

INVERSION DE MATRICES PAR PIVOT DE GAUSS

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Nous allons voir comment trouver son inverse à l'aide d'un algorithme que nous allons schématiser.

Etape 1 : on accole la matrice identité à la matrice A à sa droite

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

L'objectif est de faire des manipulations (combinaisons linéaires de lignes) sur ces deux matrices de sorte à faire apparaître à gauche la matrice identité.

Etape 2 : nous allons faire apparaître la colonne « 1 0 0 » à gauche en première position

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_1 + L_3$$

Etape 3 : nous allons faire apparaître la colonne « 0 1 0 » à gauche en seconde position

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

Etape 4 : nous allons faire apparaître la colonne « 0 0 1 » à gauche en troisième position

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \right) L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - 6L_3$$

Etape 5 : conclusion

Notre schéma nous donne alors la matrice identité à gauche et une autre matrice à droite : c'est la matrice inverse de A . Donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$