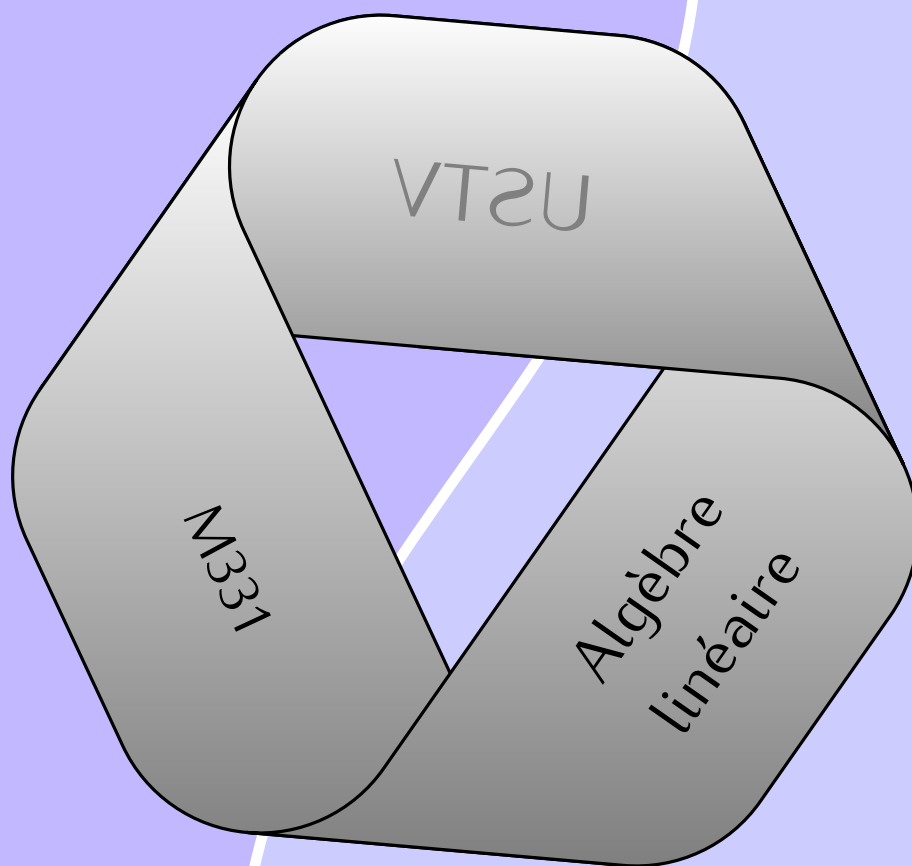


L2PC

2011/2012

Aide-mémoire
et exercices corrigés.



Attention, ce polycopié est encore en cours de développement, ne vous étonnez pas si vous découvrez des erreurs.
Merci de me les communiquer.

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment U-318
Université du Sud Toulon-Var
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 81

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr

🌐 <http://faccanoni.univ-tln.fr>

Table des matières

1	Matrices	5
2	Systèmes linéaires	19
3	Espaces vectoriels	39
4	Applications linéaires	63

1 Matrices

Définition : matrice

On appelle MATRICE $m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Si $m = n$ on dit qu'on a une MATRICE CARRÉE. L'ensemble des matrices carrées n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Une matrice $m \times 1$ est appelée VECTEUR-COLONNE et une matrice $1 \times n$ est appelée VECTEUR-LIGNE.

On convient de noter a_{ij} l'élément de la matrice situé sur la i -ème ligne et j -ème colonne ($1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$).

Une matrice $\mathbb{A}$ est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{ou} \quad \mathbb{A} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Nous travaillerons avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$.

EXEMPLE. La matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

est carrée et d'ordre 3.

Définition : addition de matrices

Si $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $\mathbb{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont deux matrices $m \times n$, on définit l'ADDITION des matrices par

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

La MATRICE NULLE, notée $\mathbb{O}_{m,n}$, est la matrice dont tous les éléments sont nuls.

La MATRICE OPPOSÉE D'UNE MATRICE $\mathbb{A}$ est notée $-\mathbb{A}$. Si $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ alors $-\mathbb{A} = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

La somme de deux matrices d'ordres différents n'est pas définie.

EXEMPLE. Soient les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3+6 & 4+1 & 2+9 \\ 1+2 & 3+0 & 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 11 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Propriété

Si $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ sont des matrices de même ordre, alors nous avons

- ▷ $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$ (commutativité),
- ▷ $\mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = (\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C}$ (associativité).

EXEMPLE. Soient les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1+6 & -1-5 \\ 3+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{B} + \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 6+1 & -5-1 \\ 2+3 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE. Soient les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

On obtient aussi

$$\mathbb{B} + \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$



Définition

On appelle MATRICE DIAGONALE toute matrice carrée $\mathbb{D} = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ telle que $i \neq j \implies d_{ij} = 0$. Si on note $d_i = d_{ii}$, une matrice diagonale est de la forme

$$\mathbb{D}_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

On la note $\text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

La MATRICE IDENTITÉ d'ordre n , notée $\mathbb{I}_n$, est la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, \dots, 1)$.



Définition

On dit qu'une matrice carrée $\mathbb{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est TRIANGULAIRE SUPÉRIEURE (resp. INFÉRIEURE) si $i > j \implies a_{ij} = 0$ (resp. si $i < j \implies a_{ij} = 0$).

Une matrice triangulaire supérieure et inférieure est une matrice diagonale.



Définition : produit d'une matrice par un scalaire

Si $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice $m \times n$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit le PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN SCALAIRE par

$$\alpha \cdot \mathbb{A} = (\alpha \cdot a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$



Propriété

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de même ordre et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire, on a

▷ $\alpha \cdot (\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \alpha \cdot \mathbb{A} + \alpha \cdot \mathbb{B}$ (distributivité).

EXEMPLE.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

On obtient

$$\mathbb{C} = \alpha \cdot \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

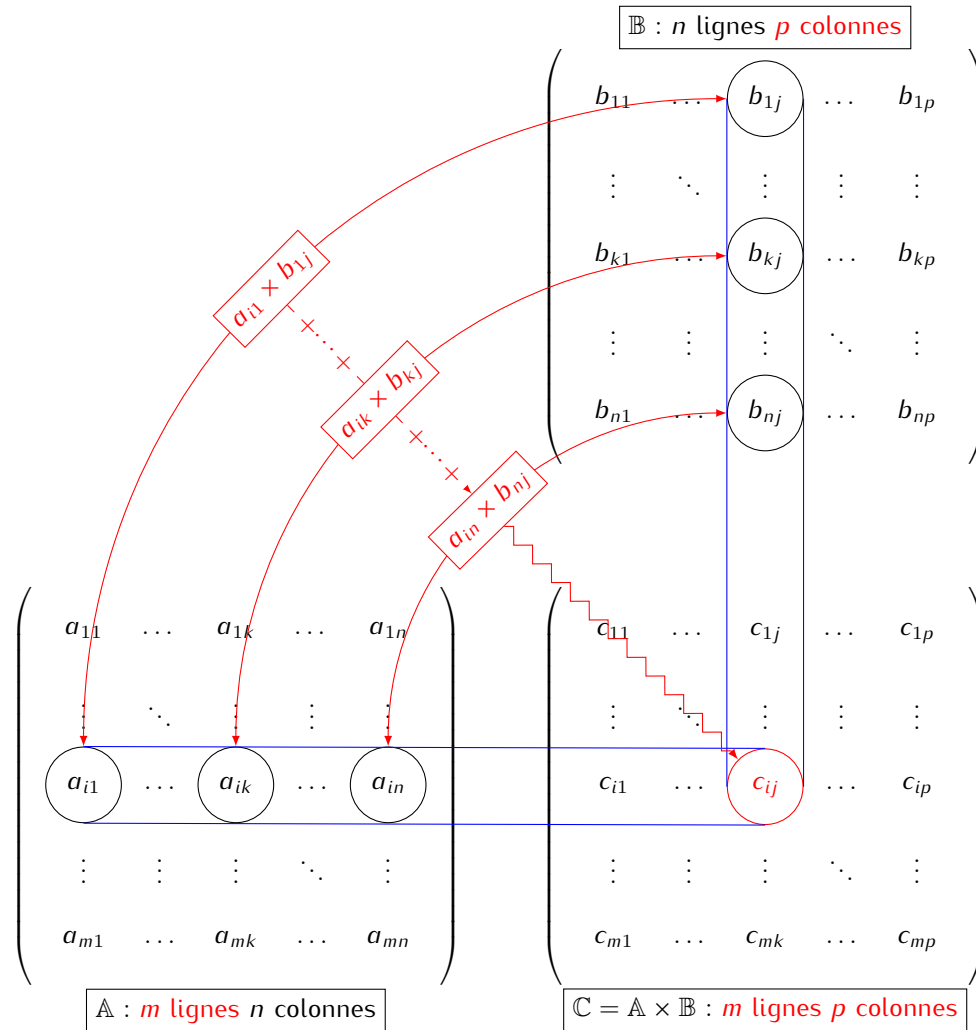


Définition : produit de matrices

Si $\mathbb{A} = (a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$ est une matrice $m \times n$ et si $\mathbb{B} = (b_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une matrice $n \times p$, on définit le **PRODUIT DES MATRICES** par

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

C'est une matrice $m \times p$.



EXEMPLE. Soient les deux matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbb{A}$ est d'ordre 2×3 , la matrice $\mathbb{B}$ est d'ordre 3×3 , donc la matrice produit $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ est une matrice d'ordre 2×3 :

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 3 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 2 + 3 \times 2 + 0 \times (-1) & 1 \times 0 + 3 \times 3 + 0 \times (-2) \\ -1 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 0 & -1 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times (-1) & -1 \times 0 + 1 \times 3 + 2 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$



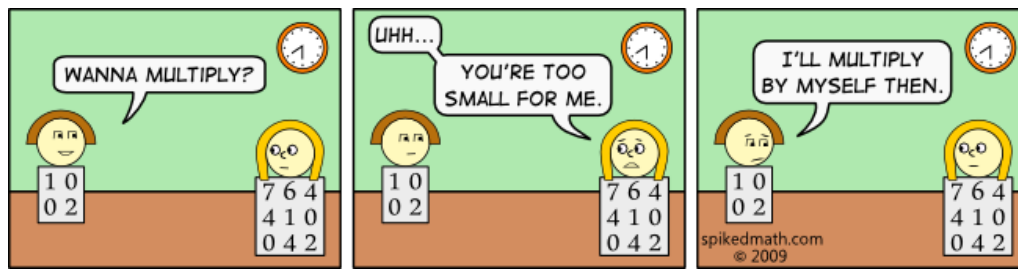
Propriété

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{C} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors

▷ $\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \times \mathbb{C}$ (associativité) ;

▷ $\mathbb{A} \times (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A} \times \mathbb{B} + \mathbb{A} \times \mathbb{C}$ (distributivité) ;

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathbb{A} \times \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n \times \mathbb{A} = \mathbb{A}$.



⚠ Attention

$\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$ en général (non commutativité).

Prenons le cas général avec $\mathbb{A}$ d'ordre $m \times p$ et $\mathbb{B}$ d'ordre $p \times n$. Le produit $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ est défini, c'est une matrice d'ordre $m \times n$. Qu'en est-il du produit $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$? Il faut distinguer trois cas :

- ▷ si $m \neq n$ le produit $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$ n'est pas défini ;
- ▷ si $m = n$ mais $p \neq n$, le produit $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ est défini et c'est une matrice d'ordre $m \times n$ tandis que le produit $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$ est défini mais c'est une matrice d'ordre $p \times p$ donc $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$;
- ▷ si $m = n = p$, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux matrices carrées d'ordre m . Les produits $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ et $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$ sont aussi carrés et d'ordre m mais là encore, en général, $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$;

EXEMPLE. Soient les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} \times \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

📖 Définition : matrice transposée

Si $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice $m \times n$, on définit la matrice TRANSPOSÉE de $\mathbb{A}$, notée $\mathbb{A}^T$, par $\mathbb{A}^T = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$.

C'est donc une matrice $n \times m$ obtenue en échangeant lignes et colonnes de la matrice initiale.

EXEMPLE. Soit la matrice $\mathbb{A}$ d'ordre 2×3 suivante

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sa transposée est la matrice $\mathbb{A}^T$ d'ordre 3×2 suivante

$$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

📌 Propriété

- ▷ $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$ si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- ▷ $(\alpha \mathbb{A})^T = \alpha \mathbb{A}^T$ si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- ▷ $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$ si $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- ▷ $(\mathbb{A} \times \mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \times \mathbb{A}^T$ si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

📖 Définition : matrice symétrique, matrice anti-symétrique

- ▷ Une matrice $\mathbb{A}$ est dite SYMÉTRIQUE si $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$.
- ▷ Une matrice $\mathbb{A}$ est dite ANTI-SYMÉTRIQUE si $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$.

EXEMPLE.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 5 & 4 & 0 \\ -9 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{est une matrice symétrique.}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ -5 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{est une matrice anti-symétrique.}$$

 Définition : matrice inversible, matrice singulière

Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **INVERSIBLE** ou **régulière** si elle est symétrisable pour le produit matriciel, autrement dit s'il existe une matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{B} \times \mathbb{A} = \mathbb{I}_n$. Une matrice non régulière est dite **SINGULIÈRE**.

L'inverse, s'il existe, d'une matrice $\mathbb{A}$ est noté $\mathbb{A}^{-1}$.

 Proposition

Soit $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices inversibles, alors

- ▷ $\mathbb{A}^{-1}$ l'est aussi et $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$,
- ▷ $\mathbb{A}^T$ l'est aussi et $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$,
- ▷ $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ l'est aussi et $(\mathbb{A} \times \mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1} \times \mathbb{A}^{-1}$.

 Définition : trace

Si $\mathbb{A}$ est une matrice carrée d'ordre n , on définit la **TRACE** de $\mathbb{A}$ comme la somme des éléments de la diagonale principale :

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

EXEMPLE. La trace de la matrice $\mathbb{A}$ suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est $\text{tr}(\mathbb{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + (-1) = 2$.

 Propriété

Si $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux matrices carrées d'ordre n , alors

- ▷ $\text{tr}(\mathbb{A}^T) = \text{tr}(\mathbb{A})$,
- ▷ $\text{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \text{tr}(\mathbb{A}) + \text{tr}(\mathbb{B})$.

Si $\mathbb{A}$ est une matrice $m \times n$ et $\mathbb{B}$ une matrice $n \times m$, alors

- ▷ $\text{tr}(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) = \text{tr}(\mathbb{B} \times \mathbb{A})$.

Opérations élémentaires sur les matrices **Définition**

Les opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes d'une matrices sont

- ▷ la multiplication d'une ligne par un scalaire non nul :

$$L_i \leftarrow \alpha L_i;$$

- ▷ l'addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne :

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j;$$

- ▷ l'échange de deux lignes :

$$L_i \leftrightarrow L_j.$$

Ces transformations sont équivalentes à la multiplication à gauche (pré-multiplication) par la matrice inversible obtenue en appliquant à la matrice identité la transformation correspondante.

Les opérations analogues sur les colonnes sont

▷ la multiplication d'une colonne par un scalaire non nul :

$$C_i \leftarrow \alpha C_i;$$

▷ l'addition d'un multiple d'une colonne à une autre colonne :

$$C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j;$$

▷ l'échange de deux colonnes :

$$C_i \leftrightarrow C_j.$$

Elles sont équivalentes à la multiplication à droite (post-multiplication) par la matrice inversible obtenue en appliquant à la matrice identité la transformation correspondante.

Théorème

En partant d'une matrice $\mathbb{A}$, l'utilisation d'un nombre fini d'opérations élémentaires conduit à une matrice équivalente.

Calcul pratique d'un déterminant

Définition : déterminant d'une matrice d'ordre n

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre n .

Étant donné un couple (i, j) d'entiers, $1 \leq i, j \leq n$, on note $\mathbb{A}_{ij}$ la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de $\mathbb{A}$.

On définit le DÉTERMINANT de $\mathbb{A}$, et on le note $\det(\mathbb{A})$, par récurrence sur l'ordre de la matrice $\mathbb{A}$:

▷ si $n = 1$: le déterminant de $\mathbb{A}$ est le nombre

$$\det(\mathbb{A}) = a_{11},$$

▷ si $n > 1$: le déterminant de $\mathbb{A}$ est le nombre

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbb{A}_{ij}) \quad \text{quelque soit la ligne } i, 1 \leq i \leq n,$$

ou, de manière équivalente, le nombre

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbb{A}_{ij}) \quad \text{quelque soit la colonne } j, 1 \leq j \leq n.$$

Astuce

Pour se souvenir des signes de ces deux formules, on peut remarquer que la distribution des signes $+$ et $-$ avec la formule $(-1)^{i+j}$ est analogue à la distribution des cases noirs et blanches sur un damier :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

EXEMPLE. Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}_{11}) = a_{22}, \quad \det(\mathbb{A}_{12}) = a_{21}, \quad \det(\mathbb{A}_{21}) = a_{12}, \quad \det(\mathbb{A}_{22}) = a_{11},$$

donc on peut calculer $\det(\mathbb{A})$ par l'une des formules suivantes :

▷ $a_{11} \det(\mathbb{A}_{11}) - a_{12} \det(\mathbb{A}_{12}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ (développement suivant la ligne $i = 1$)

▷ $-a_{21} \det(\mathbb{A}_{21}) + a_{22} \det(\mathbb{A}_{22}) = -a_{21} a_{12} + a_{22} a_{11}$ (développement suivant la ligne $i = 2$)

▷ $a_{11} \det(\mathbb{A}_{11}) - a_{21} \det(\mathbb{A}_{21}) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$ (développement suivant la colonne $j = 1$)

▷ $-a_{12} \det(\mathbb{A}_{12}) + a_{22} \det(\mathbb{A}_{22}) = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la colonne $j = 2$)
Ces formules donnent bien le même résultat.

