dx + \int \frac{1}{x^3} \, dx + \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} \, dx \\ &= -2 \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} \, dx \\ &= -2 \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \ln|x^2+1| - \frac{1}{2(x^2+1)} + c. \end{aligned}$$

Intégrales définies

Théorème fondamentale du calcul différentiel et intégral

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$. Alors

1. la dérivée de $g(x) = \int_a^x f(x) \, dx$ existe et est égale à $f(x)$;
2. $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$.

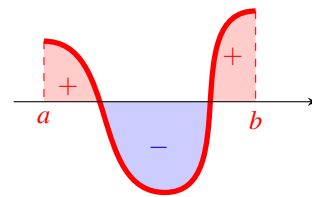
L'expression $F(b) - F(a)$ se note aussi $[F(x)]_a^b$ ou encore $F(x)|_a^b$.

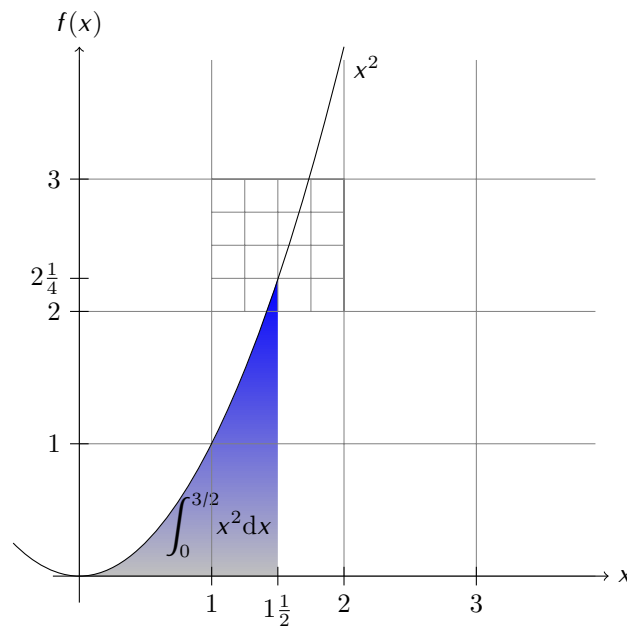
Remarque

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ alors $g(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x) \, dx$.

Interprétation géométrique

L'intégrale définie $\int_a^b f(x) \, dx$ correspond à l'aire du domaine du plan situé entre le graphe de f et l'axe des abscisses, compté positivement pour la partie située au-dessus de l'axe des abscisses et négativement pour la partie située en dessous.





Calcul d'aires

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a; b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$. L'aire de la surface comprise entre les graphes de f et g entre a et b est définie par l'intégrale $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

THE CHEMISTS METHOD FOR NUMERICAL INTEGRATION:

1. PLOT CURVE ON PAPER.
2. PRECISELY CUT OUT SHAPE.
3. WEIGH PAPER SHAPE WITH HIGHLY ACCURATE SCALES.

spikedmath.com
© 2010

Propriété

Soit $[a; b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, f et $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables.

- ▷ Relation de Chasles : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
- ▷ Relation d'ordre : si $f(x) \leq g(x)$ pour toute $x \in [a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- ▷ Si f est continue sur $[a; b]$ et $f(x) \geq 0$ pour toute $x \in [a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx = 0$ si et seulement si $f(x) \equiv 0$.
- ▷ Valeur absolue : $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.
- ▷ Moyenne : si $m \leq f(x) \leq M$ pour toute $x \in [a; b]$ alors $m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$. Le nombre $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$ est la valeur moyenne de f sur $[a; b]$.

Intégrales généralisées

Étudier la nature d'une intégrale généralisée (ou impropre) c'est préciser si elle est convergente ou divergente.

Cas d'une fonction bornée sur un intervalle non borné

Soit f une fonction définie sur $[a; +\infty[$ et intégrable sur tous les intervalles $[a; b]$ pour $b \geq a$. L'intégrale généralisée de première espèce de f sur $[a; +\infty[$ est égale, lorsqu'elle existe, à la limite

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

On définit de manière analogue l'intégrale généralisée sur l'intervalle $] - \infty; a]$. Si la limite existe on dit que l'intégrale est convergente, dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

Règles de convergence

- ▷ Condition nécessaire de convergence sur $[a; +\infty[$: si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- ▷ Comparaison de fonctions positives : soit f et g deux fonctions définies sur $[a; +\infty[$ telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ sur $[a; +\infty[$ et intégrables sur tous les intervalles $[a; b]$ pour $b \geq a$.
 - ▷ Si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge aussi.
 - ▷ Si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge.

Exemple

1. Soit $a > 0$. Alors $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ car

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_a^c & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \lim_{c \rightarrow +\infty} [\ln(x)]_a^c & \text{si } \alpha = 1, \end{cases} = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{c^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln(c) & \text{si } \alpha = 1, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1, \\ \ln(c) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

2. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$ converge tandis que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} dx$ diverge. En effet, comme $\frac{\pi}{4} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [1; +\infty[$, alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2} dx < +\infty, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4x} dx > +\infty.$$

3. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ converge car $-\left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx \leq \left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right|$ et

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Cas d'une fonction non bornée sur un intervalle borné

Soit f une fonction définie sur $]a; b]$ sans être définie au point a et intégrable sur tous les intervalles $[c; b]$ pour $c \in]a; b[$. L'intégrale généralisée de deuxième espèce de f sur $]a; b]$ est égale à la limite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

lorsqu'elle existe. Si la limite existe on dit que l'intégrale est convergente, dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

Exemple

Soit $a \neq 0$. Alors $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ car

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^a \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_c^a & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \lim_{c \rightarrow 0^+} [\ln(x)]_c^a & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\frac{a^{1-\alpha}-c^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \lim_{c \rightarrow 0^+} [\ln(a) - \ln(c)] & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = 1 \\ \infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Définition

1. Si f est intégrable sur tous les intervalles $[c; d]$ contenus dans $]a, b[$ mais n'est pas définie ni en a ni en b , on pose

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

avec $c \in]a, b[$ quelconque. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si les deux intégrales

$\int_a^c f(x) \, dx$ et $\int_c^b f(x) \, dx$ convergent.

2. Si f est intégrable sur tous les intervalles $[c; d]$ contenus dans $]a, +\infty[$ mais elle n'est pas définie en a , on pose

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^{+\infty} f(x) \, dx$$

avec $c \in]a, +\infty[$ quelconque. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ converge si et seulement si les deux intégrales $\int_a^c f(x) \, dx$ et $\int_c^{+\infty} f(x) \, dx$ convergent.

3. Si f est intégrable sur tous les intervalles $[c; d]$ contenus dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^c f(x) \, dx + \int_c^{+\infty} f(x) \, dx$$

avec $c \in \mathbb{R}$ quelconque. On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$ converge si et seulement si les deux intégrales $\int_{-\infty}^c f(x) \, dx$ et $\int_c^{+\infty} f(x) \, dx$ convergent.

Fonctions définies par une intégrale



Définition

Considérons la fonction $\mathcal{I}: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ où f est une fonction intégrable sur J (i.e. elle peut être discontinue mais elle doit être bornée).



Propriété

- ▷ $\mathcal{I}(a) = 0$
- ▷ $\mathcal{I}(b) = \int_a^b f(t) \, dt = \text{constante}$
- ▷ $\mathcal{I}$ est continue
- ▷ Si f est positive (resp. négative) dans un intervalle $[p, q]$ qui contient a ,
 - ▷ si $x > a$ alors f et $\mathcal{I}$ ont même signe
 - ▷ si $x < a$ alors f et $\mathcal{I}$ ont signe opposé
- ▷ Si f est continue alors $\mathcal{I}$ est continue et dérivable; si f est dérivable alors $\mathcal{I}'$ est continue et dérivable. En effet, si $f \in \mathcal{C}^k(J)$ alors $\mathcal{I} \in \mathcal{C}^{k+1}(J)$ car $f^{(k)}(x) = \mathcal{I}^{(k+1)}(x)$. De plus
 - ▷ si $f(x) = 0$ alors $\mathcal{I}$ a tangente horizontale
 - ▷ si $f(x) > 0$ alors $\mathcal{I}$ est croissante
 - ▷ si $f(x) < 0$ alors $\mathcal{I}$ est décroissante
 - ▷ si $f(c) = 0$ et $f'(c) > 0$ alors c est un minimum pour $\mathcal{I}$
 - ▷ si $f(c) = 0$ et $f'(c) < 0$ alors c est un maximum pour $\mathcal{I}$



Proposition

Si u et v sont deux fonctions dérivables de J dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $\mathcal{I}(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) \, dt$ est dérivable et

$$\mathcal{I}'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x, t) \, dt + f(x, v(x))v'(x) - f(x, u(x))u'(x).$$

En particulier, si f ne dépend que de t , c'est-à-dire si $\mathcal{I}(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt$ alors

$$\mathcal{I}'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Exercices

? Exercice 13.1 Intégration directe

Calculer les intégrales suivants :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\int 2x^3 - 3x + 1 \, dx$ | 14. $\int \frac{1}{x \ln^3 x} \, dx$ | 27. $\int (ax + b)^n \, dx$ avec
$a \neq 0$ et $n \neq 1$ |
| 2. $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$ | 15. $\int x^2 e^{x^3} \, dx$ | 28. $\int \frac{1}{(ax + b)^n} \, dx$ avec
$ax + b \neq 0$, $a \neq 0$ et $n > 1$ |
| 3. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx$ | 16. $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} \, dx$ | 29. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} \, dx$ |
| 4. $\int \sqrt{2x+1} \, dx$ | 17. $\int \frac{x^3}{1+x^3} \, dx$ | 30. $\int (1 + 2x^3)^2 \, dx$ |
| 5. $\int e^{2x+1} \, dx$ | 18. $\int \frac{\sin(2x)}{1 + \sin^2 x} \, dx$ | 31. $\int (1 + \cos x)^2 \, dx$ |
| 6. $\int \sqrt[4]{(x-1)^3} \, dx$ | 19. $\int \frac{1}{x \sqrt[3]{x}} \, dx$ | 32. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ |
| 7. $\int \frac{x}{x+1} \, dx$ | 20. $\int \sin^3 x \cos x \, dx$ | 33. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx$ |
| 8. $\int x \sqrt{5+x^2} \, dx$ | 21. $\int \sin(3x) \, dx$ | 34. $\int \frac{1}{1+e^x} \, dx$ |
| 9. $\int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$ | 22. $\int \frac{1}{\sin x \cos x} \, dx$ | 35. $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} \, dx$ |
| 10. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ | 23. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$ | 36. $\int \frac{1}{\sin(4x)} \, dx$ |
| 11. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2} \, dx$ | 24. $\int x(x^2+1)^2 \, dx$ | |
| 12. $\int x e^{x^2} \, dx$ | 25. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}} \, dx$ | |
| 13. $\int \frac{\ln^3 x}{x} \, dx$ | 26. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \, dx$ | |

- SOLUTION.**
- | | | |
|--|----------------------------------|--|
| 1. $\frac{1}{2}x(x^3 - 3x + 2) + c$ | 13. $\frac{\ln^4 x}{4} + c$ | 25. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+3)^2} + c$ |
| 2. $\frac{1}{12}(8\sqrt[3]{x} + 3)x^{4/3} + c$ | 14. $-\frac{1}{2\ln^2 x} + c$ | 26. $e^{\tan x} + c$ |
| 3. $2\sqrt{x+1} + c$ | 15. $\frac{e^{x^3}}{3} + c$ | 27. $\frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$ |
| 4. $\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + c$ | 16. $\ln x + \sin x + c$ | 28. $\frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + c$ |
| 5. $\frac{e^{2x+1}}{2} + c$ | 17. $\frac{\arctan(x^4)}{4} + c$ | 29. $\frac{x^2}{2} + \arctan x + c$ |
| 6. $\frac{4}{7}(x-1)^{7/4} + c$ | 18. $\ln(1 + \sin^2 x) + c$ | 30. $\frac{4}{7}x^7 + x^4 + x + c$ |
| 7. $x - \ln(x+1) + c$ | 19. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + c$ | 31. $\frac{3}{2}x + 2\sin x + \frac{\sin x \cos x}{2} + c$ |
| 8. $\frac{1}{3}(5+x^2)^{3/2} + c$ | 20. $\frac{\sin^4 x}{4} + c$ | 32. $\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + c$ |
| 9. $\ln(1+e^x) + c$ | 21. $-\frac{1}{3}\cos(3x) + c$ | 33. $\tan x - \frac{1}{\tan x} + c$ |
| 10. $2e^{\sqrt{x}} + c$ | 22. $\ln \tan x + c$ | 34. $x - \ln(1+e^x) + c$ |
| 11. $e^{-1/x} + c$ | 23. $-2\cos\sqrt{x} + c$ | 35. $x - \cos x + c$ |
| 12. $\frac{e^{x^2}}{2} + c$ | 24. $\frac{(x^2+1)^3}{6} + c$ | 36. $\frac{1}{4}\ln \tan(2x) + c$ |

? Exercice 13.2 Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes :

- | | | | |
|------------------------------------|---|--|---|
| 1. $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ | 5. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ | 10. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} e^{\tan x} dx$ | 15. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}} dx$ |
| 2. $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx$ | 6. $\int x \sin x dx$ | 11. $\int x^3 \sin x^2 dx$ | 16. $\int \ln^2 x dx$ |
| 3. $\int \ln(1+x) dx$ | 7. $\int x \ln x dx$ | 12. $\int e^{2x} \sin(3x) dx$ | 17. $\int x \sin^2 x dx$ |
| 4. $\int x^2 e^x dx$ | 8. $\int x^2 \cos x dx$ | 13. $\int e^{-3x} \cos(2x) dx$ | |
| | 9. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | 14. $\int x^3 \ln x dx$ | |

- SOLUTION.**
- Comme $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -\frac{1}{x} \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{x^2}$ on obtient $-\frac{1+\ln x}{x} + c$
 - Comme $f(x) = \ln(\ln(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$ et $g(x) = \ln(x) \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{x}$ on obtient $(\ln(\ln(x)) - 1) \ln(x) + c$
 - Comme $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g(x) = x \Leftarrow g'(x) = 1$ on obtient $(1+x) \ln(1+x) - x + c$
 - Comme $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ et $g(x) = e^x \Leftarrow g'(x) = e^x$ on obtient $e^x((x-2)x+2) + c$
 - Comme $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2\sqrt{x} \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ on obtient $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + c$
 - Comme $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ et $g(x) = -\cos x \Leftarrow g'(x) = \sin x$ on obtient $-x \cos x + \sin x + c$
 - Comme $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$ et $g(x) = x^2/2 \Leftarrow g'(x) = x$ on obtient $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$
 - Comme $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ et $g(x) = \sin x \Leftarrow g'(x) = \cos x$ on obtient $x^2 \sin x - 2[-x \cos x + \sin x] + c$
 - Comme $f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $g(x) = -\sqrt{1-x^2} \Leftarrow g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ on obtient $-\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + x + c$
 - Comme $f(x) = \sin x / \cos x \Rightarrow f'(x) = 1/\cos^2 x$ et $g(x) = e^{\tan x} \Leftarrow g'(x) = e^{\tan x}/x^2$ on obtient $e^{\tan x}(\tan x - 1) + c$
 - Comme $f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = 2x \cos(x^2)$ et $g(x) = x^4/4 \Leftarrow g'(x) = x^3$ on obtient $\frac{-x^2 \cos(x^2) + \sin(x^2)}{2} + c$
 - Comme $f(x) = \sin(3x) \Rightarrow f'(x) = 3 \cos(3x)$ et $g(x) = e^{2x}/2 \Leftarrow g'(x) = e^{2x}$ on obtient $\frac{2e^{2x}(\sin(3x) - \frac{3}{2} \cos(3x))}{13} + c$
 - Comme $f(x) = \cos(2x) \Rightarrow f'(x) = -2 \sin(2x)$ et $g(x) = \frac{-e^{-3x}}{3} \Leftarrow g'(x) = e^{-3x}$ on obtient $-\frac{3e^{-3x}(\cos(2x) - \frac{2}{3} \sin(2x))}{13} + c$
 - Comme $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x^4}{4} \Leftarrow g'(x) = x^3$ on obtient $\frac{x^4(4 \ln x - 1)}{16} + c$
 - Comme $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{4x^{3/4}}{3} \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ on obtient $\frac{4}{3}x^{3/4}(\ln x - \frac{4}{3}) + c$
 - Comme $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x \ln x - x \Leftarrow g'(x) = \ln x$ on obtient $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + c$
 - Comme $f(x) = \sin^2 x \Rightarrow f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$ et $g(x) = \frac{x^2}{2} \Leftarrow g'(x) = x$ on obtient $\frac{1}{4}(x^2 - x \sin(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x)) + c$