EXEMPLE. Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}_{11}) = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$\det(\mathbb{A}_{12}) = \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$

$$\det(\mathbb{A}_{13}) = \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$

$$\det(\mathbb{A}_{21}) = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32},$$

$$\det(\mathbb{A}_{22}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31},$$

$$\det(\mathbb{A}_{23}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31},$$

$$\det(\mathbb{A}_{31}) = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22},$$

$$\det(\mathbb{A}_{32}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21},$$

$$\det(\mathbb{A}_{33}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

donc on peut calculer $\det(\mathbb{A})$ par l'une des formules suivantes :

- ▷ $a_{11} \det(\mathbb{A}_{11}) - a_{12} \det(\mathbb{A}_{12}) + a_{13} \det(\mathbb{A}_{13})$ (développement suivant la ligne $i = 1$)
- ▷ $-a_{21} \det(\mathbb{A}_{21}) + a_{22} \det(\mathbb{A}_{22}) - a_{23} \det(\mathbb{A}_{23})$ (développement suivant la ligne $i = 2$)
- ▷ $a_{31} \det(\mathbb{A}_{31}) - a_{32} \det(\mathbb{A}_{32}) + a_{33} \det(\mathbb{A}_{33})$ (développement suivant la ligne $i = 3$)
- ▷ $-a_{11} \det(\mathbb{A}_{11}) + a_{21} \det(\mathbb{A}_{21}) - a_{31} \det(\mathbb{A}_{31})$ (développement suivant la colonne $j = 1$)
- ▷ $a_{12} \det(\mathbb{A}_{12}) - a_{22} \det(\mathbb{A}_{22}) + a_{32} \det(\mathbb{A}_{32})$ (développement suivant la colonne $j = 2$)
- ▷ $-a_{13} \det(\mathbb{A}_{13}) + a_{23} \det(\mathbb{A}_{23}) - a_{33} \det(\mathbb{A}_{33})$ (développement suivant la colonne $j = 3$)

Quelques calculs montrent que ces formules donnent bien le même résultat.

Astuce

Il convient d'utiliser cette définition après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéro sachant que

- ▷ si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors $\det(\mathbb{A}) = 0$;
- ▷ si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé;
- ▷ on ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).

EXEMPLE. Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}_{11}) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 10, \quad \det(\mathbb{A}_{12}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 0, \quad \det(\mathbb{A}_{13}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det(\mathbb{A}_{21}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -3, \quad \det(\mathbb{A}_{22}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5, \quad \det(\mathbb{A}_{23}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\det(\mathbb{A}_{31}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2, \quad \det(\mathbb{A}_{32}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \det(\mathbb{A}_{33}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

donc on peut calculer $\det(\mathbb{A})$ par l'une des formules suivantes :

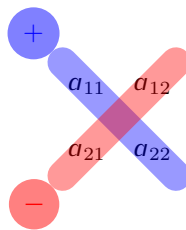
- ▷ $1 \det(\mathbb{A}_{11}) + 0 \det(\mathbb{A}_{12}) + 1 \det(\mathbb{A}_{13}) = 10 + 0 + 0 = 10$
- ▷ $0 \det(\mathbb{A}_{21}) + 2 \det(\mathbb{A}_{22}) + 0 \det(\mathbb{A}_{23}) = 0 + 2 \times 5 + 0 = 10$ ← formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer
- ▷ $0 \det(\mathbb{A}_{31}) + 3 \det(\mathbb{A}_{32}) + 5 \det(\mathbb{A}_{33}) = 0 + 0 + 5 \times 2 = 10$
- ▷ $1 \det(\mathbb{A}_{11}) + 0 \det(\mathbb{A}_{21}) + 0 \det(\mathbb{A}_{31}) = 10 + 0 + 0 = 10$ ← formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer
- ▷ $0 \det(\mathbb{A}_{12}) + 2 \det(\mathbb{A}_{22}) + 3 \det(\mathbb{A}_{32}) = 0 + 2 \times 5 + 0 = 10$
- ▷ $1 \det(\mathbb{A}_{13}) + 0 \det(\mathbb{A}_{23}) + 5 \det(\mathbb{A}_{33}) = 0 + 0 + 5 \times 2 = 10$



Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre $n = 2$.

$$\det(\mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



EXEMPLE. Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

alors

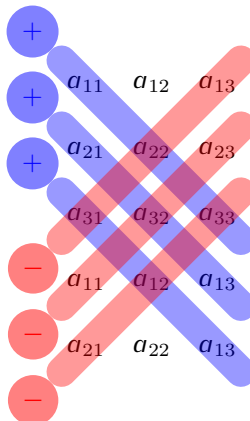
$$\det(\mathbb{A}) = 5 \times 3 - 7 \times 4 = 15 - 28 = -13.$$



Règle de Sarrus

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre $n = 3$.

$$\det(\mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$



EXEMPLE. Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}) = (1 \times 2 \times 5 + 0 \times 0 \times 0 + 0 \times 0 \times 0) - (1 \times 2 \times 0 + 0 \times 3 \times 1 + 5 \times 0 \times 0) = 10.$$

EXEMPLE. Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}) = (5 \times 3 \times 6 + 4 \times 1 \times 1 + 2 \times 7 \times 2) - (1 \times 3 \times 2 + 2 \times 1 \times 5 + 7 \times 4 \times 6) = -62.$$

Propriété

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

Théorème

$\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si $\det(\mathbb{A}) \neq 0$.

Propriété

- ▷ $\det(\mathbb{A}^T) = \det(\mathbb{A})$,
- ▷ $\det(\mathbb{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbb{A})}$,
- ▷ $\det(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) = \det(\mathbb{A}) \cdot \det(\mathbb{B})$.

Définition : rang

Le RANG d'une matrice quelconque $\mathbb{A}$ est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice ne modifient pas le rang.

EXEMPLE. Soit $\mathbb{A}$ la matrice suivante

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de $\mathbb{A}$ est 2 :

- ▷ $\mathbb{A}$ est d'ordre 2×3 donc $s \leq \min\{2, 3\}$ donc $s = 0, 1$ ou 2 ;
- ▷ comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la deuxième colonne est nul, on ne peut pas conclure;
- ▷ comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la troisième colonne est non nul, alors $s = 2$.

EXEMPLE. Soit $\mathbb{A}$ la matrice suivante

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- ▷ $\mathbb{A}$ est d'ordre 3×3 donc $s \leq 3$
- ▷ le déterminant de $\mathbb{A}$ est 0 donc $s \neq 3$
- ▷ le déterminant de la sous-matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ est 5, donc $s = 2$.



Exercice 1.1

Soient les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une matrice $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{A} - 2\mathbb{B} - \mathbb{C} = \mathbb{O}$.

2. Trouver une matrice $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{A} + \mathbb{B} + \mathbb{C} - 4\mathbb{D} = \mathbb{O}$.

SOLUTION. 1. On cherche $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{C} = \mathbb{A} - 2\mathbb{B}$, i.e.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 2 \times 1 & 2 - 2 \times 2 \\ 0 - 2 \times 0 & 4 - 2 \times 1 \\ 1 - 2 \times 1 & -1 - 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{A} - 2\mathbb{B} - \mathbb{C} = \mathbb{O}.$$

2. On cherche $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{D} = \frac{1}{4}(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \mathbb{C}) = \frac{1}{4}(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \mathbb{A} - 2\mathbb{B}) = \frac{1}{2}\mathbb{A} - \frac{1}{4}\mathbb{B}$, i.e.

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times (-3) - \frac{1}{4} \times 1 & \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{4} \times 2 \\ \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{4} \times 0 & \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{4} \times 1 \\ \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{4} \times 1 & \frac{1}{2} \times (-1) - \frac{1}{4} \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 & 1/2 \\ 0 & 7/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2

Effectuer les multiplications suivantes

① $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

SOLUTION.

$$\begin{aligned} & \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}}^{2 \times 3} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}}^{3 \times 4} \\ &= \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \times 2 + 1 \times 3 + 5 \times 0 & 3 \times 1 + 1 \times 0 + 5 \times (-5) & 3 \times (-1) + 1 \times 1 + 5 \times 3 & 3 \times 0 + 1 \times 8 + 5 \times 4 \\ 2 \times 2 + 7 \times 3 + 0 \times 0 & 2 \times 1 + 7 \times 0 + 0 \times (-5) & 2 \times (-1) + 7 \times 1 + 0 \times 3 & 2 \times 0 + 7 \times 8 + 0 \times 4 \end{pmatrix}}^{2 \times 4} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -22 & 13 & 28 \\ 25 & 2 & 5 & 56 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}}^{1 \times 3} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}}^{3 \times 1} = \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \times 2 + 0 \times (-4) + 5 \times (-3) \end{pmatrix}}^{1 \times 1} = -21$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}}^{3 \times 1} \times \overbrace{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}}^{1 \times 3} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \times (-3) & 2 \times 0 & 2 \times 5 \\ -4 \times (-3) & -4 \times 0 & -4 \times 5 \\ -3 \times (-3) & -3 \times 0 & -3 \times 5 \end{pmatrix}}^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 10 \\ 12 & 0 & -20 \\ 9 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.3

On dit que deux matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ commutent si $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{B} \times \mathbb{A}$. Trouver toutes les matrices qui commutent avec

A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION. On cherche B telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ 5b_{31} & 5b_{32} & 5b_{33} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 3b_{12} & 5b_{13} \\ b_{21} & 3b_{22} & 5b_{23} \\ b_{31} & 3b_{32} & 5b_{33} \end{pmatrix}$$

il faut que

$$\begin{cases} b_{11} = b_{11}, \\ b_{12} = 3b_{12}, \\ b_{13} = 5b_{13}, \\ 3b_{21} = b_{21}, \\ 3b_{22} = 3b_{22}, \\ 3b_{23} = 5b_{23}, \\ 5b_{31} = b_{31}, \\ 5b_{32} = 3b_{32}, \\ 5b_{33} = 5b_{33}, \end{cases} \iff B = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix} \text{ avec } \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.4

Pour quelle valeur de x la trace de la matrice A est minimale ? Et pour quelle valeur de x est-elle maximale ?

$$A = \begin{pmatrix} 2x^3 & 4 & 1 \\ 0 & 3x^2 & 2 \\ 5 & 6 & -12x \end{pmatrix}.$$

SOLUTION. Notons $y : x \mapsto \text{tr}(A)$; on a

$$y(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

Une brève étude de la fonction montre que

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$$

$$\triangleright y'(x) = 6(x^2 + x - 2)$$

$\triangleright y$ est croissante pour $x < -2$ et $x > 1$, décroissante pour $-2 < x < 1$,

par conséquent on a un maximum local pour $x = -2$ et un minimum local pour $x = 1$.

Exercice 1.5

Calculer a , b , c et d tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2.$$

SOLUTION. Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+8c & 2b+8d \end{pmatrix}$$

il faut que

$$\begin{cases} a+3c=1, \\ b+3d=0, \\ 2a+8c=0, \\ 2b+8d=1, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.6 (Janvier 2011)

Trouver pour quelles valeurs de t la matrice suivante est inversible

$$\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix} \\ = \left((t+3) \times (t-3) \times (t+4) + 5 \times (-6) \times 1 + 6 \times (-1) \times 1 \right) - \left(1 \times (t-3) \times 6 + 1 \times (-6) \times (t+3) + (t+4) \times (-1) \times 5 \right) \\ = t^3 + 4t^2 - 4t - 16 = (t+4)(t-2)(t+2). \end{aligned}$$

La matrice est inversible pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 2\}$.

Exercice 1.7 (Calculs de déterminants)

Soit a , b et c trois réels quelconques, calculer les déterminants suivants :

$$\begin{aligned} 1. D_1 &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \\ 2. D_2 &= \det \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

SOLUTION. Pour calculer un déterminant comportant des paramètres, il est souvent intéressant de faire apparaître des zéros dans une ligne ou une colonne (ne pas oublier que si l'on permute deux lignes ou deux colonnes d'un déterminant, on change le déterminant en son opposé).

$$\begin{aligned} D_1 &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - C_1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} \\ &= (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2) = (b-a)(c-a)((c+a)-(b+a)) = (b-a)(c-a)(c-b); \\ D_2 &= \det \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} = (1+a)^3 + 1 + 1 - (1+a) - (1+a) - (1+a) = (1+a)^3 - 3(1+a) + 2 \\ &= ((1+a)-1)((1+a)^2 + (1+a) - 2) = ((1+a)-1)((1+a)+2)((1+a)-1) = a^2(3+a). \end{aligned}$$

Exercice 1.8

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
1. \mathbb{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \\
2. \mathbb{B} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
3. \mathbb{C} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

SOLUTION. 1. $\det(\mathbb{A}) = 1 \times 5 - 3 \times (-7) = 26$.

2. En développant par rapport à la dernière ligne qui contient deux zéros on trouve

$$\det(\mathbb{B}) = (-1)^{3+2} \times (-2) \times \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 2 \times (2 \times 7 - 3 \times 5) = -2.$$

3. On fait apparaître des zéros par opérations élémentaires :

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{C}) &= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \times (2) \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} 2 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\
&= 2 \times \left((-1)^{1+1} \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \right) = 2 \times (3 \times (-4) - 0 \times 4) = -24.
\end{aligned}$$

Exercice 1.9 (Octobre 2011)

1. Pour quelles valeurs de $\kappa \in \mathbb{R}$ la matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible ?
2. Calculer le rang de la matrice $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Calculer le rang de la matrice $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix}$.
4. Calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 12 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

SOLUTION.

1. La matrice $\mathbb{A}$ est inversible pour $\kappa \neq \frac{3}{2}$ car $\det(\mathbb{A}) = 3 - 2\kappa$.
2. Sans faire de calcul on peut déjà affirmer que $1 \leq \text{rg}(\mathbb{B}) \leq 3$. Comme $\det(\mathbb{B}) = 0$ (sans faire de calcul, il suffit de remarquer que $C_3 = 4C_2$), alors $1 \leq \text{rg}(\mathbb{B}) \leq 2$. Comme $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$, on conclut que $\text{rg}(\mathbb{B}) = 2$.

3. Sans faire de calcul on peut déjà affirmer que $1 \leq \text{rg}(\mathbb{C}) \leq 3$. Comme $\det(\mathbb{C}) = 0$ (sans faire de calcul, il suffit de remarquer que $L_2 = 4L_1$), alors $1 \leq \text{rg}(\mathbb{C}) \leq 2$. Comme $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$, on conclut que $\text{rg}(\mathbb{C}) = 2$.

$$4. \det(\mathbb{D}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -16.$$

$$5. \det(\mathbb{E}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 12 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 16.$$

2 Systèmes linéaires



Définition : système linéaire

Soit $n, p, \geq 1$ des entiers. Un SYSTÈME LINÉAIRE $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n. \end{cases}$$

- ▷ Les COEFFICIENTS a_{ij} et les SECONDES MEMBRES b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{K}$. Les INCONNUES $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{K}$.
- ▷ Le SYSTÈME HOMOGÈNE associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- ▷ Une SOLUTION de (S) est un p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S) . Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- ▷ Un système est IMPOSSIBLE, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution. Un système est POSSIBLE, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- ▷ Deux systèmes sont ÉQUIVALENTS s'ils admettent les mêmes solutions.



Écriture matricielle

Si on note

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

le système (S) est équivalent à l'écriture matricielle $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Méthodes de résolution



Définition : système échelonné

Un système (S) est EN ESCALIER, ou ÉCHELONNÉ, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Autrement dit, un système est échelonné si les coefficients non nuls des équations se présentent avec une sorte d'escalier à marches de longueurs variables marquant la séparation entre une zone composée uniquement de zéros et une zone où les lignes situées à droite de l'escalier commencent par des termes non nuls, comme dans l'exemple suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 5x_1 & -x_2 & -x_3 + 2x_4 + x_6 = b_1 \\ & 3x_3 & -x_4 + 2x_5 = b_2 \\ & & -x_5 + x_6 = b_3 \\ & & & 5x_6 = b_4 \\ & & & & 0 = b_5 \end{array} \right.$$

Réduction

Quand un système contient une équation du type

$$0x_1 + \dots + 0x_p = b,$$

- ▷ si $b \neq 0$ le système est impossible,
- ▷ si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit à un système équivalent à (S) dit **SYSTÈME RÉDUIT**.

Définition : matrice augmentée

Si on ajoute le vecteur-colonne des seconds membres $\mathbf{b}$ à la matrice des coefficients $\mathbb{A}$, on obtient ce qu'on appelle la matrice augmentée que l'on note $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$.

Méthode du pivot de Gauss

Soit $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ la matrice des coefficients du système (S). En permutant éventuellement deux lignes du système, on peut supposer $a_{ii} \neq 0$ (appelé pivot de l'étape i).

Étape j : pour $i > j$, les transformations

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j$$

éliminent l'inconnue x_j dans les lignes L_i .

En réitérant le procédé pour i de 1 à n , on aboutit à un système échelonné.

EXEMPLE. Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

1. Résolution par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} & \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases} \\ & \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \\ & \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

2. Résolution par la méthode du pivot de Gauss en écriture matricielle :

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

donc

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Définition : rang

Le nombre d'équations du système réduit en escalier obtenu par la méthode de Gauss est le **RANG r DE LA MATRICE $\mathbb{A}$, OU DU SYSTÈME (S)**.

Théorème

Un système $\mathbb{A}x = \mathbf{b}$ de m équations à n inconnues est compatible si et seulement si $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$.