? Exercice 13.3 Intégration par changement de variable

Calculer les intégrales suivantes :

- 
- | | | | |
|--|--|---|--|
| 1. $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx$ | 7. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} dx$ | 12. $\int \sqrt{e^x - 1} dx$ | 18. $\int x\sqrt{a + x^2} dx$ |
| 2. $\int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ | 8. $\int e^x \ln(1 + e^x) dx$ | 13. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ | 19. $\int \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}} dx$ |
| 3. $\int \frac{1}{x - \sqrt{x}} dx$ | 9. $\int \frac{1}{x(2 + \ln^2 x)} dx$ | 14. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ | 20. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$ |
| 4. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1 + \sqrt{x})}} dx$ | 10. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ | 15. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$ | 21. $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$ |
| 5. $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$ | 11. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3 - 1}} dx$ | 16. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ | 22. $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$ |
| 6. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ | | 17. $\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$ | 23. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$ |

SOLUTION. 1. Si on pose $t = \ln(x)$ alors $\frac{1}{x} dx = dt$ et on obtient $-\cos(\ln(x)) + c$

2. Si on pose $t = \sqrt{x}$ alors $dx = 2t dt$ et on obtient $2(\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}) + c$

3. Si on pose $t = \sqrt{x}$ alors $dx = 2t dt$ et on obtient $2\ln(\sqrt{x} - 1) + c$

4. Si on pose $t = 1 + \sqrt{x}$ alors $dx = 2(t - 1) dt$ et on obtient $\frac{4\sqrt{x^{3/2} + x}}{\sqrt{x}} + c$

5. Si on pose $t = e^x$ alors $e^x dx = dt$ et on obtient $\ln(1 + e^x) + c$

6. Si on pose $t = \ln x$ alors $\frac{1}{x} dx = dt$ et on obtient $\ln|\ln x| + c$

7. Si on pose $t = \ln \frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x} dx = 2t dt$ et on obtient $-2\sqrt{\ln \frac{1}{x}} + c$

8. Si on pose $t = 1 + e^x$ alors $e^x dx = dt$ et on obtient $(1 + e^x) \ln(1 + e^x) - e^x + c$

9. Si on pose $t = \ln x$ alors $\frac{1}{x} dx = dt$ et on obtient $\frac{\arctan\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} + c$

10. Si on pose $t^2 = 1 - x^2$ alors $-x dx = t dt$ et on obtient $-\frac{(x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2}}{3} + c$

11. Si on pose $t^2 = x^3 - 1$ alors $3x^2 dx = 2t dt$ et on obtient $\frac{2(x^3 + 2)\sqrt{x^3 - 1}}{9} + c$

12. Si on pose $t^2 = e^x - 1$ alors $dx = \frac{2t}{t^2 + 1} dt$ et on obtient $2(\sqrt{e^x - 1} - \arctan(\sqrt{e^x - 1})) + c$

13. Si on pose $t = \ln x$ alors $dx = e^t dt$ et on obtient $\frac{\ln^2 x}{x} + c$

14. Si on pose $t = e^x$ alors $dx = \frac{1}{t} dt$ et on obtient $\arctan e^x + c$

15. Si on pose $t = \tan x$ alors $dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$ et on obtient $e^{\tan x} + c$

16. Si on pose $t = \ln x$ alors $dx = e^t dt$ et on obtient $-\cos(\ln x) + c$

17. Si on pose $t = \sqrt{1 + x^2}$ alors $2x dx = 2t dt$ et on obtient $\sqrt{1 + x^2} + c$

18. Si on pose $t = \sqrt{a + x^2}$ alors $2x dx = 2t dt$ et on obtient $\frac{\sqrt{(a + x^2)^3}}{3} + c$

19. Si on pose $t = \ln x$ alors $\frac{1}{x} dx = dt$ et on obtient $\arcsin(\ln x) + c$

20. Si on pose $t = \frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2} dx = dt$ et on obtient $-e^{1/x} + c$

21. Si on pose $t = 1 + \sin x$ alors $\cos x dx = dt$ et on obtient $\ln|1 + \sin x| + c$

22. Si on pose $t = \frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2} dx = dt$ et on obtient $-\sin \frac{1}{x} + c$

23. Si on pose $t^2 = 1 + x^2$ alors $x dx = t dt$ et on obtient $\frac{(x^2 - 2)}{3} \sqrt{x^2 + 1} + c$

? Exercice 13.4 Intégration de fonction rationnelle

Calculer les intégrales suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{a}{x-b} dx & \text{c) } \int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx & \text{e) } \int \frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2} dx \\ \text{b) } \int \frac{a}{(x-b)^n} dx, n \neq 1 & \text{d) } \int \frac{3x+1}{x^3-4x} dx & \end{array}$$

SOLUTION. a) $a \ln|x-b| + c$

b) $\frac{a}{(1-n)(x-b)^{n-1}} + c$

c) $\ln \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + c$

d) Comme $\frac{3x+1}{x^3-4x} = \frac{-1/4}{x} + \frac{-5/8}{x+2} + \frac{7/8}{x-2}$ alors on a $-\frac{\ln|x|}{4} - \frac{5 \ln|x+2|}{8} + \frac{7 \ln|x-2|}{8} + c$

e) Comme $\frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2} = x + \frac{5}{3} + \frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2-5x-2} = x + \frac{5}{3} + \frac{1}{9} \left(\frac{52/7}{x+\frac{1}{3}} + \frac{207/7}{x-2} \right)$ alors on a $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x + \frac{52}{63} \ln \left| x + \frac{1}{3} \right| + \frac{23}{7} \ln|x-2| + c$

? Exercice 13.5

Calculer

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \mathcal{B} = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+3x^2} dx, \quad \mathcal{C} = \int_{-1}^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx.$$

SOLUTION.

$$\mathcal{A} = [\arctan(x)]_{-1}^1 = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

$$\mathcal{C} = \int_{-1}^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx = [\ln|x^2-5x+6|]_{-1}^1 = \ln(2) - \ln(12) = \ln(2) - \ln(3) - 2\ln(2) = -\ln(2) - \ln(3).$$

? Exercice 13.6 Vitesse et accélération

Une voiture roule à une vitesse de $v(t) = v_0 t(1-t)$ km h⁻¹ durant l'intervalle de temps $0 \leq t \leq 1$ h. Quelle a été sa vitesse maximale? Quelle distance a-t-elle parcouru?

SOLUTION. ▷ Vitesse maximale : $v(t) = v_0 t(1-t)$, $v'(t) = 1-2t$, $v'(t) = 0$ ssi $t = 1/2$ et $v(1/2) = v_0/4$.

▷ Distance parcourue : $v(t) = x'(t)$ donc $x_{\text{parcourue}} = \int_0^1 v(t) dt = v_0/6$.

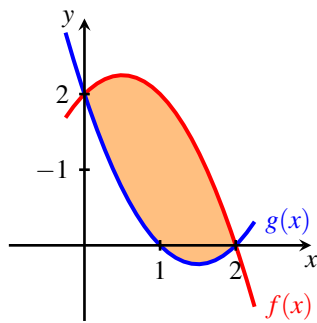
? Exercice 13.7 Calcul de l'aire

Calculer l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$:

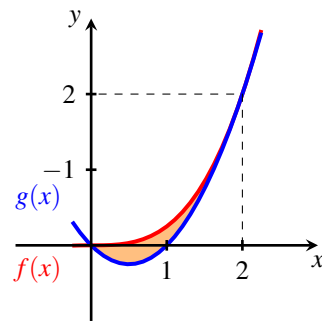
$$\text{a) } f(x) = -x^2 + x + 2 \text{ et } g(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3}{4} \text{ et } g(x) = x^2 - x$$

SOLUTION. a) Comme $f(x) = g(x)$ ssi $x \in \{0, 2\}$ et $f(x) \geq g(x)$ pour $x \in [0, 2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$ est $\int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 -2x^2 + 4x dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$.

b) Comme $f(x) = g(x)$ ssi $x \in \{0, 2\}$ et $f(x) \geq g(x)$ pour $x \in [0, 2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$ est $\int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{4} - x^2 + x dx = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{3}$.



(a) $f(x) = -x^2 + x + 2$ et $g(x) = x^2 - 3x + 2$



(b) $f(x) = \frac{x^3}{4}$ et $g(x) = x^2 - x$

FIGURE 13.1: Exercice 13.

? Exercice 13.8 Calcul de l'aire

Calculer l'aire de A et de B ainsi définis :

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\pi, \frac{1}{8} \leq y \leq \cos^3 x \right\}, \quad B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq x \leq \pi, \frac{1}{8} \leq y \leq \cos^3 x \right\}.$$

SOLUTION. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} \int \cos^3(x) \, dx &\stackrel{\cos^2(x)=1-\sin^2(x)}{=} \int (1 - \sin^2(x)) \cos(x) \, dx = \\ &= \int \cos(x) - \cos(x) \sin^2(x) \, dx = \sin x - \int \cos x \sin^2 x \, dx \stackrel{t=\sin x}{\stackrel{dt=\cos x \, dx}{=}} \\ &= \sin x - \int t^2 \, dt = \sin x - \frac{t^3}{3} + k = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme $\cos^3 x = \left(\frac{1}{8}\right)$ ssi $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi \left(\frac{5}{3}\right)$ alors

$$\text{Aire}(A) = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \, dx - \frac{\left(\frac{\pi}{3} - 0\right)}{8} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24} \right) = \frac{9\sqrt{3} - \pi}{12}$$

et

$$\text{Aire}(B) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \, dx - 2 \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{3} - 0\right)}{8} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24} \right) = \frac{9\sqrt{3} - \pi}{12}.$$

? Exercice 13.9 Intégrales généralisées

Pour α et β positifs calculer, lorsqu'elles existent, les intégrales généralisées suivants :

a) $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \, dx$ avec $a > 0$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx$

b) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \, dx$ avec $a > 0$

d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + 5x^3} \, dx$

SOLUTION. a) Si $\alpha \geq 1$ elle diverge pour tout $\beta \geq 0$; si $\alpha < 1$, elle converge si $\beta < 1$ et diverge si $\beta \geq 1$.

b) Si $\alpha > 1$ elle converge pour tout $\beta \geq 0$; si $\alpha < 1$, elle diverge pour tout $\beta \geq 0$; si $\alpha = 1$, elle converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leq 1$.

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ alors $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx < +\infty$. Pour l'autre intégrale, en intégrant par parties on obtient $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left\{ \left[-\frac{\cos(x)}{x} \right]_1^c - \int_1^c \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right\} = \cos(1) - \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{\cos(x)}{x^2} dx$. Puisque $\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$ alors $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{\cos(x)}{x^2} dx < +\infty$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente.

d) Comme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 5x^3}$ est positive, continue et $f(x) < \frac{1}{\sqrt{x}}$ dans $]0; 1]$ et comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, alors $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + 5x^3} dx$ converge aussi.

? Exercice 13.10 Fonction intégrale

Calculer les points de changement de concavité de la fonction

$$F(x) = \int_0^x t^2(1+t) dt.$$

SOLUTION. Soit $f(t) = t^2(1+t)$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, la fonction F est elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Donc

$$F'(x) = f(x) = x^2(1+x),$$

$$F''(x) = f'(x) = 3x^2 + 2x.$$

Donc

$$\begin{aligned} F'(x) = 0 &\iff x \in \{-1; 0\}, & F'(x) > 0 &\iff x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[, & F'(x) < 0 &\iff x \in]-1; 0[, \\ F''(x) = 0 &\iff x \in \{-2/3; 0\}, & F''(x) > 0 &\iff x \in]-\infty; -2/3[\cup]0; +\infty[, & F''(x) < 0 &\iff x \in]-2/3; 0[, \end{aligned}$$

Donc $x = 0$ est un point de changement de concavité et à tangente horizontale, $x = -2/3$ est un point de changement de concavité

? Exercice 13.11 Intégrales, intégrales généralisées

1. Calculer la surface de la région plane coloriée en figure 13.2a.
2. Calculer la surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.2b.

SOLUTION. 1. On a $\frac{\ln x}{x^2} = 0$ ssi $x = 1$ et $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ ssi $x = e$. Donc

$$\text{Surface} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}.$$

2. Il suffit de rajouter à la surface calculée au point précédent l'intégrale généralisée suivant

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_e^a = \frac{1}{e}.$$

Donc la surface plane infinie mesure $1 - \frac{1}{e}$.

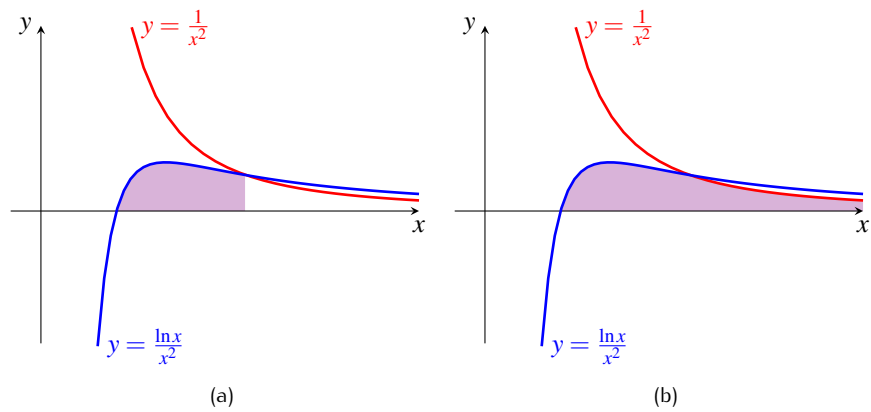


FIGURE 13.2: Exercice 13 : intégrales.

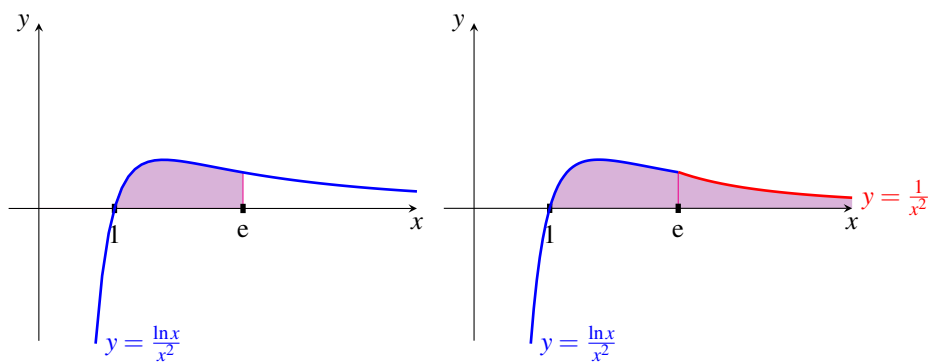


FIGURE 13.3: Solution de l'exercice 13.

? Exercice 13.12 Intégrales, intégrales généralisées

1. Calculer la surface de la région plane coloriée en figure 13.4a.
2. Calculer la surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.4b.