1. Si le système a n équations et n inconnues, la matrice $\mathbb{A}$ est carrée d'ordre n .
 - 1.1. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) = n$ (i.e. si $\det(\mathbb{A}) \neq 0$) alors $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ et la solution est unique.
 - 1.2. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) < n$ il y a une infinité de solutions.
 - 1.3. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) \neq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ il n'y a pas de solution.
2. Si le système a m équations et n inconnues avec $m > n$ alors
 - 2.1. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = n$ la solution est unique.
 - 2.2. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) < n$ il y a une infinité de solutions.
 - 2.3. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) \neq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ il n'y a pas de solution.
3. Si le système a m équations et n inconnues avec $m < n$ alors
 - 3.1. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) \leq m < n$ il y a une infinité de solutions.
 - 3.2. Si $\text{rg}(\mathbb{A}) \neq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ il n'y a pas de solution.

Remarque

Soit $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice des coefficients du système (S). Alors

$$0 \leq \text{rg}(\mathbb{A}) \leq \min \{ n, m \}$$

$$\text{rg}(\mathbb{A}) \leq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) \leq \min \{ n, m + 1 \}.$$

EXEMPLE. 1. n équations et n inconnues :

1.1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -26 \\ -4 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = 3$ (car $\det(\mathbb{A}) \neq 0$) donc $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ et la solution est unique.

1.2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -26 \\ -22 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2 < 3$ donc il y a une infinité de solutions.

1.3. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -26 \\ -20 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = 2 \neq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 3$ donc il n'y a pas de solution.

2. m équations et n inconnues avec $m > n$:

2.1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 14 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2$ donc la solution est unique.

2.2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2 < 3$ donc il y a une infinité de solutions.

2.3. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = 2 \neq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 3$ donc il n'y a pas de solution.

3. m équations et n inconnues avec $m < n$:

3.1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2 < 3$ donc il y a une infinité de solutions.

3.2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg}(\mathbb{A}) = 1 \neq \text{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2$ donc il n'y a pas de solution.

Méthode de Gauss-Jordan

Dans cette variante de la méthode du pivot de Gauss, à chaque étape on fait apparaître des zéros à la fois au-dessus et en-dessous du pivot.

Étape j : pour $i \neq j$, les transformations

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j$$

éliminent l'inconnue x_j dans les lignes L_i .

En répétant le procédé pour i de 1 à n , on aboutit à un système diagonal.

EXEMPLE. Résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

par la méthode de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} [A|b] &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -10 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3/4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 11L_4/40 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 9L_4/40 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_4/40}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

donc

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Définition : système de Cramer

Un SYSTÈME est dit DE CRAMER s'il a une solution, et une seule.

Propriété

Considérons un système carré d'ordre n à coefficients réels. Le système est de Cramer si une des conditions équivalentes suivantes est remplie :

1. A est inversible;
2. $\text{rg}(A) = n$;
3. le système homogène $Ax = 0$ admet seulement la solution nulle.

Méthode de Cramer

La solution d'un système de Cramer d'écriture matricielle $Ax = b$ est donnée par

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad 1 \leq j \leq n$$

où A_j est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j -ème colonne par la colonne des seconds membres b .

Cette formule est cependant d'une utilité pratique limitée à cause du calcul des déterminants qui est très coûteux.

EXEMPLE. [Système d'ordre 2] On veut résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

par la méthode de Cramer. On a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_1 &= \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, & \det(\mathbb{A}_1) &= b_1 a_{22} - a_{12} b_2, \\ \mathbb{A}_2 &= \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}, & \det(\mathbb{A}_2) &= a_{11} b_2 - b_1 a_{21},\end{aligned}$$

donc

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

EXEMPLE. On veut résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

par la méthode de Cramer. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & \det(\mathbb{A}) &= 2, \\ \mathbb{A}_1 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & \det(\mathbb{A}_1) &= -6, \\ \mathbb{A}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \det(\mathbb{A}_2) &= 10, \\ \mathbb{A}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \det(\mathbb{A}_3) &= 10,\end{aligned}$$

donc

$$x = \frac{-6}{2} = -3, \quad y = \frac{10}{2} = 5, \quad z = \frac{10}{2} = 5.$$



Définition : cofacteur

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre n . Étant donné un couple (i, j) d'entiers, $1 \leq i, j \leq n$, on note $\mathbb{A}_{ij}$ la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de $\mathbb{A}$. On appelle **COFACTEUR** de l'élément a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j} \det(\mathbb{A}_{ij})$.

EXEMPLE. Soit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors la matrice des cofacteurs de $\mathbb{A}$ est la matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Calcul de $\mathbb{A}^{-1}$

$\mathbb{A}$ étant inversible, pour obtenir $\mathbb{A}^{-1}$ il suffit de résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ qui admet pour solution $\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$. On peut alors calculer $\mathbb{A}^{-1}$ en résolvant n systèmes linéaires de termes sources $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, 0, \dots, 1)$. Les méthodes suivantes résolvent ces n systèmes linéaires simultanément.

Première méthode.

1. On calcul la matrice des cofacteurs des éléments de $\mathbb{A}$, appelée comatrice de $\mathbb{A}$;
2. on transpose la comatrice de $\mathbb{A}$;
3. on divise par $\det(\mathbb{A})$.

Cette méthode est quasi-impraticable dès que $n > 3$.

Deuxième méthode.

La matrice $\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si on obtient par opérations élémentaires sur les lignes de $\mathbb{A}$ une matrice triangulaire sans zéros sur la diagonale; non inversible si et seulement si on obtient une matrice triangulaire avec un zéro sur la diagonale. Si $\mathbb{A}$ est inversible, on effectue les mêmes opérations sur la matrice $[\mathbb{A}|\mathbb{I}_n]$ jusqu'à obtenir $[\mathbb{I}_n|\mathbb{A}^{-1}]$:

$$[\mathbb{A}|\mathbb{I}_n] \xrightarrow{\text{Opérations élémentaires}} [\mathbb{I}_n|\mathbb{A}^{-1}].$$

EXEMPLE. Soit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\det(\mathbb{A}) = ad - bc \neq 0$. Alors

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE. Calculer l'inverse de la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Première méthode.

1. On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de $\mathbb{A}$, appelée comatrice de $\mathbb{A}$:

$$\text{comatrice} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

2. on transpose la comatrice de $\mathbb{A}$:

$$\text{comatrice}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

3. on divise par $\det(\mathbb{A})$:

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode.

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}|\mathbb{I}_3] &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) = [\mathbb{I}_3|\mathbb{A}^{-1}]. \end{aligned}$$

Factorisation LU

La méthode du pivot de Gauss transforme le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en un système équivalent (c'est-à-dire ayant la même solution) de la forme $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, où $\mathbb{U}$ est une matrice triangulaire supérieure et $\mathbf{y}$ est un second membre convenablement modifié. Enfin on résout le système triangulaire $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Si on a plusieurs systèmes dont seul le second membre change, il peut être utile de factoriser une fois pour toute la matrice $\mathbb{A}$ et résoudre ensuite des systèmes triangulaires.

1. On factorise la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sous la forme d'un produit de deux matrices $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ ainsi calculées

```

for k = 1 to n - 1 do
  for i = k + 1 to n do
     $\ell_{ik} \leftarrow \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ 
    for j = k + 1 to n do
       $a_{ij}^{(k+1)} \leftarrow a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k)}$ 
    end for
  end for
end for

```

À la fin de la procédure les éléments de la matrice triangulaire supérieure $\mathbb{U}$ sont donnés par $u_{ij} = a_{ij}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = i, \dots, n$. Dans l'algorithme on n'a pas calculé les éléments diagonaux de $\mathbb{L}$ car ils sont tous égaux à 1.

2. Une fois calculées les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$, résoudre le système linéaire consiste simplement à résoudre successivement

2.1. le système triangulaire inférieur $\mathbb{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ par l'algorithme

$$y_1 = \frac{b_1}{\ell_{11}}, \quad y_i = \frac{1}{\ell_{i1}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} y_j \right), \quad i = 2, \dots, n$$

2.2. le système triangulaire supérieure $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ par l'algorithme

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}, \quad x_i = \frac{1}{u_{in}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right), \quad j = n-1, \dots, 1$$

Attention

Dans cet algorithme les pivots $a_{kk}^{(k)}$, doivent être différents de zéro. Si la matrice est inversible mais un pivot est zéro, on peut permuter deux lignes avant de poursuivre la factorisation. L'algorithme modifié s'écrit alors

```

for k = 1 to n - 1 do
  for i = k + 1 to n do
    Chercher  $\bar{r}$  tel que  $|a_{\bar{r}k}^{(k)}| = \max_{r=k, \dots, n} |a_{rk}^{(k)}|$  et échanger la ligne k avec la ligne  $\bar{r}$ 
     $\ell_{ik} \leftarrow \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ 
    for j = k + 1 to n do
       $a_{ij}^{(k+1)} \leftarrow a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k)}$ 
    end for
  end for
end for

```

Une fois calculées les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ et la matrice des permutations $\mathbb{P}$ (i.e. la matrice telle que $\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$), résoudre le système linéaire consiste simplement à résoudre successivement le système triangulaire inférieur $\mathbb{L}\mathbf{y} = \mathbb{P}\mathbf{b}$ puis le système triangulaire supérieure $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Propriété

La factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ permet de calculer le déterminant de $\mathbb{A}$ facilement :

$$\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{L}) \det(\mathbb{U}) = \prod_{k=1}^n u_{kk}.$$

Proposition

Le calcul explicite de l'inverse d'une matrice peut être effectué en utilisant la factorisation $\mathbb{LU}$ comme suit. En notant $\mathbb{X}$ l'inverse d'une matrice régulière $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les vecteurs colonnes de $\mathbb{X}$ sont les solutions des systèmes linéaires

$$\mathbb{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

En supposant que $\mathbb{PA} = \mathbb{LU}$, où $\mathbb{P}$ est la matrice de changement de pivot partiel, on doit résoudre $2n$ systèmes triangulaires de la forme

$$\mathbb{L}\mathbf{y}_i = \mathbb{P}\mathbf{e}_i, \quad \mathbb{U}\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

c'est-à-dire une suite de systèmes linéaires ayant la même matrice mais des seconds membres différents.

EXEMPLE. Soit les systèmes linéaires

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre les systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss.
2. Factoriser la matrice $\mathbb{A}$ (sans utiliser la technique du pivot) et résoudre les systèmes linéaires.
3. Calculer le déterminant de $\mathbb{A}$.

1. Résolution par la méthode du pivot de Gauss du premier système

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}|\mathbf{b}] &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

donc

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Résolution par la méthode du pivot de Gauss du second système

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}|\mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 \end{array} \right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -10 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 40 \end{cases} \implies x_4 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 1.$$

2. Factorisation de la matrice $\mathbb{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & -2 & -8 & -10 \\ 4 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & 2 & -4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & 2 & -4 & 4 \\ 4 & 7 & -1 & 40 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le premier système linéaire on résout les systèmes triangulaires $\mathbb{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0$$

et $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Pour résoudre le second système linéaire on résout les systèmes triangulaires $\mathbb{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 10, \quad y_2 = -10, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 40$$

et $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_4 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 1.$$

3. Le déterminant de $\mathbb{A}$ est $u_{11}u_{22}u_{33}u_{44} = 1 \times (-1) \times (-4) \times 40 = 160$.



Astuce

Soit r le rang du système (S) et p le nombre d'inconnues.

- ▷ Si $r = p$, (S) a une unique solution,
- ▷ si $r < p$, (S) a une infinité de solutions. Les r inconnues qui figurent au début des r équations issues de la méthode du pivot de Gauss sont les inconnues principales. Elles peuvent se calculer de façon unique en fonction des $p - r$ inconnues.

Le choix des inconnues principales d'un système est arbitraire, mais leur nombre est toujours le même.

Astuce

Pour résoudre un système (S) de m équations à n inconnues où $m > n$ on considère un sous-système carré (S') de n équations à n inconnues et on résout ce système :

- ▷ si (S') n'admet pas de solution, alors (S) non plus ;
- ▷ si (S') admet une unique solution $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, alors on vérifie si cette solution vérifie les autres $m - n$ équations du système (S) :
 - ▷ si oui, alors (S) admet l'unique solution $(c_1, c_2, \dots, c_n)$,
 - ▷ si non, alors (S) n'admet pas de solution ;
- ▷ si (S') admet une infinité de solutions, on cherche parmi ces solutions celles qui vérifient également les autres équations de (S) .

**Exercice 2.1**

Vrai ou faux ?

- ① Un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues dont les seconds membres sont nuls a des solutions non nulles.
- ② Un système linéaire de 4 équations à 3 inconnues dont les seconds membres sont nuls n'a que la solution nulles.

SOLUTION. ① Vrai : le système est de rang ≤ 3 .

② Faux. Contreexemple : un système linéaire où toutes les équations sont identiques.

Exercice 2.2

Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

SOLUTION.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -4x_2 - 2x_3 = -8, \\ 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2/2} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -4x_2 - 2x_3 = -8, \\ 4x_3 = -3. \end{cases}$$

donc $x_3 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{19}{8}$ et $x_1 = \frac{-7}{2}$.**Exercice 2.3**

Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 15. \end{cases}$$

SOLUTION.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 15 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_2 + 8x_3 = 16 \\ 5x_2 + 8x_3 = 63 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2} \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_2 + 8x_3 = 16 \\ -32x_3 = -17 \end{cases}$$

donc $x_3 = \frac{17}{32}$, $x_2 = \frac{47}{4}$ et $x_1 = \frac{43}{32}$.**Exercice 2.4 (Résolution d'un système 2×2 avec paramètre)**

Discuter et résoudre le système

$$(S_m) \quad \begin{cases} (4m^2 - 1)x + (2m - 1)^2 y = (2m + 1)^2, \\ (2m + 1)x + (4m - 1)y = 4m^2 - 1, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre $m \in \mathbb{R}$.**SOLUTION.** Comme le système contient un paramètre, on commence par calculer le déterminant de la matrice associée :

$$\begin{vmatrix} 4m^2 - 1 & (2m - 1)^2 \\ 2m + 1 & 4m - 1 \end{vmatrix} = (4m^2 - 1)(4m - 1) - (2m - 1)^2(2m + 1) = 2m(2m - 1)(2m + 1).$$

Le système est de Cramer si et seulement si ce déterminant est non nul, donc

$$(S_m) \text{ est un système de Cramer si et seulement si } m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\}.$$

▷ Étude du cas $m = -\frac{1}{2}$. Le système s'écrit

$$(S_{-1/2}) \quad \begin{cases} 4y = 0, \\ -3y = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{cases}$$

▷ Étude du cas $m = 0$. Le système s'écrit

$$(S_0) \quad \begin{cases} -x + y = 1, \\ x - y = -1, \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R}, \\ x = -1 + y. \end{cases}$$

▷ Étude du cas $m = \frac{1}{2}$. Le système s'écrit

$$(S_{1/2}) \quad \begin{cases} 0 = 4, \\ 2x + y = 0, \end{cases}$$

qui n'admet pas de solutions.

▷ Étude du cas $m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$. On utilise la méthode de Cramer : l'unique solution est donnée par

$$x = \frac{1}{2m(2m-1)(2m+1)} \begin{vmatrix} (2m+1)^2 & (2m-1)^2 \\ 4m^2-1 & 4m-1 \end{vmatrix} = \frac{-2(2m^2-5m+1)}{2m-1},$$

$$y = \frac{1}{2m(2m-1)(2m+1)} \begin{vmatrix} 4m^2-1 & (2m+1)^2 \\ 2m+1 & 4m^2-1 \end{vmatrix} = \frac{(2m+1)(2m-3)}{2m-1}.$$

Donc si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions,

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \} & \text{si } m = -1/2, \\ \{ (-1 + y, y) \mid y \in \mathbb{R} \} & \text{si } m = 0, \\ \emptyset & \text{si } m = 0, \\ \left\{ \left(\frac{-2(2m^2-5m+1)}{2m-1}, \frac{(2m+1)(2m-3)}{2m-1} \right) \right\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2.5

Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ u + v - 3w = -6 \end{cases}$$

SOLUTION. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ u + v - 3w = -6 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1/2} \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ -v - \frac{3}{2}w = -13/2 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2/2} \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ -2w = -6 \end{cases}$$

donc $w = 3$, $v = 2$ et $u = 1$.

Exercice 2.6

Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

SOLUTION. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1/2, L_3 \leftarrow L_3 + L_1/2} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3/2y + 3/2z = 0 \\ 3/2y - 3/2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -5/2y + 3/2z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

donc $z = \kappa \in \mathbb{R}$, $y = z$ et $x = z$.

Exercice 2.7

Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1 \end{cases}$$

SOLUTION. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1 \end{cases} & \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1/2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1/2}} \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2y + 3z + 6t = 16 \\ \frac{3}{2}y + z + 3t = 8 \\ \frac{1}{2}y - z - t = -2 \end{cases} \\ & \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2/4 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2/4}} \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2y + 3z + 6t = 16 \\ -\frac{5}{4}z - \frac{3}{2}t = -4 \\ -\frac{7}{4}z - \frac{5}{2}t = -6 \end{cases} \\ & \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 7L_3/5} \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2y + 3z + 6t = 16 \\ -\frac{5}{4}z - \frac{3}{2}t = -4 \\ -\frac{2}{5}t = -\frac{2}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

donc $t = 4$, $z = 2$, $y = 2$ et $x = 0$.**Exercice 2.8**

Résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

par la méthode du pivot de Gauss.

SOLUTION.

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}|\mathbf{b}] &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 \end{array} \right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -10 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 40 \end{cases} \implies x_4 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 1.$$

Exercice 2.9 (Résolution d'un système 3×3 avec paramètre.)