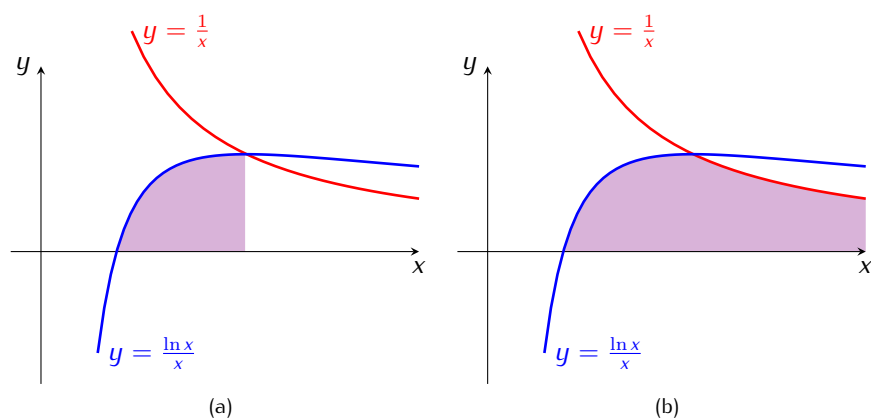


FIGURE 13.4: Exercice 13 : intégrales.

SOLUTION. 1. On a $\frac{\ln x}{x} = 0$ ssi $x = 1$ et $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}$ ssi $x = e$. Donc

$$\text{Surface} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2 x \right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

2. Il suffit de rajouter à la surface calculée au point précédent l'intégrale généralisée suivant

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} [\ln(x)]_e^a = +\infty.$$

Donc la surface plane infinie mesure $+\infty$.

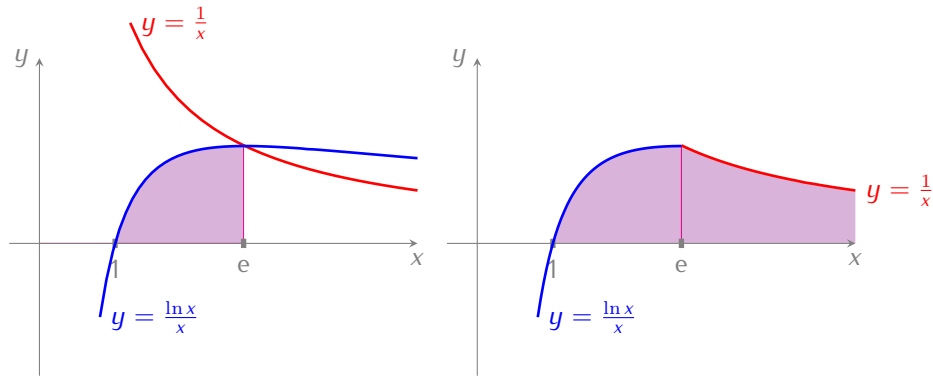


FIGURE 13.5: Solution de l'exercice 13.

? Exercice 13.13 *Intégrales, intégrales généralisées*

1. Calculer la surface de la région plane coloriée en figure 13.6a.
2. Calculer la surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.6b.

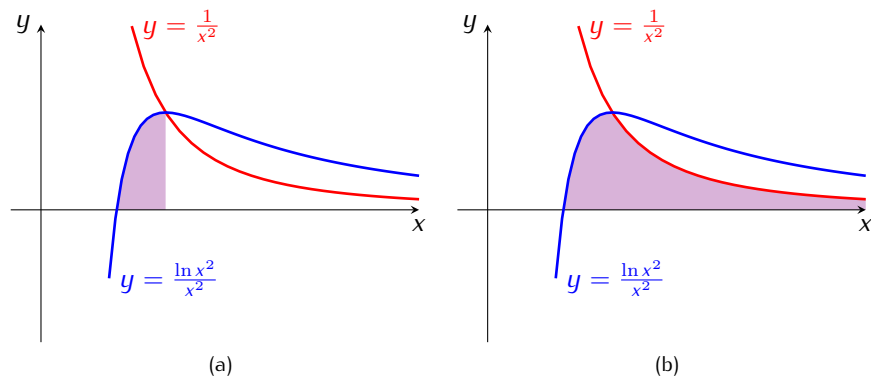


FIGURE 13.6: Exercice 13 : intégrales.

SOLUTION. 1. On a $\frac{\ln x^2}{x^2} = 0$ ssi $x = 1$ et $\frac{\ln x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ ssi $x = \sqrt{e}$. Donc

$$\text{Surface} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x^2}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x^2}{x} \right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{2}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x^2}{x} - \frac{2}{x} \right]_1^{\sqrt{e}} = 2 - \frac{3}{\sqrt{e}}.$$

2. Il suffit de rajouter à la surface calculée au point précédent l'intégrale généralisée suivant

$$\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\sqrt{e}}^a = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Donc la surface plane infinie mesure $2 - \frac{2}{\sqrt{e}}$.

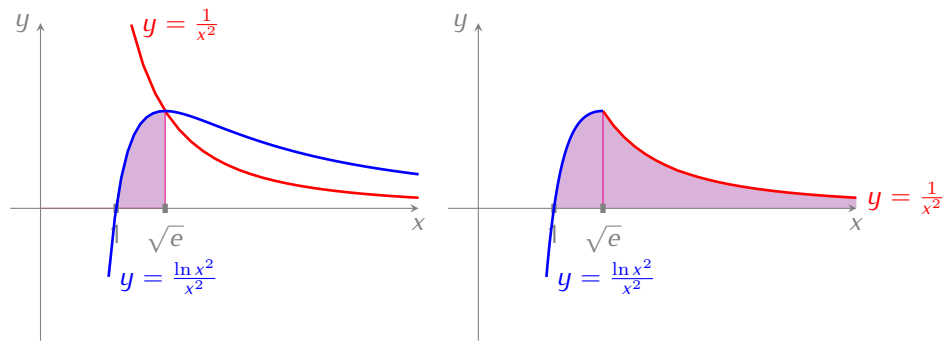


FIGURE 13.7: Solution de l'exercice 13.

? Exercice 13.14 Intégrales, intégrales généralisées

1. Calculer la surface de la région plane coloriée en figure 13.8a.
2. Calculer la surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.8b.

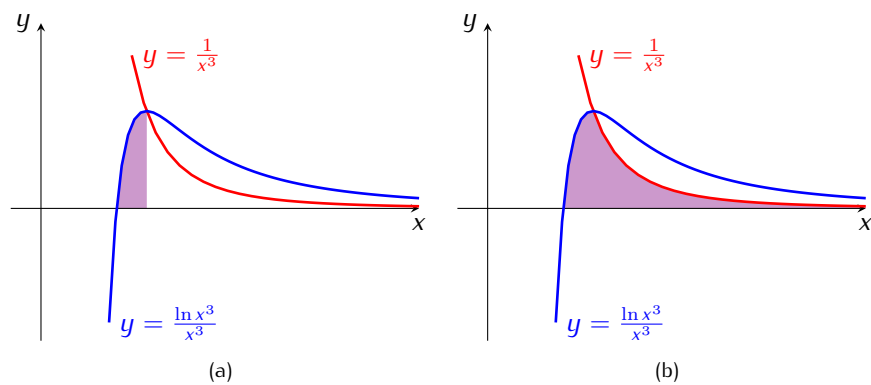


FIGURE 13.8: Exercice 13 : intégrales.

SOLUTION. 1. On a $\frac{\ln x^3}{x^3} = 0$ ssi $x = 1$ et $\frac{\ln x^3}{x^3} = \frac{1}{x^3}$ ssi $x = \sqrt[3]{e}$. Donc

$$\text{Surface} = \int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{\ln x^3}{x^3} dx = \left[-\frac{\ln x^3}{2x^2} \right]_1^{\sqrt[3]{e}} + \int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{3}{2x^3} dx = \left[-\frac{\ln x^3}{2x^2} - \frac{3}{4x^2} \right]_1^{\sqrt[3]{e}} = \frac{3}{4} - \frac{5}{4\sqrt[3]{e^2}}.$$

2. Il suffit de rajouter à la surface calculée au point précédent l'intégrale généralisée suivant

$$\int_{\sqrt[3]{e}}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{\sqrt[3]{e}}^a = \frac{1}{2\sqrt[3]{e^2}}.$$

Donc la surface plane infinie mesure $\frac{3}{4} - \frac{3}{4\sqrt[3]{e^2}}$.