Discuter et résoudre le système

$$(S_a) \quad \begin{cases} (1+a)x + y + z = 0, \\ x + (1+a)y + z = 0, \\ x + y + (1+a)z = 0, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.

SOLUTION. Comme le système contient un paramètre, on commence par calculer le déterminant de la matrice associée :

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1+a)^3 + 1 + 1 - (1+a) - (1+a) - (1+a) = (1+a)^3 - 3(1+a) + 2 \\ = ((1+a) - 1)((1+a)^2 + (1+a) - 2) = ((1+a) - 1)((1+a) + 2)((1+a) - 1) = a^2(3+a).$$

Le système est de Cramer si et seulement si ce déterminant est non nul, donc

$$(S_a) \text{ est de Cramer si et seulement } a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

▷ *Étude du cas* $a = -3$. Le système s'écrit

$$(S_{-3}) \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \\ x + y - 2z = 0, \end{cases}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} -2x & y & +z=0 \\ x-2y & +z=0 \\ x & y-2z=0 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1/2]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1/2} \begin{cases} -2x & y & +z=0 \\ -\frac{3}{2}y & +\frac{3}{2}z=0 \\ \frac{3}{2}y & -\frac{3}{2}z=0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} -2x & -y & +z=0 \\ -\frac{5}{2}y & +\frac{3}{2}z=0 \\ 0z=0 \end{cases}$$

donc $z = \kappa \in \mathbb{R}$, $y = z$ et $x = z$, ainsi

$$\mathcal{S} = \{ (\kappa, \kappa, \kappa) \mid \kappa \in \mathbb{R} \}.$$

▷ *Étude du cas* $a = 0$. Le système s'écrit

$$(S_0) \quad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

donc $z = \kappa_1 \in \mathbb{R}$, $y = \kappa_2 \in \mathbb{R}$ et $x = -\kappa_1 - \kappa_2$, ainsi

$$\mathcal{S} = \{ (-\kappa_1 - \kappa_2, \kappa_2, \kappa_1) \mid (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

▷ *Étude du cas* $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$. Il s'agit d'un système de Cramer homogène, donc l'unique solution est $(0, 0, 0)$:

$$\mathcal{S} = \{ (0, 0, 0) \}.$$

Exercice 2.10 (Résolution d'un système 3×3 avec paramètre.)

Discuter et résoudre le système

$$(S_a) \quad \begin{cases} x + ay + (a-1)z = 0, \\ 3x + 2y + az = 3, \\ (a-1)x + ay + (a+1)z = a, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.

SOLUTION. Comme le système contient un paramètre, on commence par calculer le déterminant de la matrice associée :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a-1 \\ 3 & 2 & a \\ a-1 & a & a+1 \end{vmatrix} = 2(a+1) + a^2(a-1) + 3a(a-1) - 2(a-1)^2 - a^2 - 3a(a+1) = a^2(a-4).$$

Le système est de Cramer si et seulement si ce déterminant est non nul, donc

$$(S_a) \text{ est de Cramer si et seulement } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}.$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

▷ Étude du cas $a = 0$. Le système s'écrit

$$(S_0) \quad \begin{cases} x - z = 0, \\ 3x + 2y = 3, \\ -x + z = 0, \end{cases}$$

donc $z = \kappa \in \mathbb{R}$, $y = \frac{3-3\kappa}{2}$ et $x = \kappa$, ainsi

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\kappa, \frac{3-3\kappa}{2}, \kappa \right) \mid \kappa \in \mathbb{R} \right\}.$$

▷ Étude du cas $a = 4$. Le système s'écrit

$$(S_4) \quad \begin{cases} x + 4y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + 4z = 3, \\ 3x + 4y + 5z = 4, \end{cases}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + 4z = 3, \\ 3x + 4y + 5z = 4, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} x + 4y + 3z = 0, \\ -10y - 5z = 3, \\ -8y - 4z = 4, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow 10L_3 - 8L_2]{L_3 \leftarrow 10L_3 - 8L_2} \begin{cases} x + 4y + 3z = 0, \\ -10y - 5z = 3, \\ 0 = 16. \end{cases}$$

La dernière équation est impossible donc

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

▷ Étude du cas $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + ay + (a-1)z = 0, \\ 3x + 2y + az = 3, \\ (a-1)x + ay + (a+1)z = a, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (a-1)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} x + ay + (a-1)z = 0, \\ (2-3a)y + (3-2a)z = 3, \\ (2-a)ay + (3-a)az = a, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{(2-a)a}{(2-3a)}L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{(2-a)a}{(2-3a)}L_2} \begin{cases} x + ay + (a-1)z = 0, \\ (2-3a)y + (3-2a)z = 3, \\ -\frac{a^2(a-4)}{3a-2}z = \frac{4a}{3a-2}. \end{cases}$$

On obtient $z = -\frac{4}{a(a-4)}$, $y = -\frac{a-6}{a(a-4)}$, $x = \frac{a^2-2a-4}{a(a-4)}$, ainsi

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{a^2-2a-4}{a(a-4)}, -\frac{a-6}{a(a-4)}, -\frac{4}{a(a-4)} \right) \right\}.$$

Exercice 2.11 (Résolution de systèmes non carrés)

Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 6, \\ -x - y + 2z = 0, \\ 3x + 2y - 4z = 1, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

SOLUTION. (S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère le sous-système carré d'ordre 3

$$(S') \quad \begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 6, \\ -x - y + 2z = 0, \end{cases}$$

qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 6, \\ -x - y + 2z = 0, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y + z = 3, \\ y + 2z = 3, \\ 3z = 3, \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(1, 1, 1)$. On étudie alors si elle est aussi solution de l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ on a $3x + 2y - 4z = 1$ donc le triplet $(1, 1, 1)$ est solution de (S) et c'est l'unique.

Exercice 2.12 (Résolution de systèmes non carrés)

Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y + z = -1, \\ 2x + y - z = 1, \\ -x + y + 2z = -2, \\ x + y + z = 4, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.**SOLUTION.** (S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère le sous-système carré d'ordre 3

$$(S') \quad \begin{cases} x + 2y + z = -1, \\ 2x + y - z = 1, \\ -x + y + 2z = -2, \end{cases}$$

qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1, \\ 2x + y - z = 1, \\ -x + y + 2z = -2, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x + 2y + z = -1, \\ -3y - 3z = 3, \\ 3y + 3z = -3, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x + 2y + z = -1, \\ -3y - 3z = 3, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(1 + \kappa, -1 - \kappa, \kappa)$ pour $\kappa \in \mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x, y, z) = (1 + \kappa, -1 - \kappa, \kappa)$ on a $x + y + z = 1 + \kappa - 1 - \kappa + \kappa = \kappa$ donc $x + y + z = 4$ si et seulement si $\kappa = 4$ ainsi (S) admet l'unique solution $(5, -5, 4)$.

Exercice 2.13 (Résolution de systèmes non carrés)

Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.**SOLUTION.** (S) est équivalent au système

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ -3y + 3z = 0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme (κ, κ, κ) pour $\kappa \in \mathbb{R}$.**Exercice 2.14**

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 = b. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de b le système est-il possible ?
2. Donner à b la valeur trouvée au point précédent et calculer la solution complète du système.

SOLUTION. (S) est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 0 = b - 18. \end{cases}$$

1. (S) est possible si et seulement si $b = 18$.
2. Si $b = 18$, (S) admet ∞^3 solutions de la forme $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6 - a + 2b - 4c, a, b, c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.15

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système est-il compatible ? Possède-t-il une solution unique ?

SOLUTION.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1/2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1/2} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -1/2x_2 + 1/2x_3 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -1/2x_2 + 1/2x_3 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

Le système est compatible car le rang du système est $2 \leq$ au nombre d'inconnues 3 et la solution n'est pas unique car $\text{rg}(S) < 3$. Il admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.16

Trouver toutes les solutions du système linéaire homogène

$$(S) \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ -11x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

SOLUTION.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -11 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1/3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 11L_1/3}]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1/3} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 7/3 & -7/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2/2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme (κ, κ) avec $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.17

Trouver toutes les solutions du système linéaire homogène

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

SOLUTION.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{1}{2}\kappa, -\frac{3}{2}\kappa, 0, \kappa)$ avec $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.18 (Octobre 2011)

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 3y + \beta z = 3, \\ x + \beta y + 3z = -3. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :

1. aucune solution ;
2. une solution unique ;
3. une infinité de solutions.

SOLUTION.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \beta & 3 \\ 1 & \beta & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta + 2 & 1 \\ 0 & \beta - 1 & 4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (1-\beta)L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta + 2 & 1 \\ 0 & 0 & (6 - \beta - \beta^2) & -(3 + \beta) \end{array} \right).$$

Comme $6 - \beta - \beta^2 = (2 - \beta)(3 + \beta)$ on conclut que

1. (S) ne possède aucune solution si et seulement si $\beta = 2$
2. (S) possède une solution unique si et seulement si $\beta \notin \{2; -3\}$
3. (S) possède une infinité de solutions si et seulement si $\beta = -3$

Exercice 2.19 (Septembre 2009)

Déterminer si le système suivant a une solution non nulle. Dans le cas affirmatif trouver la(les) solution(s) et expliquer pourquoi :

$$(S) \quad \begin{cases} x - 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \\ 3x + 4y - 6z = 0, \\ 3x - 11y + 12z = 0. \end{cases}$$

SOLUTION. (S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère le sous-système carré d'ordre 3

$$(S') \quad \begin{cases} x - 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \\ 3x + 4y - 6z = 0, \end{cases}$$

qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \\ 3x + 4y - 6z = 0, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x - 2y + 2z = 0, \\ 5y - 6z = 0, \\ 10y - 12z = 0, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} x - 2y + 2z = 0, \\ 5y - 6z = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, 6\kappa, 5\kappa)$ pour $\kappa \in \mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x, y, z) = (2\kappa, 6\kappa, 5\kappa)$ on a $3x - 11y + 12z = 6\kappa - 66\kappa + 60\kappa = 0$ donc $3x - 11y + 12z = 0$ pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$ ainsi (S) admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, 6\kappa, 5\kappa)$ pour $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.20

Résoudre le système linéaire suivant par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION.

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{6}L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{6}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & -4 \\ 0 & \frac{11}{6} & \frac{35}{6} & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{11}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right)$$

donc

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ \frac{11}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -4 \\ 6x_3 = 6 \end{cases} \implies x_3 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_1 = 2.$$

Exercice 2.21 (Octobre 2011)

Calculer $\mathbb{A}^{-1}$ où $\mathbb{A}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SOLUTION.

$$\begin{aligned} [\mathbb{A} | \mathbb{I}_3] &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[L_3 \leftarrow -L_3]{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array} \right) = [\mathbb{I}_3 | \mathbb{A}^{-1}]. \end{aligned}$$

Exercice 2.22 (Octobre 2011)

Calculer $\mathbb{A}^{-1}$ où $\mathbb{A}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SOLUTION.

$$\begin{aligned} [\mathbb{A} | \mathbb{I}_3] &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right) = [\mathbb{I}_3 | \mathbb{A}^{-1}]. \end{aligned}$$

Exercice 2.23

Calculer les inverses des matrices suivantes (si elles existent) :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 2 & 9 & -11 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION. $\det(\mathbb{A}) = 22 \neq 0$ donc $\mathbb{A}$ est inversible et on trouve

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{B}$ est inversible si et seulement si $ad \neq bc$ et on a

$$\mathbb{B}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$\det(\mathbb{C}) = 2 \neq 0$ donc $\mathbb{C}$ est inversible et on trouve

$$\mathbb{C}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -130 & 28 & 38 \\ 24 & -5 & -7 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det(\mathbb{D}) = 0$ donc $\mathbb{D}$ n'est pas inversible.

Exercice 2.24

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 2x - 13y - 18z = 3 \\ 3x - 27y - 36z = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - 5y - 7z = 6 \\ 2x - 13y - 18z = 0 \\ 3x - 27y - 36z = -3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - 5y - 7z = 0 \\ 2x - 13y - 18z = 3 \\ 3x - 27y - 36z = 6. \end{cases}$$

SOLUTION. Les trois systèmes s'écrivent sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 2 & -13 & -18 \\ 3 & -27 & -36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 2 & -13 & -18 \\ 3 & -27 & -36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 2 & -13 & -18 \\ 3 & -27 & -36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On remarque que seul le second membre change. On calcule alors d'abord la décomposition $\mathbb{L}\mathbb{U}$ de la matrice $\mathbb{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 2 & -13 & -18 \\ 3 & -27 & -36 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -12 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre chaque système linéaire on résout les systèmes triangulaires $\mathbb{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ et $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

1. Pour le premier système on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -3, \quad y_3 = 6;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 6, \quad x_2 = -7, \quad x_1 = 10.$$

2. Pour le second système on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 6, \quad y_2 = -12, \quad y_3 = 27;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 27 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 27, \quad x_2 = -32, \quad x_1 = 35.$$

3. Pour le dernier système on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = -6;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 27 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = -6, \quad x_2 = 7, \quad x_1 = -7.$$

Exercice 2.25

Soit le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre les systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss.
2. Factoriser la matrice $\mathbb{A}$ (sans utiliser la technique du pivot) et résoudre le système linéaire.

SOLUTION. 1. Méthode du pivot de Gauss :

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{6}L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{6}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & -4 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{35}{6} & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{11}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right)$$

donc

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ \frac{11}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -4 \\ 6x_3 = 6 \end{cases} \implies x_3 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_1 = 2.$$

2. Factorisation de la matrice $\mathbb{A}$:

$$\left(\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{6}L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{6}L_1} \left(\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{6} & \frac{35}{6} \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{11}L_2} \left(\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{6} & 6 \end{array} \right)$$

donc

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système linéaire on résout les systèmes triangulaires $\mathbb{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \implies y_1 = 12, \quad y_2 = -4, \quad y_3 = 6$$

et $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \implies x_3 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_1 = 2.$$

3 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, Sous-espaces vectoriels



Définition : espace vectoriel

Un ESPACE VECTORIEL sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E contenant au moins un élément, noté 0_E , ou simplement 0 , muni d'une addition

$$u + v \in E \quad \text{pour tout } u, v \in E$$

et d'une multiplication par les scalaires

$$\alpha \cdot u \in E \quad \text{pour tout } u \in E \text{ et pour tout } \alpha \in \mathbb{K}$$

avec les propriétés suivantes : pour tout $u, v, w \in E$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

- ❶ $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativité)
- ❷ $u + v = v + u$ (commutativité)
- ❸ $u + 0_E = 0_E + u = u$ (existence d'un élément neutre pour l'addition)
- ❹ $u + (-u) = (-u) + u = 0_E$ en notant $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$ (existence d'un élément opposé)
- ❺ $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ (compatibilité avec la somme des scalaires)
- ❻ $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ (compatibilité avec la somme des vecteurs)
- ❼ $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$ (compatibilité avec le produit des scalaires)
- ❽ $1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$ (compatibilité avec l'unité)

Les éléments de E sont appelés VECTEURS, l'élément neutre de l'addition 0_E est appelé VECTEUR NUL, le symétrique d'un vecteur u pour l'addition est appelé VECTEUR OPPOSÉ DE u et est noté $-u$.

EXEMPLE. L'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$ est un espace vectoriel pour les opérations

- ▷ somme : $(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$
- ▷ multiplication : $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.



Définition : sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel. On dit que F est un SOUS-ESPACE VECTORIEL de E si et seulement si F est un espace vectoriel et $F \subset E$.

EXEMPLE.

- ▷ L'ensemble $\{0_E\}$ constitué de l'unique élément nul est un sous-espace vectoriel de E , à ne pas confondre avec l'ensemble vide $\emptyset$ qui n'est pas un sous-espace vectoriel de E (il ne contient pas le vecteur nul).
- ▷ L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de E .

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E on utilise le théorème suivant.



Théorème

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. $F \subset E$
2. $0_E \in F$
3. $u, v \in F \implies u + v \in F$
4. $u \in F, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot u \in F$

EXEMPLE. L'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet :

1. $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
2. $0_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$ car $0 + 0 = 0$;
3. si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ appartiennent à F (c'est-à-dire $a + d = 0$ et $e + h = 0$), alors $M + N = \begin{pmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{pmatrix}$ appartient à F car $(a + e) + (d + h) = (a + d) + (e + h) = 0 + 0 = 0$;
4. si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à F (c'est-à-dire $a + d = 0$) et si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha \cdot M = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$ appartient à F car $\alpha a + \alpha d = \alpha(a + d) = 0$.

EXEMPLE. On note $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on considère les sous-ensembles suivants de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- ① $F = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est paire} \}$;
- ② $F = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire} \}$;
- ③ $F = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x) + 2 \}$;
- ④ $F = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0 \}$;
- ⑤ $F = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$;
- ⑥ $F = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = 1 \}$;
- ⑦ $F = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0 \}$.

On cherche lesquels forment des sous-espaces vectoriels :

- ① F est un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car
 1. $x \mapsto 0 \in F$,
 2. $f, g \in F \implies f + g \in F$ car $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$,
 3. $f \in F, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(-x) = \alpha f(-x) = \alpha f(x) = (\alpha \cdot f)(x)$;
- ② F est un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car
 1. $x \mapsto 0 \in F$,
 2. $f, g \in F \implies f + g \in F$ car $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f + g)(x)$,
 3. $f \in F, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(-x) = \alpha f(-x) = -\alpha f(x) = -(\alpha \cdot f)(x)$;
- ③ F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il ne contient pas la fonction nulle $x \mapsto 0$;
- ④ F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car l'opposé de la fonction $f: x \mapsto 1$, qui est un élément de F , est la fonction $f: x \mapsto -1$, qui n'est pas un élément de F ;
- ⑤ F est un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car
 1. $x \mapsto 0 \in F$,
 2. $f, g \in F \implies f + g \in F$ car $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0$,
 3. $f \in F, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x) = 0$;
- ⑥ F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il ne contient pas la fonction nulle $x \mapsto 0$;
- ⑦ $F = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0 \}$; F est un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car
 1. $x \mapsto 0 \in F$,
 2. $f, g \in F \implies f + g \in F$ car $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0$,
 3. $f \in F, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(1) = \alpha f(1) = 0$.