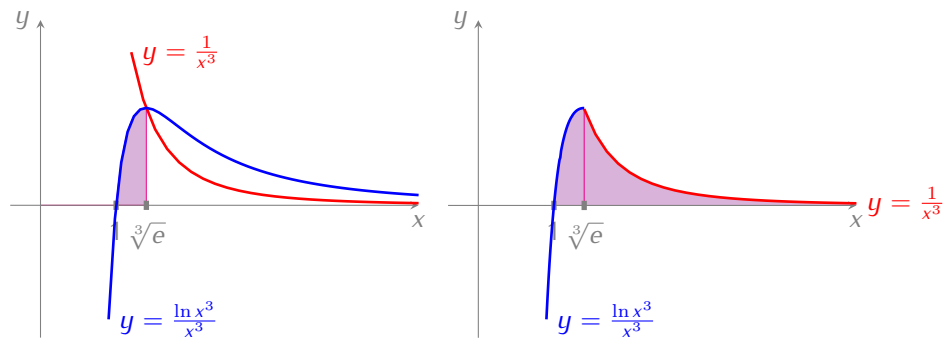


FIGURE 13.9: Solution de l'exercice 13.

? Exercice 13.15 *Intégrales, intégrales généralisées*

1. Calculer la surface de la région plane coloriée en figure 13.10a.
2. Calculer la surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.10b.

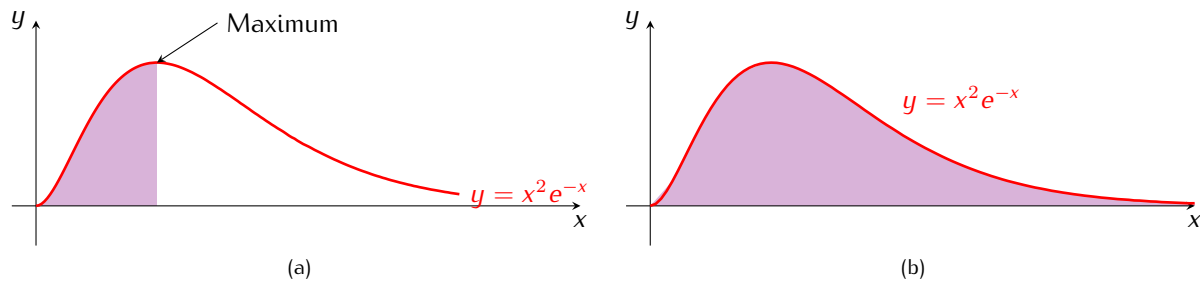


FIGURE 13.10: Exercice 13 : intégrales.

SOLUTION. Calculons d'abord les primitives de la fonction $f(x) = x^2 e^{-x}$:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int x^2 e^{-x} dx \\
 &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \\
 &= -x^2 e^{-x} + 2 \left(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right) \\
 &= -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) + C \\
 &= -(x^2 + 2x + 2) e^{-x} + C
 \end{aligned}$$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
 $g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = -e^{-x}$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
 $g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = -e^{-x}$

avec $C \in \mathbb{R}$.

1. La surface de la région plane coloriée en figure 13.10a correspond à $F(M) - F(0)$ où M est l'abscisse du maximum pour f . Comme $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$, alors $M = 2$ et la surface mesure $F(M) - F(0) = -10e^{-2} + 2$.
2. La surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.10b correspond à

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(0)) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-(b^2 + 2b + 2) e^{-b} + 2 \right) = 2.$$

? Exercice 13.16 *Intégrales, intégrales généralisées*

1. Calculer la surface de la région plane coloriée en figure 13.11a.
2. Calculer la surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.11b.

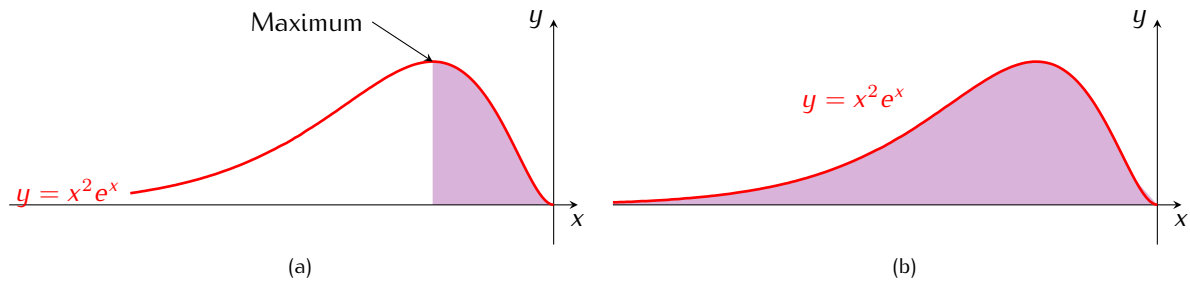


FIGURE 13.11: Exercice 13 : intégrales.

SOLUTION. Calculons d'abord les primitives de la fonction $f(x) = x^2 e^x$:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int x^2 e^x dx \quad \xrightarrow{\quad} \quad \quad \quad \begin{aligned} f(x) &= x^2 &\Rightarrow f'(x) &= 2x \\ g'(x) &= e^x &\Rightarrow g(x) &= e^x \end{aligned} \\
 &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \quad \xleftarrow{\quad} \quad \quad \begin{aligned} f(x) &= x &\Rightarrow f'(x) &= 1 \\ g'(x) &= e^x &\Rightarrow g(x) &= e^x \end{aligned} \\
 &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \quad \xleftarrow{\quad} \\
 &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C \\
 &= (x^2 - 2x + 2) e^x + C
 \end{aligned}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

1. La surface de la région plane coloriée en figure 13.11a correspond à $F(0) - F(M)$ où M est l'abscisse du maximum pour f . Comme $f'(x) = x(2+x)e^x$, alors $M = -2$ et la surface mesure $F(0) - F(M) = -10e^2 + 2$.
2. La surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.11b correspond à

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} (F(0) - F(b)) = \lim_{b \rightarrow -\infty} (2 - (b^2 - 2b + 2) e^b) = 2.$$

? Exercice 13.17 Intégrales, intégrales généralisées



1. Calculer la surface de la région plane coloriée en figure 13.12a.
2. Calculer la surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.12b.

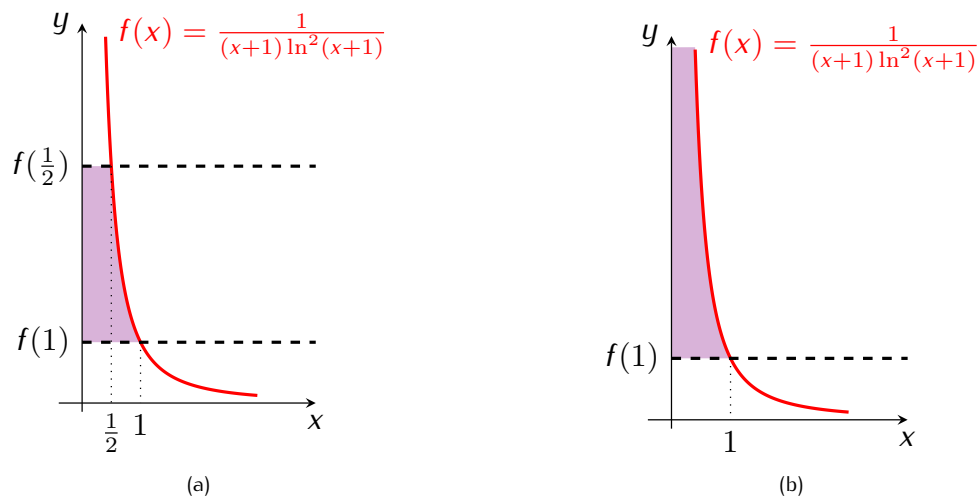


FIGURE 13.12: Exercice 13 : intégrales.