EXEMPLE. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ et on considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}_n[x]$

- ① $F = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] \mid \deg(p) = 7 \}$;
- ② $F = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] \mid \deg(p) \leq 3 \}$;
- ③ $F = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p \text{ est pair} \}$;
- ④ $F = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p(1) = p(2) = p(3) = 0 \}$.

On cherche lesquels forment des sous-espaces vectoriels :

- ① F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$ car il ne contient pas le polynôme nul (le polynôme nul n'est pas de degré 7).
- ② F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$ car
 - 1. $p(x) = 0 \in F$ car $\deg(0) \leq 3$,
 - 2. $p, q \in F \implies p + q \in F$ car $\deg(p + q) = \deg(p) + \deg(q) \leq 3$,
 - 3. $p \in F, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot p \in F$ car $\deg(\alpha \cdot p)(1) = \deg(p) \leq 3$;
- ③ F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$ car F c'est l'intersection des deux espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ et $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est paire}\}$ de l'exemple précédent ;
- ④ F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$ car
 - 1. $p(x) = 0 \in F$,
 - 2. $p, q \in F \implies p + q \in F$ car $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 0$ pour $x = 1, 2, 3$,
 - 3. $p \in F, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot p \in F$ car $(\alpha \cdot p)(x) = \alpha p(x) = 0$ pour $x = 1, 2, 3$.

Combinaisons linéaires, espace engendré



Définition : combinaison linéaire

Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ des éléments de l'espace vectoriel E et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$. Le vecteur

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i$$

est appelé COMBINAISON LINÉAIRE des vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$.

EXEMPLE. Considérons les trois vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $\mathbf{u}_3$ est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$.

Pour prouver qu'un vecteur $\mathbf{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ il faut montrer qu'il existe p constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ telles que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{u}_p.$$

On cherche alors a et b réels tels que

$$\mathbf{u}_3 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} -1 = -a, \\ 0 = -2a + 2b, \\ -1 = -3a - b, \end{cases} \iff a = b = 1.$$

Par conséquent $\mathbf{u}_3$ est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ car $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.



Définition : espace engendré

Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ des éléments de l'espace vectoriel E . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces p vecteurs fixés est un sous-espace vectoriel de E appelé **SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ** par $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ et noté $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$:

$$\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \} = \left\{ \mathbf{u} \in E \mid \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \mathbf{u} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i \right\}.$$

Notons que les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ appartiennent à $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$ car pour tout $j = 1, 2, \dots, p$

$$\mathbf{u}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p 0 \cdot \mathbf{u}_i + 1 \cdot \mathbf{u}_j.$$

Bien sûr le vecteur $\mathbf{0}_E$ appartient à $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$ car

$$\mathbf{0}_E = \sum_{i=1}^p 0 \cdot \mathbf{u}_i.$$

EXEMPLE.

$$\triangleright \text{Vect} \{ \mathbf{0}_E \} = \{ \mathbf{0}_E \}$$

$$\triangleright \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Familles libres, génératrices, bases



Définition : famille libre, famille génératrice, base

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille $\mathcal{F}$ est...

... **GÉNÉRATRICE** DE E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$:

$$\text{pour tout } \mathbf{u} \in E \text{ il existe } (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \mathbf{u} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i;$$

... **LIBRE** si et seulement si le vecteur nul $\mathbf{0}_E$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ de façon unique :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \quad \implies \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

... **BASE** DE E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ de façon unique :

$$\text{pour tout } \mathbf{u} \in E \text{ il existe unique } (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \mathbf{u} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i;$$

Les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont alors les coordonnées du vecteur $\mathbf{u}$ dans la base $\mathcal{F}$ et on dit que E est de **DIMENSION p FINIE**.

EXEMPLE. La famille $\{ \mathbf{u} = (1, 0), \mathbf{v} = (0, 1), \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ n'est pas libre : par exemple le vecteur $(2, -1)$ peut s'écrire comme $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, comme $2\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$ etc.

EXEMPLE. Considérons les trois vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Montrons qu'ils sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$.

Il faut montrer que le vecteur $(0, 0, 0, 0)$ ne peut s'écrire que d'une seule façon comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$. Supposons que

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3,$$

ce qui revient au système linéaire

$$\begin{cases} 0 = 3a, \\ 0 = a, \\ 0 = 2a - b, \\ 0 = b + 2c \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

Par conséquent la famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

Théorème et définition

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre, noté $\dim(E)$, est appelé la DIMENSION de E .

Théorème

Dans un espace vectoriel E de dimension n , une famille génératrice a au moins n éléments. Si elle a plus de n éléments, on peut en extraire une sous-famille libre de cardinal n qui est alors une base de E . Si elle a exactement n éléments, c'est une base de E .

Théorème de la base incomplète

Dans un espace vectoriel E de dimension n , une famille libre a au plus n éléments. Si elle a moins de n éléments, on peut la compléter de façon à obtenir une base. Si elle a exactement n éléments, c'est une base de E .

Théorème de la dimension

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de E de dimension finie n . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ❶ $\mathcal{F}$ est une base de E
- ❷ $\mathcal{F}$ est libre et de cardinal n
- ❸ $\mathcal{F}$ est génératrice de E et de cardinal n
- ❹ $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de E

On utilise ce théorème principalement pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base de E . On utilisera surtout (avec E de dimension n) :

- ▷ si $\mathcal{F}$ est libre et de cardinal n alors $\mathcal{F}$ est une base de E
- ▷ si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de E alors $\mathcal{F}$ est une base de E

EXEMPLE. Avec $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n . La famille $\mathcal{B} = \{(1, 0, \dots, 0); (0, 1, \dots, 0); \dots; (0, 0, \dots, 1)\}$ est une base, appelée BASE CANONIQUE de $\mathbb{R}^n$, car pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + u_2 \cdot (0, 1, \dots, 0) + \dots + u_n \cdot (0, 0, \dots, 1)$ de façon unique.

EXEMPLE. On a déjà vu que $\mathcal{A} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que par conséquent $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. Soit $\mathcal{B} = \{(2, -1), (1, 2)\}$. Pour prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ on va prouver qu'elle est une famille libre de cardinal 2 :

▷ $\mathcal{B}$ est une famille libre car

$$\alpha_1 \cdot (2, -1) + \alpha_2 \cdot (1, 2) = (0, 0) \implies \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

▷ $\text{cardinal}(\mathcal{B}) = 2$.

Attention : dimension $\neq$ cardinal

Attention à ne pas confondre DIMENSION et CARDINAL : dans un espace vectoriel de dimension n , toutes les bases ont le même cardinal, mais il ne faut pas parler de cardinal d'un espace vectoriel, ni de dimension d'une base.

EXEMPLE. Avec $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degré $\leq n$ est de dimension $n + 1$. La base $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ est appelée BASE CANONIQUE de $\mathbb{R}_n[x]$ car, pour tout polynôme $p \in \mathbb{R}_n[x]$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ de façon unique.

EXEMPLE. Avec $n, m \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ des matrices $n \times m$ est un espace vectoriel de dimension nm .

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ est un espace vectoriel de dimension n^2 .

La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Définition : vecteurs linéairement indépendants

Quand une famille est libre, on dit que les vecteurs qui la composent sont LINÉAIREMENT INDÉPENDANTS. Une FAMILLE LIÉE est une famille non libre.

EXEMPLE.

- ▷ $\{\mathbf{u}\}$ est une famille libre si et seulement si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_E$.
- ▷ L'espace vectoriel $\{\mathbf{0}_E\}$ n'as pas de base, il est de dimension 0.
- ▷ Soit E un espace vectoriel de dimension n . Le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 0 est $\{\mathbf{0}_E\}$, le seul sous-espace vectoriel de E de dimension n est E .

Définition : vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de E sont dits colinéaires si et seulement si $\mathbf{u} = \mathbf{0}_E$ ou $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est une famille libre si et seulement si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ne sont pas colinéaires.

EXEMPLE. Soient $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (-4, 2, -6)$ et $\mathbf{w} = (-4, 2, 6)$.

- ▷ $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires car $\mathbf{v} = 2 \cdot \mathbf{u}$: la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ n'est donc pas libre ;
- ▷ $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$ ne sont pas colinéaires : la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ est libre ;
- ▷ $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ ne sont pas colinéaires : la famille $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est libre.

Théorème

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. Si deux vecteurs de $\mathcal{F}$ sont colinéaires alors la famille est liée. La réciproque est fausse.

EXEMPLE.

- ▷ Soit $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ avec $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 3, 5)$ et $\mathbf{w} = (-1, 0, 1)$. La famille est liée car $\mathbf{w} = (-1) \cdot \mathbf{u}$.
- ▷ Soit $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ avec $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 2)$ et $\mathbf{w} = (3, 0, 1)$. La famille est liée car $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Cependant les vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ ne sont pas à deux à deux colinéaires.

Pour montrer qu'une famille de plus de deux vecteurs est libre, on sera amené à résoudre le système linéaire correspondant, qui est un système homogène : la famille est libre si et seulement si le système admet uniquement la solution nulle.

Définition : rang d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ une famille d'éléments de E . On appelle RANG DE $\mathcal{F}$, et on note $\text{rg}(\mathcal{F})$, la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$:

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}).$$

Le rang d'une matrice $\mathbb{A}$ est le rang des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$, c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

Intersection et Somme d'espaces vectoriels

Théorème

L'intersection de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel.

En revanche, la réunion de deux espaces vectoriels n'en est pas un en général. le plus petit espace vectoriel contenant F et G est le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$ qui est en général différent de $F \cup G$.

Définition : somme d'espaces vectoriels

Soit F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E . On appelle somme de F_1 et F_2 l'ensemble $F_1 + F_2$ des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 :

$$u \in F_1 + F_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists v_1 \in F_1, v_2 \in F_2, u = v_1 + v_2$$

La somme de deux sous espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E .

Définition : somme directe d'espaces vectoriels

Soit F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E . La somme de F_1 et F_2 est DIRECTE, et est notée $F_1 \oplus F_2$, si leur intersection est réduite au vecteur nul :

$$F = F_1 \oplus F_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F = F_1 + F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

Proposition

La somme de deux sous espaces vectoriels F_1 et F_2 est directe si et seulement si l'écriture de tout vecteur $u \in F_1 + F_2$ sous la forme $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$ est unique.

Définition : espaces vectoriels supplémentaires

Soit F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E . Ils sont SUPPLÉMENTAIRES si leur somme est directe et égale à l'espace E , autrement dit

$$\forall u \in E, \quad \exists! v_1 \in F_1, \exists! v_2 \in F_2, \quad \text{tels que} \quad u = v_1 + v_2$$

EXEMPLE. Dans $\mathbb{R}^2$ les deux sous-espaces vectoriels $F_1 = \text{Vect} \{ (1, 0) \}$ et $F_2 = \text{Vect} \{ (0, 1) \}$ sont supplémentaires. En effet, tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique sous la forme $a(1, 0) + b(0, 1)$.

Proposition : dimension de la somme

Soit F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E .

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2).$$

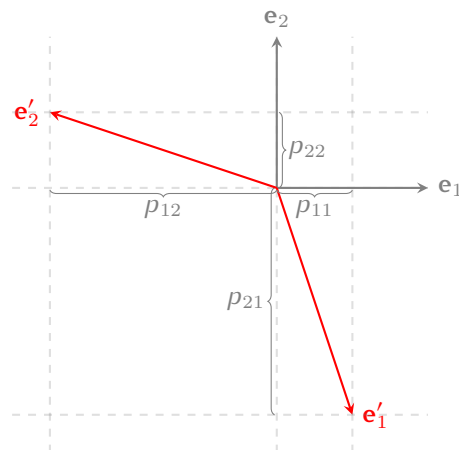
Matrices et changement de base

Quand on parle d'un vecteur d'un espace vectoriel, on parle d'un objet précis : le vecteur u de l'espace E . Mais quand on veut faire des calculs avec une base $\mathcal{B}$ de E , on calcule avec les coordonnées du vecteur u dans cette base $\mathcal{B}$. Si on veut conduire des calculs dans une base $\mathcal{C}$ de E , le vecteur u n'a pas changé, mais on doit calculer avec les coordonnées de u dans la base $\mathcal{C}$. On va établir la relation entre ces coordonnées.

Définition : matrice de changement de base

Étant donné deux bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ d'un même espace vectoriel, on appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice dont la j -ème colonne est constituée des coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$. On la note $\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

EXEMPLE. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Alors



$$\text{coord}(\mathbf{e}'_1, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

$$\text{coord}(\mathbf{e}'_2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Propriété

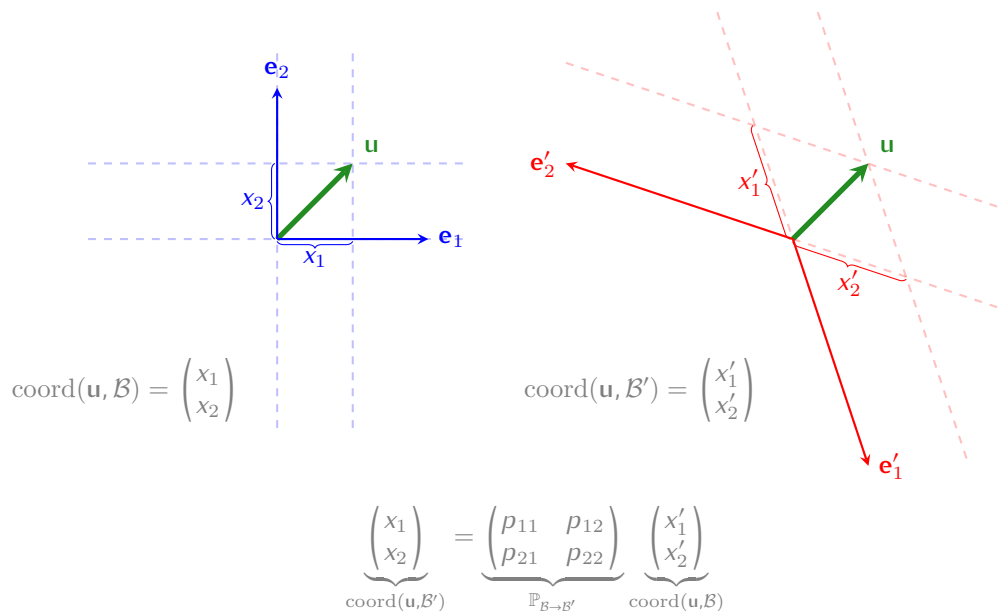
$\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est inversible et $(\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = \mathbb{P}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$.

Proposition

Si un vecteur $\mathbf{u} \in E$ a pour coordonnées $\text{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $\text{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B}') = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$ alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \mathbb{P}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE. Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ et $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Alors



Attention

Ne pas confondre le vecteur $\mathbf{u} \in E$ (qui peut être un polynôme, une fonction, une matrice...) avec la matrice colonne de ces coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de E (qu'on peut noter $\text{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B})$).

EXEMPLE. Le polynôme $p(x) = a + bx + cx^2$ a pour coordonnées (a, b, c) dans la base canonique $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ mais n'est pas égale au vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$.



Astuce

Pour démontrer qu'un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E on peut

- ❶ soit montrer que
 - ▷ $\mathbf{0}_E \in F$,
 - ▷ $\forall \mathbf{u} \in F$ et $\forall \mathbf{v} \in F, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$,
 - ▷ $\forall \mathbf{u} \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot \mathbf{u} \in F$;
- ❷ soit montrer que $F = \text{Vect} \{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de E ;
- ❸ soit montrer que F est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E .

Astuce

Si $\mathcal{F} = \{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \}$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E et si un des vecteurs de $\mathcal{F}$ (par exemple $\mathbf{e}_1$) est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F} \setminus \{ \mathbf{e}_1 \}$ est encore une famille génératrice de E . Ce résultat permet en particulier de construire une base d'un espace vectoriel connaissant une famille génératrice de cet espace.

Astuce

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \}$ d'un espace vectoriel E on cherche d'éventuelles relations entre les vecteurs $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$:

- ▷ si la famille est libre, on en déduit que $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$
- ▷ sinon, on cherche à exprimer un vecteur $\mathbf{e}_i$ comme combinaison linéaire des autres vecteurs et on «élimine» ce vecteur de la famille ; on procède ainsi jusqu'à obtenir une famille libre contenue dans $\mathcal{F}$.

Avant de commencer une recherche précise, on peut encadrer $\text{rg}(\mathcal{F})$. Ainsi

- ▷ $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \min \{ p, \dim(E) \}$ si E est de dimension finie ;
- ▷ si $\mathcal{F}$ contient au moins deux vecteurs non colinéaires alors $\text{rg}(\mathcal{F}) \geq 2$;
- ▷ si $\mathcal{F}$ contient une famille libre de q vecteurs, alors $\text{rg}(\mathcal{F}) \geq q$.