SOLUTION. Calculons d'abord une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$: si on pose $h(x) = \ln(x+1)$ on peut intégrer directement car

$$F(x) = \int \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} dx = \int [h(x)]^{-2} h'(x) dx = -[h(x)]^{-1} = -\frac{1}{\ln(x+1)}$$

1. Surface de la région plane coloriée en figure 13.12a :

$$\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\right) \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} dx - \left(1 - \frac{1}{2}\right) f(1) = \frac{1}{3\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2\ln(2)} = \frac{4}{3\ln\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{3}{2\ln(2)}$$

2. Surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.12b.

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} dx - (1-0)f(1) = F(1) - \lim_{c \rightarrow 0^+} F(c) - f(1) = -\frac{1}{\ln(2)} + \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(c)} - \frac{1}{2\ln(2)} = -\frac{3}{2\ln(2)}$$

? Exercice 13.18 Intégrales, intégrales généralisées



1. Calculer la surface de la région plane coloriée en figure 13.13a.
2. Calculer la surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.13b.

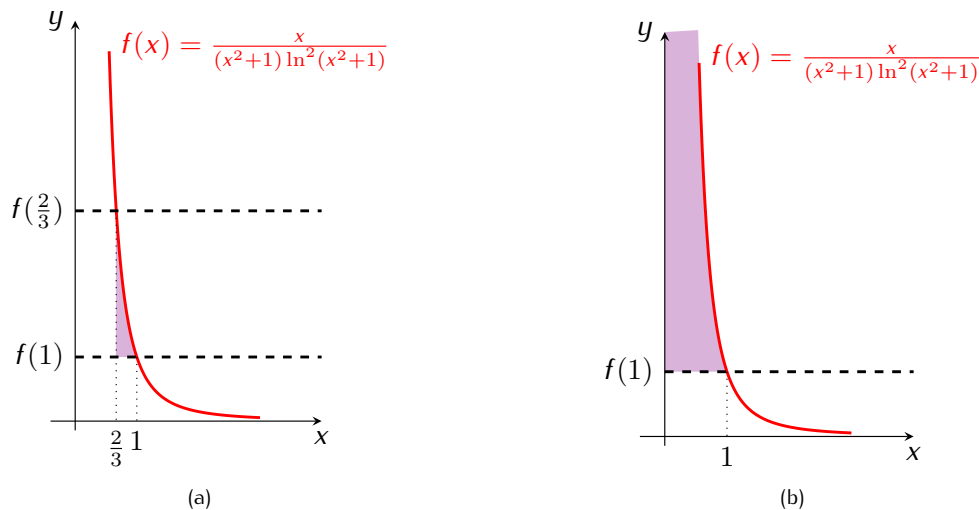


FIGURE 13.13: Exercice 13 : intégrales.

SOLUTION. Calculons d'abord une primitive de la fonction $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)}$: si on pose $h(x) = \ln(x^2+1)$ on peut intégrer directement car

$$F(x) = \int \frac{x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int [h(x)]^{-2} h'(x) dx = -\frac{1}{2} [h(x)]^{-1} = -\frac{1}{2\ln(x^2+1)}$$

1. Surface de la région plane coloriée en figure 13.13a :

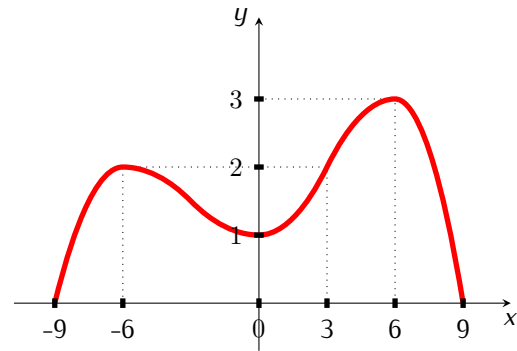
$$\int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)} dx - \left(1 - \frac{2}{3}\right) f(1) = F(1) - F\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6\ln^2(2)} = -\frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{2\ln(13/9)} - \frac{1}{6\ln^2(2)}.$$

2. Surface de la région plane infinie coloriée en figure 13.13b.

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)} dx - (1-0)f(1) = F(1) - \lim_{c \rightarrow 0^+} F(c) - f(1) = -\frac{1}{2\ln(2)} + \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\ln(c^2+1)} - \frac{1}{2\ln^2(2)} = +\infty.$$

? Exercice 13.19 Fonction intégrale

Celui en figure est le graphe de la fonction f continue sur l'intervalle $] -9, 9[$. Tracer un graphe plausible de la fonction $F(x) = \int_{-6}^x f(t) dt$ en surlignant notamment les éventuels points de changement de concavité. Préciser ensuite, en fournissant une adéquate explication, combien de solutions a l'équation $F(x) = 15$.



SOLUTION.

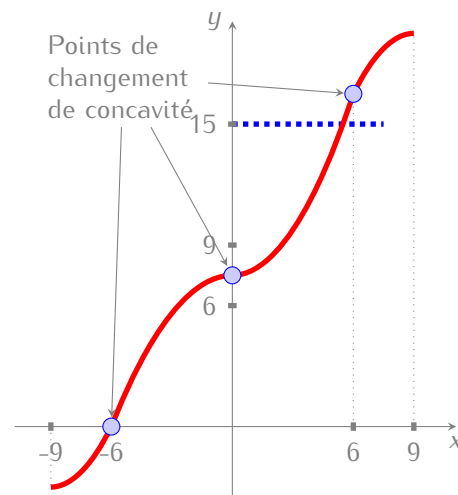
F est clairement continue.

De plus $f(x) > 0$ donc F est croissante et

$$\begin{cases} F(x) < 0 & \text{si } x < -6, \\ F(x) = 0 & \text{si } x = -6, \\ F(x) > 0 & \text{si } x > -6. \end{cases}$$

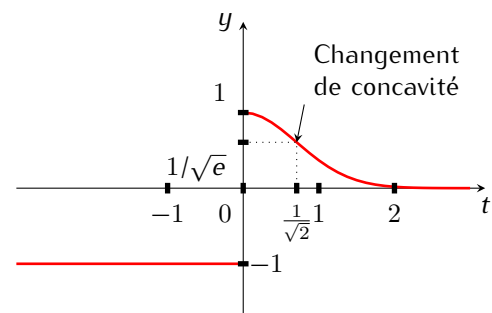
Enfin, f est croissante pour $x \in [-9, -6) \cup (0, 6)$ et décroissante pour $x \in (-6, 0) \cup (6, 9)$ donc F est convexe sur $[-9, -6)$ et sur $(0, 6)$, concave sur $(-6, 0)$ et sur $(6, 9)$; $x = -6$ et $x = 6$ sont points de max et $x = 0$ est point de min pour f donc ils sont des points de changement de concavité pour F .

Puisque $F(6) > 15$, l'équation $F(x) = 15$ a exactement une solution.



? Exercice 13.20 Fonction intégrale

Celui en figure est le graphe de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = -1$ si $t \leq 0$, $f(t) = e^{-t^2}$ si $t > 0$. Tracer un graphe plausible de la fonction $F: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ sans calculer la primitive de f , en surlignant notamment les éventuels points de non dérivabilité. Préciser ensuite, en fournissant une adéquate explication, combien de solutions a l'équation $F(x) = -\frac{1}{2}$.



SOLUTION.