Astuce

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \}$ et $\mathcal{W} = \{ \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \}$ deux bases de E . Soit $\mathbf{u} \in E$ et supposons de connaître les coordonnées de $\mathbf{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, i.e. qu'on connaît les n coefficients $\beta_1, \dots, \beta_n$ tels que $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \mathbf{b}_j$. Pour obtenir les coordonnées de $\mathbf{u}$ dans la base $\mathcal{W}$, i.e. les n coefficients $\omega_1, \dots, \omega_n$ tels que $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \mathbf{w}_i$, on peut :

- ▷ soit utiliser la relation

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \mathbb{P}_{\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{B}} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} ;$$

- ▷ soit exprimer chacun des vecteurs $\mathbf{b}_j$ dans la base $\mathcal{W}$, i.e. trouver les n coefficients $\eta_{1j}, \dots, \eta_{nj}$ tels que $\beta_j = \sum_{i=1}^n \eta_{ij} \cdot \mathbf{w}_i$, et on obtient

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \left(\sum_{i=1}^n \eta_{ij} \cdot \mathbf{w}_i \right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \eta_{ij} \beta_j \right)}_{\omega_i} \cdot \mathbf{w}_i.$$



Exercice 3.1

Démontrer que l'ensemble

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0 \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

SOLUTION. Ici on va utiliser les deux premières méthodes.

- ❶ On montre que

- ▷ $\mathbf{0}_E \in F$: en effet $(0, 0, 0) \in F$ car $0 + 0 + 2 \times 0 = 0$;

- ▷ $\forall \mathbf{u} \in F$ et $\forall \mathbf{v} \in F$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$: soient $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in F$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in F$, alors $u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$ et $v_1 + v_2 + 2v_3 = 0$; soit $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, alors $w_1 + w_2 + 2w_3 = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + 2u_3 + 2v_3 = 0$, donc $\mathbf{w} \in F$;
- ▷ $\forall \mathbf{u} \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot \mathbf{u} \in F$: soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in F$, alors $u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$; soit $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = \lambda \cdot \mathbf{u}$, alors $w_1 + w_2 + 2w_3 = \lambda u_1 + \lambda u_2 + 2\lambda u_3 = \lambda(u_1 + u_2 + 2u_3) = 0$, donc $\mathbf{w} \in F$.

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- ② On montre que $F = \text{Vect} \{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de E . En effet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x, y, z \in \mathbb{R}^3 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \\ y = -2z - x. \end{cases}$$

Donc

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ -\kappa_1 - 2\kappa_2 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} \mid \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (On peut également en déduire que $\{(1, -1, 0), (0, -2, 1)\}$ est une famille génératrice de F .)

Exercice 3.2 (Octobre 2011)

Démontrer que l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

SOLUTION.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 0 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.3

Démontrer que l'ensemble

$$F = \{ (x, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

SOLUTION.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} \mid \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.4

Démontrer que l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

SOLUTION.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.5

Démontrer que l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b + c + d = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

SOLUTION.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b + c + d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a - b - c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.6

Soient $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$ et $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels x, y, z pour que le vecteur $\mathbf{w} = (x, y, z)$ appartienne à $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \}$.

SOLUTION.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in \text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \} &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \mathbf{w} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} a + b = x, \\ a + 2b = y, \\ a + 3b = z \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} a = 2x - y, \\ b = y - x, \\ z = -x + 2y \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x - 2y + z = 0. \end{aligned}$$

Exercice 3.7

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\mathbf{u} = (-2, 3, 7)$, $\mathbf{v} = (1, -2, -3)$ et $\mathbf{w} = (-1, -1, 6)$. Montrer que

$$\text{Vect} \{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \} = \text{Vect} \{ \mathbf{u}, \mathbf{v} \} = \text{Vect} \{ \mathbf{v}, \mathbf{w} \} = \text{Vect} \{ \mathbf{w}, \mathbf{u} \}.$$

SOLUTION. Comme $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$, on peut tirer de cette relation l'un des vecteurs en fonction des deux autres, ce qui permet de prouver que les espaces engendrés par deux des trois vecteurs sont égaux à $\text{Vect} \{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \}$.

Exercice 3.8

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^2$ de la famille $\mathcal{A} = \{ \mathbf{u}_1 = (3, 1), \mathbf{u}_2 = (-1, 5) \}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille. Le vecteur $\mathbf{w} = (1, 0)$ appartient-il à $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \}$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$.

SOLUTION. Comme $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \neq 0$, $\text{rg}(\mathcal{A}) = 2$ et l'on a $\text{rg}(\mathcal{A}) = \text{card}(\mathcal{A})$: les vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont linéaire indépendants. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ on cherche les réels a et b tels que $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases} 3a - b = 1, \\ a + 5b = 0 \end{cases} \iff a = \frac{5}{16}, \quad b = -\frac{1}{16},$$

d'où la relation $\mathbf{w} = \frac{1}{16}(5\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$.

Exercice 3.9

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\mathcal{A} = \{ \mathbf{u}_1 = (-1, 1, -3), \mathbf{u}_2 = (1, 2, 5), \mathbf{u}_3 = (1, 7, 1) \}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille. Le vecteur $\mathbf{w} = (1, 0, 0)$ appartient-il à $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \}$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$.

SOLUTION. Comme $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, $\text{rg}(\mathcal{A}) = 3$ et l'on a $\text{rg}(\mathcal{A}) = \text{card}(\mathcal{A})$: les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont linéairement indépendants. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ on cherche les réels a , b et c tels que $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases} -a + b + c = 1, \\ a + 2b + 7c = 0, \\ -3a + 5b + c = 0, \end{cases} \iff a = \frac{-3}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2},$$

d'où la relation $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(-3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3)$.

Exercice 3.10

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\mathcal{A} = \{ \mathbf{u}_1 = (1, 4, -3), \mathbf{u}_2 = (2, 5, 3), \mathbf{u}_3 = (-3, 0, -3) \}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille. Le vecteur $\mathbf{w} = (1, 0, 0)$ appartient-il à $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \}$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$.

SOLUTION. Comme $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$, $\text{rg}(\mathcal{A}) = 3$ et l'on a $\text{rg}(\mathcal{A}) = \text{card}(\mathcal{A})$: les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont linéairement indépendants. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ on cherche les réels a , b et c tels que $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 1, \\ 4a + 5b = 0, \\ -3a + 3b - 3c = 0, \end{cases} \iff a = \frac{-1}{6}, b = \frac{2}{15}, c = \frac{3}{10},$$

d'où la relation $\mathbf{w} = -\frac{1}{6}\mathbf{u}_1 + \frac{2}{15}\mathbf{u}_2 + \frac{3}{10}\mathbf{u}_3$.

Exercice 3.11

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\mathcal{A} = \{ \mathbf{u}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{u}_2 = (3, 2, 1), \mathbf{u}_3 = (3, 3, 3), \mathbf{u}_4 = (7, 0, -7) \}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille.

SOLUTION. Sans faire de calcul on sait que $\text{rg}(\mathcal{A}) \leq 3$ donc au moins un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres. Comme $4\mathbf{u}_3 = 3\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$ donc $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \} = \text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 \}$. Comme $2\mathbf{u}_4 = -7\mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_2$ alors $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 \} = \text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \}$. Comme $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ ne sont pas colinéaires, ils sont linéairement indépendants et on conclut que $\text{rg}(\mathcal{A}) = 2$.

Exercice 3.12

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^5$ de la famille

$$\mathcal{A} = \{ \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 2, 5), \mathbf{u}_2 = (2, 1, 0, 3, 4), \mathbf{u}_3 = (-1, 0, -1, 4, 7), \mathbf{u}_4 = (-9, -2, 1, -1, 9) \}.$$

Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille.

SOLUTION. Sans faire de calcul on sait que $1 \leq \text{rg}(\mathcal{A}) \leq 4$. Comme $\mathbf{u}_4 = 3\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$ donc $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \} = \text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \}$. Comme $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$, on conclut que $\text{rg}(\mathcal{A}) = 3$.

Exercice 3.13

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = (2, 3, -1), \quad \mathbf{u}_2 = (1, -1, -2)$$

et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = (3, 7, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 0, -7)$$

sont les mêmes.

SOLUTION. Pour montrer l'égalité des deux ensembles, on va prouver les deux inclusions réciproques : $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ et $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

- ① $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$: il suffit de montrer que $\mathbf{v}_1 \in \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ et $\mathbf{v}_2 \in \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, ce qui suit de la remarque $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.
- ② $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$: il suffit de montrer que $\mathbf{u}_1 \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ et $\mathbf{u}_2 \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, ce qui suit de la remarque $7\mathbf{u}_1 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ et $7\mathbf{u}_2 = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$.

Exercice 3.14 (Septembre 2009)

Montrer que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1, 3), \quad \mathbf{u}_2 = (2, 4, 1, -2), \quad \mathbf{u}_3 = (3, 6, 3, -7)$$

et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, -4, 11), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 4, -5, 14)$$

sont les mêmes.

SOLUTION. On note U l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ et V l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Pour démontrer que $U = V$ on montre que $U \subset V$ et que $V \subset U$.

▷ Pour montrer que $U \subset V$ il suffit de montrer que chaque $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, 3$, est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 &\iff \begin{cases} 1 = a + 2b, \\ 2 = 2a + 4b, \\ -1 = -4a - 5b, \\ 3 = 11a + 14b, \end{cases} \iff a = -1, \quad b = 1 \\ \\ \mathbf{u}_2 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 &\iff \begin{cases} 2 = a + 2b, \\ 4 = 2a + 4b, \\ 1 = -4a - 5b, \\ -2 = 11a + 14b, \end{cases} \iff a = -4, \quad b = 3 \\ \\ \mathbf{u}_3 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 &\iff \begin{cases} 3 = a + 2b, \\ 6 = 2a + 4b, \\ 3 = -4a - 5b, \\ -7 = 11a + 14b, \end{cases} \iff a = -7, \quad b = 5 \end{aligned}$$

▷ Pour montrer que $V \subset U$ il suffit de montrer que chaque $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2$, est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$:

$$\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 \iff \begin{cases} 1 = a + 2b + 3c, \\ 2 = 2a + 4b + 6c, \\ -4 = -a + b + 3c, \\ 11 = 3a - 2b - 7c, \end{cases} \iff a = 3 + \kappa, \quad b = -1 - 2\kappa, \quad c = \kappa,$$

$$v_2 = au_1 + bu_2 + cu_3 \iff \begin{cases} 2 = a + 2b + 3c, \\ 4 = 2a + 4b + 6c, \\ -5 = -a + b + 3c, \\ 14 = 3a - 2b - 7c, \end{cases} \iff a = 4 - \kappa, \quad b = -1 - 2\kappa, \quad c = \kappa,$$

Exercice 3.15

Soient $p_0(x) = x + 1$, $p_1(x) = x^2 + x$ et $p_2(x) = 2x^2 + 1$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$. Démontrer que $\text{Vect} \{ p_0, p_1, p_2 \} = \mathbb{R}_2[x]$.

SOLUTION. Pour prouver l'égalité de deux ensembles A et B , on peut démontrer que $A \subset B$ et que $B \subset A$. Pour démontrer que $A \subset B$, on considère un élément quelconque de A et on démontre qu'il appartient à B .

- ▷ Comme $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ qui est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de ces trois polynômes est encore un élément de $\mathbb{R}_2[x]$, par conséquent $\text{Vect} \{ p_0, p_1, p_2 \} \subset \mathbb{R}_2[x]$.
 ▷ $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{Vect} \{ p_0, p_1, p_2 \}$ ssi pour tout $q \in \mathbb{R}_2[x]$ il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que $q = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2$:

$$\begin{aligned} q(x) = a + bx + cx^2 \in \text{Vect} \{ p_0, p_1, p_2 \} \\ \iff \exists (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } q = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 \\ \iff \exists (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a + bx + cx^2 = \lambda_0(x + 1) + \lambda_1(x^2 + x) + \lambda_2(2x^2 + 1) \\ \iff \exists (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a + bx + cx^2 = (\lambda_0 + \lambda_2) + (\lambda_0 + \lambda_1)x + (\lambda_1 + 2\lambda_2)x^2 \\ \iff \exists (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_2 = a, \\ \lambda_0 + \lambda_1 = b, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = c. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, le système est de Cramer et on peut conclure que $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{Vect} \{ p_0, p_1, p_2 \}$. Après résolution du système linéaire on trouve $q = bp_0 + (-a + b + c)p_1 + (a - b)p_2$.

Exercice 3.16

Étudier si la famille

$$\mathcal{F} = \{ \mathbf{u} = (2, 3), \mathbf{v} = (4, 5) \}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

SOLUTION. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \implies a_i = 0 \quad \forall i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1 \mathbf{u} + a_2 \mathbf{v} = (0, 0) \iff \begin{cases} 2a_1 + 4a_2 = 0, \\ 3a_1 + 5a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre.

Exercice 3.17

Étudier si la famille

$$\mathcal{F} = \{ \mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (2, 1, 0), \mathbf{w} = (0, -1, 2) \}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

SOLUTION. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \quad \Longrightarrow \quad a_i = 0 \quad \forall i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1 \mathbf{u} + a_2 \mathbf{v} + a_3 \mathbf{w} = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0, \\ a_2 - a_3 = 0, \\ a_1 + 2a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = -2\kappa, \\ a_2 = \kappa, \\ a_3 = \kappa \end{cases}$$

donc la famille est liée. De plus, en prenant par exemple $\kappa = 1$, on a $\mathbf{w} = 2 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Exercice 3.18

Étudier si la famille

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{C} = \mathbb{I}_3 \right\}$$

de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

SOLUTION. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \quad \Longrightarrow \quad a_i = 0 \quad \forall i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1 \mathbb{A} + a_2 \mathbb{B} + a_3 \mathbb{C} = \mathbb{O}_3 \iff \begin{cases} 3a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ 2a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + a_2 = 0, \\ 2a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ 3a_1 + a_2 = 0, \\ 2a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + a_2 = 0, \\ 3a_1 + a_2 + a_3 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre.

Exercice 3.19

Étudier si la famille

$$\mathcal{F} = \{ p_0(x) = x^3 + x^2, p_1(x) = x^2 + x, p_2(x) = x + 1, p_3(x) = x^3 + 1 \}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

SOLUTION. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \quad \Longrightarrow \quad a_i = 0 \quad \forall i.$$

Ici

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0 \iff (2a_2 + a_3) + (a_1 + a_2)x + (a_0 + a_1)x^2 + (a_0 + a_3)x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 + a_2 = 0, \\ a_0 + a_1 = 0, \\ a_0 + a_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \kappa, \\ a_1 = -\kappa, \\ a_2 = \kappa, \\ a_3 = -\kappa, \end{cases} \quad \text{pour tout } \kappa \in \mathbb{R}$$

donc la famille est liée. De plus, en prenant par exemple $\kappa = 1$ on a $p_3 = p_0 - p_1 + p_2$.

Exercice 3.20

On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Les familles suivantes sont libres ?

- ① $\{\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$
- ② $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$
- ③ $\{\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4\}$
- ④ $\{3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$
- ⑤ $\{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\}$

SOLUTION.

- ① Oui
- ② Oui
- ③ Non
- ④ Oui
- ⑤ Non : $-7(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = 2(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + 3(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)$

Exercice 3.21

Montrer que les vecteurs $\mathbf{w}_1 = (1, -1, i)$, $\mathbf{w}_2 = (-1, i, 1)$ et $\mathbf{w}_3 = (i, 1, -1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$. Calculer ensuite les coordonnées de $\mathbf{w} = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

SOLUTION. Comme $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ -1 & i & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} = -2i$, les vecteurs constituent une famille libre. Étant donné que $\dim(\mathbb{C}^3) = 3$ et que $\mathbf{w}_i \in \mathbb{C}^3$ pour $i = 1, 2, 3$, la famille $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

On cherche maintenant $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 + c\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}$:

$$\begin{cases} a - b + ic = 1 + i \\ -a + ib + c = 1 - i \\ ia + b - c = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ c = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{cases}$$

Exercice 3.22

Vrai ou Faux ?

- ① Toute famille génératrice contient une base.
- ② La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteur de cet espace.
- ③ Toute famille contenant une famille liée est liée.
- ④ La base de $\mathbb{R}_3[x]$ est $\{1, x, x^2, x^3\}$.
- ⑤ Si $E = \text{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ et si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est une famille libre, alors $\dim(E) = 3$.
- ⑥ $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\} = \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{p-1}\}$ si et seulement si $\mathbf{u}_p$ est combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{p-1}$.
- ⑦ Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E . On suppose que deux vecteurs parmi ces trois ne sont pas colinéaires. Alors la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est libre.

SOLUTION.

- ① Vrai.
- ② Faux. Un espace vectoriel de dimension finie a une infinité de vecteurs. La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteur d'une de ces bases.
- ③ Vrai. La relation non trivial qui lie des vecteurs de la plus petite des deux famille est vraie dans la plus grande.
- ④ Incorrect. On ne peut pas parler de «la» base de $\mathbb{R}_3[x]$ car il y en a une infinité.
- ⑤ Vrai. La famille $\{u, v, w\}$ est une base de E car libre et génératrice de E .
- ⑥ Vrai.
- ⑦ Faux. Par exemple si $w = u + v$, deux vecteurs parmi ces trois ne sont pas colinéaires mais la famille $\{u, v, w\}$ est liée.

Exercice 3.23

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{ (x, x, y, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de $\mathcal{F}$ et sa dimension.

SOLUTION. 1. $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} \mid \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Les deux vecteurs $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 0, 1, 1)$ constituent une famille génératrice de $\mathcal{F}$. Comme ils ne sont pas colinéaires, cette famille est libre donc elle est une base de $\mathcal{F}$. Comme cardinal $\{u_1, u_2\} = 2$, alors $\dim(\mathcal{F}) = 2$.

Exercice 3.24

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{ a + ax^2 + bx^4 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Donner une base de $\mathcal{F}$ et sa dimension.

SOLUTION. 1. $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$ car

$$\mathcal{F} = \{ a + ax^2 + bx^4 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \} = \{ a(1 + x^2) + bx^4 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \} = \text{Vect} \{ 1 + x^2, x^4 \}.$$

2. Les deux polynômes $p(x) = 1 + x^2$ et $q(x) = x^4$ constituent une famille génératrice de $\mathcal{F}$. Comme ils ne sont pas colinéaires, cette famille est libre donc elle est une base de $\mathcal{F}$. Comme cardinal $\{p, q\} = 2$, alors $\dim(\mathcal{F}) = 2$.

Exercice 3.25

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0 \}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de $\mathcal{F}$ et sa dimension.

SOLUTION. 1. $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ -2\kappa_1 - \kappa_2 \end{pmatrix} \mid \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Les deux vecteurs $u_1 = (1, 0, -2)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$ constituent une famille génératrice de $\mathcal{F}$. Comme ils ne sont pas colinéaires, cette famille est libre donc elle est une base de $\mathcal{F}$. Comme cardinal $\{u_1, u_2\} = 2$, alors $\dim(\mathcal{F}) = 2$.

Exercice 3.26

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de $\mathcal{F}$ et sa dimension.

SOLUTION. 1. $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \kappa_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

2. Les trois matrices $\mathbb{I}_3$, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ constituent une famille génératrice de $\mathcal{F}$. On vérifie s'il s'agit d'une famille libre : on dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \quad \implies \quad a_i = 0 \quad \forall i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1 \mathbb{I}_3 + a_2 \mathbb{A} + a_3 \mathbb{B} = \mathbb{O}_3 \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ 0 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_1 = 0, \\ 0 = 0, \\ a_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ a_1 + a_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre et est une base de $\mathcal{F}$. Comme cardinal $\{ \mathbb{I}_3, \mathbb{A}, \mathbb{B} \} = 3$, alors $\dim(\mathcal{F}) = 3$.

Exercice 3.27

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p(1) = 0 \}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Donner une base de $\mathcal{F}$ et sa dimension.

SOLUTION. 1. $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ car

$$\mathcal{F} = \{ x(x-1)(ax+b) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \left\{ a \left(x^2(x-1) \right) + b \left(x(x-1) \right) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \{ x^2(x-1), x(x-1) \}.$$

2. Les deux polynômes $p(x) = x^2(x-1)$ et $q(x) = x(x-1)$ constituent une famille génératrice de $\mathcal{F}$. Comme ils ne sont pas colinéaires, cette famille est libre donc elle est une base de $\mathcal{F}$. Comme cardinal $\{ p, q \} = 2$, alors $\dim(\mathcal{F}) = 2$.

Exercice 3.28 (Janvier 2011)

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 avec les entrées réelles. Soient a , b et c trois nombres réels quelconques. Considérons le sous-ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Donner une base explicite de $\mathcal{E}$.

SOLUTION. 1. $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

2. Les trois matrices $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ constituent une famille génératrice de $\mathcal{E}$. On vérifie s'il s'agit d'une famille libre : on dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \quad \implies \quad a_i = 0 \quad \forall i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1 \mathbb{A} + a_2 \mathbb{B} + a_3 \mathbb{C} = \mathbf{0}_2 \iff \begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \\ 2a_3 = 0, \\ -a_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre et est une base de $\mathcal{E}$. Comme $\text{cardinal} \{ \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \} = 3$, alors $\dim(\mathcal{E}) = 3$.

Exercice 3.29 (Septembre 2009)

Soit V l'espace vectoriel des matrices $\mathbb{M}$ carrées d'ordre n (sur le corps des réels).

1. Montrer que le sous-ensemble W de ces matrices qui commutent avec une matrice donnée $\mathbb{T}$

$$W = \{ \mathbb{M} \in V \mid \mathbb{M} \times \mathbb{T} = \mathbb{T} \times \mathbb{M} \}$$

est un sous-espace vectoriel de V .

2. Soit $\mathbb{T}$ la matrice d'ordre 2 définie par

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la dimension et une base de W dans ce cas.

SOLUTION. 1. On montre que

- ▷ $\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_n \in W$: en effet $\mathbf{0}_n \in W$ car $\mathbf{0}_n \times \mathbb{T} = \mathbf{0}_n = \mathbb{T} \times \mathbf{0}_n$;
- ▷ $\forall \mathbb{A} \in W$ et $\forall \mathbb{B} \in W$, $\mathbb{A} + \mathbb{B} \in W$: en effet, soit $\mathbb{C} = \mathbb{A} + \mathbb{B}$, alors $\mathbb{C} \times \mathbb{T} = (\mathbb{A} + \mathbb{B}) \times \mathbb{T} = \mathbb{A} \times \mathbb{T} + \mathbb{B} \times \mathbb{T} = \mathbb{T} \times \mathbb{A} + \mathbb{T} \times \mathbb{B} = \mathbb{T} \times (\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \mathbb{T} \times \mathbb{C}$, donc $\mathbb{C} \in W$;
- ▷ $\forall \mathbb{A} \in W$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \mathbb{A} \in W$: en effet, soit $\mathbb{C} = \lambda \cdot \mathbb{A}$, alors $\mathbb{C} \times \mathbb{T} = (\lambda \cdot \mathbb{A}) \times \mathbb{T} = \lambda \cdot (\mathbb{A} \times \mathbb{T}) = \lambda \cdot (\mathbb{T} \times \mathbb{A}) = \mathbb{T} \times (\lambda \cdot \mathbb{A}) = \mathbb{T} \times \mathbb{C}$, donc $\mathbb{C} \in W$.

Par conséquent W est un sous-espace vectoriel de V .

2. Soit $\mathbb{T}$ la matrice d'ordre 2 définie par

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 W &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid \begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.
 \end{aligned}$$

Comme ces deux matrices ne sont pas colinéaires, cette famille est libre donc elle est une base de W qui a dimension 2.

Exercice 3.30 (Février 2010)

Trouver une base de l'espace engendré par les polynômes dans les deux familles suivantes

1. $W = \{ 1 + 2x + 3x^2, x + 2x^2, 1 + 2x + 4x^2, 1 + x \}$
2. $W = \{ 2 + 2x^2, 2 + x - x^2, 3 + x + x^2, 3 + x + 3x^2 \}$

SOLUTION. 1. Notons

$$w_1(x) = 1 + 2x + 3x^2, \quad w_2(x) = x + 2x^2, \quad w_3(x) = 1 + 2x + 4x^2, \quad w_4(x) = 1 + x.$$

W est une famille non libre si et seulement si

$$\begin{aligned}
 \exists (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0) \mid aw_1(x) + bw_2(x) + cw_3(x) + dw_4(x) &= 0 \iff \\
 \exists (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0) \mid (a + c + d) + (2a + b + 2c + d)x + (3a + 2b + 4c)x^2 &= 0 \iff \\
 \begin{cases} a + c + d = 0, \\ 2a + b + 2c + d = 0, \\ 3a + 2b + 4c = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a + c + d = 0, \\ b - d = 0, \\ 2b + c - 3d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c + d = 0, \\ b - d = 0, \\ c - d = 0 \end{cases} \\
 (a, b, c, d) &= (-2\kappa, \kappa, \kappa, \kappa), \quad \kappa \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Autrement dit $w_4 = 2w_1 - w_2 - w_3$. On a alors

$$\text{Vect} \{ w_1, w_2, w_3, w_4 \} = \text{Vect} \{ w_1, w_2, w_3 \}.$$

Vérifions si la famille $\{ w_1, w_2, w_3 \}$ est libre : on dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{ u_1, \dots, u_p \}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot u_i = \mathbf{0}_E \implies a_i = 0 \quad \forall i.$$

Ici

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 a_i \cdot u_i = \mathbf{0}_E &\iff aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0 \\
 &\iff (a + c) + (2a + b + 2c)x + (3a + 2b + 4c)x^2 = 0 \\
 &\iff \begin{cases} a + c = 0, \\ 2a + b + 2c = 0, \\ 3a + 2b + 4c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0
 \end{aligned}$$

donc la famille est libre. Par conséquent $\{ w_1, w_2, w_3 \}$ est une base de l'espace $\text{Vect}(W)$.

2. Notons

$$w_1(x) = 2 + 2x^2, \quad w_2(x) = 2 + x - x^2, \quad w_3(x) = 3 + x + x^2, \quad w_4(x) = 3 + x + 3x^2.$$

W est une famille non libre si et seulement si

$$\begin{aligned} & \exists (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0) \mid aw_1(x) + bw_2(x) + cw_3(x) + dw_4(x) = 0 \iff \\ & \exists (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0) \mid (2a + 2b + 3c + 3d) + (b + c + d)x + (2a - b + c + 3d)x^2 = 0 \iff \\ & \begin{cases} 2a + 2b + 3c + 3d = 0, \\ b + c + d = 0, \\ 2a - b + c + 3d = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 2b + 3c + 3d = 0, \\ b + c + d = 0, \\ b + 4c + 6d = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 2b + 3c + 3d = 0, \\ b + c + d = 0, \\ 3c + 5d = 0, \end{cases} \iff \\ & (a, b, c, d) = (\kappa, 2\kappa, -5\kappa, 3\kappa), \quad \kappa \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Autrement dit $3w_4 = -w_1 - 2w_2 + 5w_3$. On a alors

$$\text{Vect} \{ w_1, w_2, w_3, w_4 \} = \text{Vect} \{ w_1, w_2, w_3 \}.$$

Vérifions si la famille $\{ w_1, w_2, w_3 \}$ est libre : on dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{ u_1, \dots, u_p \}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot u_i = \mathbf{0}_E \implies a_i = 0 \quad \forall i.$$

Ici

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \cdot u_i = \mathbf{0}_E & \iff aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0 \\ & \iff (2a + 2b + 3c) + (b + c)x + (2a - b + c)x^2 = 0 \\ & \iff \begin{cases} 2a + 2b + 3c = 0, \\ b + c = 0, \\ b + 4c = 0, \end{cases} \iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

donc la famille est libre. Par conséquent $\{ w_1, w_2, w_3 \}$ est une base de l'espace $\text{Vect}(W)$.

Exercice 3.31 (Changement de base)

Soit

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1 + x + x^2 + x^3, \\ q_1(x) &= x + x^2 + x^3, \\ q_2(x) &= x^2 + x^3, \\ q_3(x) &= x^3, \end{aligned}$$

quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$.

1. Démontrer que l'ensemble $\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ qu'on notera $\mathcal{B}$.
2. Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Déterminer $\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ puis $\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$.
3. Exprimer le polynôme $a + bx + cx^2 + dx^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

SOLUTION. 1. Pour montrer que l'ensemble $\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ il faut montrer qu'il s'agit d'une famille libre : on dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{ u_1, \dots, u_p \}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot u_i = \mathbf{0}_E \implies a_i = 0 \quad \forall i.$$

Ici

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot u_i = \mathbf{0}_E \iff a_0q_0 + a_1q_1 + a_2q_2 + a_3q_3 = 0$$

$$\iff a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 = 0 \iff \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre. Comme $\text{cardinal}(\text{Vect}\{q_0, q_1, q_2, q_3\}) = 4$ et que $\dim(\mathbb{R}_4[x]) = 4$, alors $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. $\mathcal{C} = \{c_0(x) = 1, c_1(x) = x, c_2(x) = x^2, c_3(x) = x^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Par définition la matrice $\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$ est telle que sa j -ème colonne est constituée des coordonnées de q_j dans la base $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1 \cdot c_0(x) + 1 \cdot c_1(x) + 1 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x), \\ q_1(x) &= 0 \cdot c_0(x) + 1 \cdot c_1(x) + 1 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x), \\ q_2(x) &= 0 \cdot c_0(x) + 0 \cdot c_1(x) + 1 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x), \\ q_3(x) &= 0 \cdot c_0(x) + 0 \cdot c_1(x) + 0 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x), \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = (\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}})^{-1}$; pour inverser la matrice on peut utiliser la méthode de Gauss

$$\begin{aligned} [\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} | \mathbb{I}_4] &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}} \\ &\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) = [\mathbb{I}_4 | \mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}] \end{aligned}$$

ou résoudre directement le système linéaire (ici c'est très facile car il s'agit d'un système triangulaire) :

$$\begin{cases} q_0 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3, \\ q_1 = c_1 + c_2 + c_3, \\ q_2 = c_2 + c_3, \\ q_3 = c_3, \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 = q_0 - q_1, \\ c_1 = q_1 - q_2, \\ c_2 = q_2 - q_3, \\ c_3 = q_3, \end{cases}$$

ainsi

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} c_0(x) &= 1 \cdot q_0(x) - 1 \cdot q_1(x) + 0 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x), \\ c_1(x) &= 0 \cdot q_0(x) + 1 \cdot q_1(x) - 1 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x), \\ c_2(x) &= 0 \cdot q_0(x) + 0 \cdot q_1(x) + 1 \cdot q_2(x) - 1 \cdot q_3(x), \\ c_3(x) &= 0 \cdot q_0(x) + 0 \cdot q_1(x) + 0 \cdot q_2(x) + 1 \cdot q_3(x). \end{aligned}$$

3. Soit le polynôme $a + bx + cx^2 + dx^3$; dans la base $\mathcal{C}$ il a coordonnées (a, b, c, d) , dans la base $\mathcal{B}$ il a coordonnées

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b - a \\ c - b \\ d - c \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.32 (Rang d'une famille de vecteurs)

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer le rang de la famille

$$\mathcal{E} = \{ \mathbf{u}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{u}_2 = (2, -1, 1), \mathbf{u}_3 = (1, 0, 1), \mathbf{u}_4 = (0, 1, 1) \}.$$

SOLUTION. Notons $\mathcal{F} = \text{Vect}(\mathcal{E})$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{E}$.

- ▷ Comme $\text{card}(\mathcal{E}) = 4$ alors $\text{rg}(\mathcal{E}) = \dim(\mathcal{F}) \leq 4$.
 - ▷ Comme $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $\dim(\mathcal{F}) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ainsi $\text{rg}(\mathcal{E}) = \dim(\mathcal{F}) \leq 3$.
 - ▷ Comme $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont linéairement indépendants, alors $\dim(\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}) = 2$ et comme $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \mathcal{F}$, on obtient $\text{rg}(\mathcal{E}) = \dim(\mathcal{F}) \geq 2$.
 - ▷ Étudions maintenant la famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset \mathcal{E}$: si elle est libre, comme $\dim(\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}) = 3$ alors $\text{rg}(\mathcal{E}) = 3$; si elle est liée on ne peut pas conclure. On étudiera alors la famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\} \subset \mathcal{E}$: si elle est libre, comme $\dim(\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\}) = 3$ alors $\text{rg}(\mathcal{E}) = 3$; si elle est liée $\text{rg}(\mathcal{E}) = 2$.
Comme $5\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$, la famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ est liée.
Comme $5\mathbf{u}_4 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, la famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\}$ est liée.
- On conclut que $\text{rg}(\mathcal{E}) = 2$.

Exercice 3.33

On pose $\mathbf{u}_1 = (3, 4, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1)$ et $\mathbf{v}_2 = (-4, 2, 0)$. Déterminer les vecteurs appartenant à l'intersection $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \cap \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

SOLUTION. Un vecteur $\mathbf{w}$ de l'intersection s'écrit à la fois $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$ et $c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 3a = -c - 4d, \\ 4a + b = 2c + 2d, \\ 2a - b = c \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + c + 4d = 0, \\ 4a + b - 2c - 2d = 0, \\ 2a - b - c = 0 \end{cases} \iff d = 3\kappa, \quad c = -6\kappa, \quad b = 2\kappa, \quad a = -2\kappa.$$

Par conséquent $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \cap \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{-2\kappa\mathbf{u}_1 + 2\kappa\mathbf{u}_2 \mid \kappa \in \mathbb{R}\} = \{2\kappa \cdot (-3, -4 + 1, -2 - 1) \mid \kappa \in \mathbb{R}\} = \{2\kappa \cdot (-3, -3, -3) \mid \kappa \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}.$

4 Applications linéaires

Rappels : relation, fonction, application

Définition

Soient E et F deux ensembles.

▷ Le **PRODUIT CARTÉSIEN** $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y un élément de F . L'égalité dans $E \times F$ est définie par : $(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'$.

▷ Une **RELATION BINAIRE** (ou correspondance) de E dans (ou vers) F est un triplet $\mathcal{R} = (E, F, G)$ où G une partie de $E \times F$. L'ensemble E est appelé *ensemble de départ* de $\mathcal{R}$, l'ensemble F est appelé *ensemble d'arrivée* de $\mathcal{R}$. L'ensemble G est appelé *graphe* de $\mathcal{R}$.

NOTATION. Pour tout $(x, y) \in E \times F$, on écrit " $x\mathcal{R}y$ " et on dit " x est en relation avec y " ssi " $(x, y) \in G$ ".

▷ Une **FONCTION** f de E dans F est une relation de E dans F vérifiant : pour tout $x \in E$, il existe au plus un élément $y \in F$ satisfaisant xfy .

▷ Le **DOMAINE DE DÉFINITION** D_f d'une fonction f de E dans F est l'ensemble des $x \in E$ satisfaisant : il existe un et un seul $y \in F$ tel que xfy .

NOTATION. Pour tout $x \in D_f$, on note $f(x)$ le seul point $y \in F$ satisfaisant xfy . Donc pour tout $(x, y) \in D_f \times F$, $xfy \iff y = f(x)$. Si $x \in D_f$ alors $f(x)$ est appelé "l'image de x par f ". Si $y \in F$ alors tout point $x \in D_f$ satisfaisant $y = f(x)$ est appelé "un antécédent de y par f ".