Comme f n'est pas continue en $x = 0$ alors F est continue mais non dérivable en $x = 0$; plus précisément la pente de la tangente au graphe de F à gauche de $x = 0$ est -1 tandis que la pente de la tangente à droite de $x = 0$ est 1 . De plus

- ▷ $F(-1) = 0$
- ▷ $F(0) = -1$ (il suffit un simple calcul d'aire, voir figure ci-contre)
- ▷ F est linéaire pour $x \in [-1; 0]$ avec pente -1 car sa dérivée est la constante -1
- ▷ comme $f(x) > 0$ pour $x \in [0, 1]$, F est monotone croissante pour $x \in [0, 1]$

- ▷ comme $f'(x) < 0$ pour $x \in [0, 1]$, F est concave pour $x \in [0, 1]$
 ▷ comme $f(1) = 1/e$ et

$$\int_0^1 f(t) dt < \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) f(1) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - f(1)\right) \frac{1}{2} < 1$$

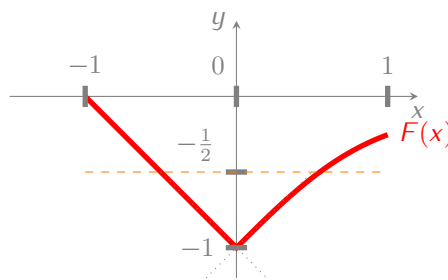
(calculer l'aire à l'aide du dessin ci-contre en sachant que pour $x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}; 1]$ la fonction f est convexe), alors

$$F(1) = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt < -1 + 1 = 0$$

- ▷ comme

$$\int_0^1 f(t) dt > \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{e}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) f(1) > \frac{1}{2}$$

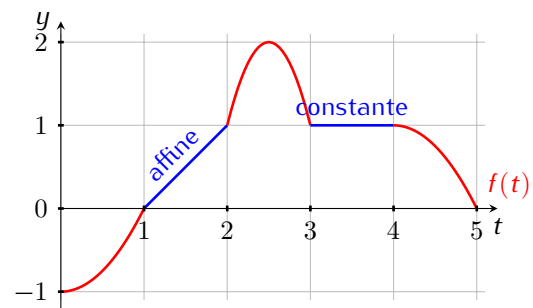
(calculer l'aire), alors l'équation $F(x) = -\frac{1}{2}$ admet 2 solutions : une solution appartient à l'intervalle $] -1; 0[$ car $F(-1) = 0$, $F(0) = -1$ et F est linéaire, l'autre solution appartient à l'intervalle $]0; 1[$



? Exercice 13.21 Fonction intégrale

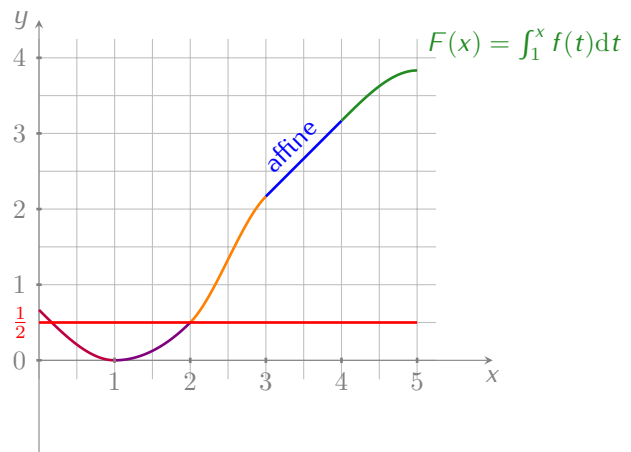
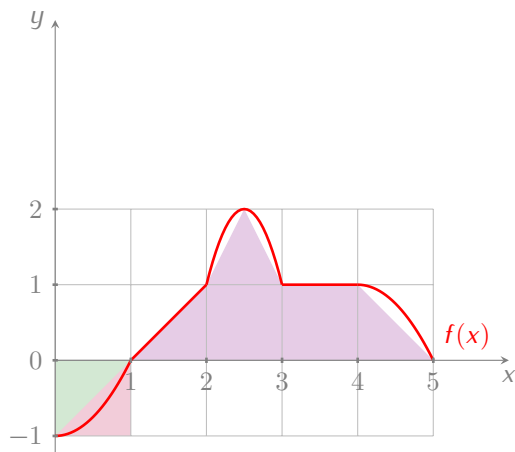


Celui en figure est le graphe de la fonction $f: [0; 5] \rightarrow [-1; 2]$. Tracer un graphe plausible de la fonction $F: [0; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$. Préciser ensuite, en fournissant une adéquate explication, combien de solutions a l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$.



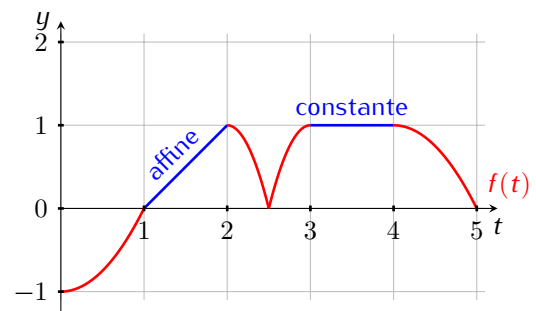
SOLUTION. ▷ F est de classe $\mathcal{C}^1([0; 5])$ car f est continue.

- ▷ $F(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$.
 ▷ F est décroissante pour $x < 1$ et croissante pour $x > 1$, $x = 1$ est un minimum pour F (car f est la dérivée de F).
 ▷ Si $x < 1$ alors $F(x) > 0$ car $\int_1^x f(t) dt = -\int_x^1 f(t) dt$ et comme $f(x) < 0$ alors $\int_x^1 f(t) dt < 0$. De plus, par un calcul de surface on a l'estimation $\frac{1}{2} < F(0) = \int_0^1 f(t) dt < 1$.
 ▷ Comme F est continue, $F(0) > \frac{1}{2}$, $F(1) = 0$ et F est monotone dans $[0, 1]$ alors l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[0, 1]$.
 ▷ Comme $F(2) = \int_1^2 f(t) dt$ avec f la droite d'équation $y = x - 1$ alors $F(2) = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = \frac{1}{2}$.
 ▷ Comme F est continue, $F(1) = 0$, F est monotone dans $[1, 5]$ et $F(5) > \frac{1}{2}$ alors l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[1, 5]$ qui est la solution trouvée au point précédent, c'est-à-dire $x = 2$.
 ▷ F est convexe pour $x \in [-1, 5/3]$, concave pour $x \in [5/3, 3] \cup [4, 5]$, affine pour $x \in [3, 4]$ (car f' est la dérivée seconde de F).



? Exercice 13.22 Fonction intégrale

Celui en figure est le graphe de la fonction $f: [0; 5] \rightarrow [-1; 2]$. Tracer un graphe plausible de la fonction $F: [0; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$. Préciser ensuite, en fournissant une adéquate explication, combien de solutions a l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$.



SOLUTION. $\triangleright F$ est de classe $\mathcal{C}^1([0; 5])$ car f est continue.

$\triangleright F(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$.

$\triangleright F$ est décroissante pour $x < 1$ et croissante pour $x > 1$, $x = 1$ est un minimum pour F (car f est la dérivée de F).

$\triangleright$ Si $x < 1$ alors $F(x) > 0$ car $\int_1^x f(t) dt = -\int_x^1 f(t) dt$ et comme $f(x) < 0$ alors $\int_x^1 f(t) dt < 0$. De plus, par un calcul de surface on a l'estimation $\frac{1}{2} < F(0) = \int_0^1 f(t) dt < 1$.

$\triangleright$ Comme F est continue, $F(0) > \frac{1}{2}$, $F(1) = 0$ et F est monotone dans $[0, 1]$ alors l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

$\triangleright$ Comme $F(2) = \int_1^2 f(t) dt$ avec f la droite d'équation $y = x - 1$ alors $F(2) = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = \frac{1}{2}$.

$\triangleright$ Comme F est continue, $F(1) = 0$, F est monotone dans $[1, 5]$ et $F(5) > \frac{1}{2}$ alors l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[1, 5]$ qui est la solution trouvée au point précédent, c'est-à-dire $x = 2$.

$\triangleright F$ est convexe pour $x \in [-1, 2] \cup [5/2, 3]$, concave pour $x \in [2, 5/2] \cup [4, 5]$, affine pour $x \in [3, 4]$ (car f' est la dérivée seconde de F).