▷ Soit f une fonction de E dans F et A une partie de E . L'**IMAGE DIRECTE** de A par f est la partie de F définie par $f(A) := \{y \in F : \exists x \in A \cap D_f \ y = f(x)\}$.

▷ Soit f une fonction de E dans F et B une partie de F . L'**IMAGE RÉCIPROQUE** de B par f est la partie de E définie par $f^{-1}(B) := \{x \in D_f : f(x) \in B\}$.

Attention à ne pas confondre l'image réciproque de B , qui existe toujours, avec l'image de B par f^{-1} , qui n'existe que si f est une bijection. Ici on ne suppose rien sur f .

▷ Une **APPLICATION** f de E dans F est une fonction de E dans F dont le domaine de définition est égal à E .

▷ Une **INJECTION** f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

$$\forall (x, x') \in E \times E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Attention à ne pas confondre :

▷ la définition d'une application qui s'écrit

$$\begin{aligned} \forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x = x' &\implies f(x) = f(x'), \\ \forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) \neq f(x') &\implies x \neq x', \end{aligned}$$

▷ la définition d'application injective qui s'écrit

$$\begin{aligned} \forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x \neq x' &\implies f(x) \neq f(x'), \\ \forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') &\implies x = x'. \end{aligned}$$

▷ Une **SURJECTION** f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

▷ Une **BIJECTION** f de E dans F est une application de E dans F qui est injective et surjective.

Définitions



Définition : application linéaire

Soit E, F deux espaces vectoriels. Une APPLICATION $f: E \rightarrow F$ est dite LINÉAIRE (ou HOMOMORPHISME) de E vers F si

- ▷ $f(u + v) = f(u) + f(v)$ pour tout $u, v \in E$,
- ▷ $f(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot f(u)$ pour tout $u, \alpha \in \mathbb{K}$,
- ou, de manière équivalente,
- ▷ $f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot f(u) + \beta \cdot f(v)$ pour tout $u, v \in E$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

EXEMPLE. Soit les applications :

- ① $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2y - z, x + z)$;
- ② $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (0, 2y - z, 0)$;
- ③ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y + 3, 2y - z, x + z)$;
- ④ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2yz, x + z)$;
- ⑤ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$;
- ⑥ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x$.

On veut trouver celles qui sont linéaires :

- ① f est une application linéaire car pour tout $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(ax + bx', ay + by', az + bz') &= (ax + bx' + 2(ay + by') + 3(az + bz'), 2(ay + by') - (az + bz'), ax + bx' + (az + bz')) \\ &= a(x + 2y + 3z, 2y - z, x + z) + b(x' + 2y' + 3z', 2y' - z', x' + z') = af(x, y, z) + bf(x', y', z'); \end{aligned}$$

- ② f est une application linéaire car pour tout $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(ax + bx', ay + by', az + bz') &= (0, 2(ay + by') - (az + bz'), 0) \\ &= a(0, 2y - z, 0) + b(0, 2y' - z', 0) = af(x, y, z) + bf(x', y', z'); \end{aligned}$$

- ③ f n'est pas une application linéaire car par exemple $f(0, 0, 0) = (3, 0, 0)$;

- ④ f n'est pas une application linéaire car pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ on a

$$\begin{aligned} f(ax, ay, az) &= (ax + 2ay + 3az, 2a^2yz, ax + az) \\ &\neq \\ &af(x, y, z) = (ax + 2ay + 3az, 2ayz, ax + az); \end{aligned}$$

- ⑤ f est une application linéaire car pour tout $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(ax + bx', ay + by', az + bz') &= ax + bx' + 2(ay + by') + 3(az + bz') \\ &= a(x + 2y + 3z) + b(x' + 2y' + 3z') = af(x, y, z) + bf(x', y', z'); \end{aligned}$$

- ⑥ f n'est pas une application linéaire car par exemple $f(2) = 8 \neq 2f(1) = 3$.



Définition

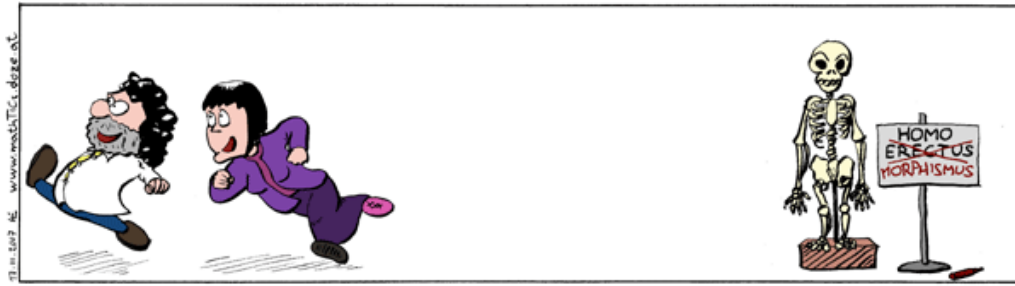
Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire.

- ▷ Si $f: E \rightarrow F$ est bijective, on dit que f est un ISOMORPHISME de E sur F .
- ▷ Si $F = E$, on dit que $f: E \rightarrow E$ est un ENDOMORPHISME de E .
- ▷ Si $F = E$ et $f: E \rightarrow E$ est bijective, on dit que f est un AUTOMORPHISME de E .
- ▷ Si $F = \mathbb{R}$, on dit que $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est une FORME LINÉAIRE.

▷ Pour prouver qu'une application $f: E \rightarrow F$ est linéaire on utilise la définition.

▷ Si f est une application linéaire, pour prouver qu'elle est un isomorphisme il suffit de prouver qu'elle est bijective ;

▷ si f est une application linéaire, pour prouver qu'elle est un endomorphisme il suffit de prouver que $f(E) \subset E$;



▷ si f est une application linéaire, pour prouver qu'elle est un automorphisme il suffit de prouver qu'elle est bijective et que $f(E) \subset E$.

EXEMPLE. L'application nulle

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow F \\ u &\mapsto 0_F \end{aligned}$$

est linéaire. En effet :

- ▷ $f(u + v) = 0_F$ et $f(u) + f(v) = 0_F + 0_F = 0_F$ pour tout $u, v \in E$;
- ▷ $f(\alpha \cdot u) = 0_F$ et $\alpha \cdot f(u) = \alpha \cdot 0_F = 0_F$ pour tout $u, \alpha \in \mathbb{R}$.

EXEMPLE. L'application identique

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow E \\ u &\mapsto u \end{aligned}$$

est linéaire. En effet :

- ▷ $f(u + v) = u + v = f(u) + f(v)$ pour tout $u, v \in E$;
- ▷ $f(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot u = \alpha \cdot f(u)$ pour tout $u, \alpha \in \mathbb{R}$.

C'est d'ailleurs un automorphisme de E .

EXEMPLE. Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $x \mapsto ax$ (à ne pas confondre avec les applications affines).

EXEMPLE. Les formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$.

EXEMPLE. Les changements de base sont des automorphismes.



Définition

- ▷ L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$ ou $\text{Hom}(E, F)$;
- ▷ l'ensemble des isomorphismes de E sur F est noté $\text{Isom}(E, F)$;
- ▷ L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$ ou $\text{End}(E)$;
- ▷ L'ensemble des automorphismes de E est noté $\text{Aut}(E)$.

Propriété

- ❶ Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. L'image du vecteur nul est le vecteur nul : $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.
- ❷ Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. L'image de l'opposé est l'opposé de l'image : $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})$ pour tout $\mathbf{u} \in E$.
- ❸ Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. L'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : $f(\sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(\mathbf{u}_i)$ pour tout $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p \in E$.
- ❹ La composée de deux applications linéaires $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ est linéaire : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G) \implies g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
- ❺ La somme de deux applications linéaires est linéaire : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F) \implies f + g \in \mathcal{L}(E, F)$.
- ❻ Le produit par un scalaire de deux applications linéaires est linéaire : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- ❼ Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} est un isomorphisme : $f \in \text{Isom}(E, F) \implies f^{-1} \in \text{Isom}(E, F)$.
- ❽ La composée de deux isomorphismes $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ est un isomorphisme : $f \in \text{Isom}(E, F)$ et $g \in \text{Isom}(F, G) \implies g \circ f \in \text{Isom}(E, G)$.

Noyau, image et rang d'une applications linéaire

Définition : noyau, image, rang

- ▷ On appelle **NOYAU** d'une application linéaire f de E vers F l'ensemble des vecteurs $\mathbf{u} \in E$ tels que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_F$. Le noyau est noté $\ker(f)$. On a donc

$$\ker(f) = \{ \mathbf{u} \in E \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_F \}.$$

La détermination du $\ker(f)$ conduit donc naturellement à la résolution d'un système linéaire homogène.

- ▷ On appelle **IMAGE** d'une application linéaire f de E vers F l'ensemble des vecteurs $\mathbf{v} \in F$ tels qu'il existe $\mathbf{u} \in E$ vérifiant $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. L'image est notée $\text{im}(f)$. On a donc

$$\text{im}(f) = \{ \mathbf{v} \in F \mid \exists \mathbf{u} \in E, \mathbf{v} = f(\mathbf{u}) \}.$$

- ▷ On appelle **RANG** d'une application linéaire f de E vers F la dimension de l'image de f . On le note $\text{rg}(f)$. On a donc

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{im}(f)).$$

EXEMPLE. Prenons l'ensemble E des suites des nombres réels et considérons l'application linéaire

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+2} - u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

L'ensemble des suites vérifiant $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$ est $\ker(f)$.

Proposition

- ▷ $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E .
▷ $\text{im}(f)$ est un sous espace vectoriel de F .

Proposition

- ▷ f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{ \mathbf{0}_E \}$.
▷ f est surjective si et seulement si $\text{im}(f) = F$.
▷ f est bijective si et seulement si $\ker(f) = \{ \mathbf{0}_E \}$ et $\text{im}(f) = F$.

Proposition

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E vers F .

- ❶ L'image d'une base de E est une famille génératrice de $\text{im}(F)$.
- ❷ L'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F si et seulement si f est surjective.
- ❸ L'image d'une famille libre de E est une famille libre de F si et seulement si f est injective.
- ❹ L'image d'une base de E est une base de F si et seulement si f est bijective.
- ❺ S'il existe un isomorphisme de E vers F alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Théorème du rang ou des dimensions

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f)$$

Proposition

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E vers F .

Si $\dim(E) = \dim(F)$, il y a équivalence entre :

- ▷ $f \in \operatorname{Isom}(E, F)$,
- ▷ $\ker(f) = \{ \mathbf{0}_E \}$,
- ▷ $\operatorname{im}(f) = F$, i.e. $\operatorname{rg}(f) = \dim(F)$.

Cas particulier : si $E = F$, il y a équivalence entre :

- ▷ $f \in \operatorname{Aut}(E)$,
- ▷ $\ker(f) = \{ \mathbf{0}_E \}$,
- ▷ $\operatorname{im}(f) = E$.

Matrices et applications linéaires

Définition : matrice d'une application linéaire

Soit

- ▷ E et F deux espaces vectoriels,
- ▷ $\mathcal{B} = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \}$ une base de E ,
- ▷ $\mathcal{C} = \{ \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m \}$ une base de F ,
- ▷ $f: E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F .

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F la matrice $m \times n$ dont la j -ème colonne est constituée des coordonnées de $f(\mathbf{e}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

↑
coordonnées de $f(\mathbf{e}_j)$

On voit tout de suite que la matrice d'une application linéaire ne sera pas la même suivant l'ordre dans lequel on prend les vecteurs de $\mathcal{B}$ et l'ordre dans lequel on prend les vecteurs de $\mathcal{C}$.

EXEMPLE. Si $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{b}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{b}_3 = (0, 0, 1) \}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et si $\mathcal{C} = \{ \mathbf{c}_1 = (1, 0), \mathbf{c}_2 = (0, 1) \}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_2) = 5\mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_3) = -\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2$, a pour matrice

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$



Définition : image d'un vecteur par une application linéaire

Soit

- ▷ E et F deux espaces vectoriels,
- ▷ $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ une base de E ,
- ▷ $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\}$ une base de F ,
- ▷ $f: E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F ,
- ▷ $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ la matrice $m \times n$ de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F .

Si $\mathbf{u}$ a pour coordonnées $\text{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B}) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ alors $f(\mathbf{u})$ a pour coordonnées $\text{coord}(f(\mathbf{u}), \mathcal{C}) = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ dans la base $\mathcal{C}$ avec

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m,$$

ce qui peut s'illustrer par

$$\begin{array}{c} \overbrace{\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \in \mathcal{M}_{m,n}} \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\text{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B}) \in \mathcal{M}_{n,1}} \\ \left(\begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \overbrace{\text{coord}(f(\mathbf{u}), \mathcal{C}) \in \mathcal{M}_{m,1}} \\ \left(\begin{array}{c} a_{11}u_1 + \dots + a_{1j}u_j + \dots + a_{1n}u_n \\ \vdots \\ a_{i1}u_1 + \dots + a_{ij}u_j + \dots + a_{in}u_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + \dots + a_{mj}u_j + \dots + a_{mn}u_n \end{array} \right) \end{array}$$

Attention

La matrice associée à une application linéaire n'est pas unique, elle dépend des bases choisies dans les espaces E et F .

Propriété

Soit $\mathbb{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$, E un espace vectoriel de dimension n , F un espace vectoriel de dimension m . Quelles que soient les bases choisies dans E et F , le rang de l'application linéaire $f: E \rightarrow F$ associée à $\mathbb{A}$ est toujours le même est égale au rang de la matrice $\mathbb{A}$.

Propriété

Soit E et F deux espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ une base de E , $\mathcal{C}$ une base de F , $f: E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F . Alors

- ▷ f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{\mathbf{0}_E\}$ si et seulement si $\text{rg}(\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})) = \dim(E)$,
- ▷ f est surjective si et seulement si $\text{im}(f) = F$ si et seulement si $\text{rg}(\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})) = \dim(F)$,
- ▷ f est bijective si et seulement si $\ker(f) = \{\mathbf{0}_E\}$ et $\text{im}(f) = F$ si et seulement si $\text{rg}(\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})) = \dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $\det(\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})) \neq 0$.

Proposition

Une matrice carrée est inversible si et seulement si c'est la matrice d'un isomorphisme.

EXEMPLE. La matrice de l'application linéaire nulle

$$\begin{array}{l} f: E \rightarrow F \\ \mathbf{u} \mapsto \mathbf{0}_F \end{array}$$

est toujours la matrice nulle $\mathbb{O}_{n,p}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

EXEMPLE. Soient $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ et $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}'_1 = (1, 0), \mathbf{e}'_2 = (0, 1)\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement, et soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que

$$f(\mathbf{e}_1) = (1, 2), \quad f(\mathbf{e}_2) = (3, 4), \quad f(\mathbf{e}_3) = (5, 6).$$

Comme

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2, \quad f(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}'_1 + 4\mathbf{e}'_2, \quad f(\mathbf{e}_3) = 5\mathbf{e}'_1 + 6\mathbf{e}'_2,$$

alors

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, i.e. que $\mathbf{u}$ a pour coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$, alors $f(\mathbf{u})$ a pour coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ le vecteur

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y + 5z \\ 2x + 4y + 6z \end{pmatrix} = \text{coord}(f(\mathbf{u}), \mathcal{C}).$$

On a donc $f(\mathbf{u}) = (x + 3y + 5z; 2x + 4y + 6z)$ dans la base $\mathcal{C}$, ce qui confirme le calcul direct $f(\mathbf{u}) = xf(\mathbf{e}_1) + yf(\mathbf{e}_2) + zf(\mathbf{e}_3)$.

Changement de base

Proposition

Soit

- ▷ E et F deux espaces vectoriels,
- ▷ $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E ,
- ▷ $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F ,
- ▷ $f: E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F ,

alors

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') = \mathbb{P}_{\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}} \mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}.$$

Les matrices $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$ sont dites équivalentes. Elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Cas particulier : $E = F$. Si un endomorphisme $f: E \rightarrow E$ a pour matrice $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ dans la base $\mathcal{B}$ et $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ dans la base $\mathcal{B}'$, on a

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \mathbb{P}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \quad \text{ou encore} \quad \mathbb{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = (\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} \mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}.$$

Les matrices $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ et $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ sont dites semblables.

EXEMPLE. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, posons $\mathbf{u} = (3, 1)$ et $\mathbf{v} = (5, 2)$. Les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. Considérons alors l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par

$$f(\mathbf{u}) = 2\mathbf{u}, \quad f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}.$$

Par rapport à la base $\mathcal{B}$, f a pour matrice la matrice diagonale

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons maintenant la matrice de f par rapport à la base canonique. Comme

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v} = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

on a

$$\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad \mathbf{e}_2 = -5\mathbf{u} + 3\mathbf{v}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= f(2\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 2f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) = 4\mathbf{u} + \mathbf{v} = (17, 6), \\ f(\mathbf{e}_2) &= f(-5\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) = -5f(\mathbf{u}) + 3f(\mathbf{v}) = -10\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = (-45, -16). \end{aligned}$$

La matrice de f par rapport à la base canonique est donc

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 17 & -45 \\ 6 & -16 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ est la matrice

$$\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique $\mathcal{C}$ est la matrice

$$\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} = \mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on a bien

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} \mathbb{D} \mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \mathbb{A}.$$

Équations linéaires



Définition : équation linéaire

Une ÉQUATION LINÉAIRE est une équation du type $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ où

- ▷ f est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F ,
- ▷ $\mathbf{b}$ est un vecteur de F appelé second membre de l'équation linéaire,
- ▷ l'inconnue $\mathbf{x}$ est dans E .

EXEMPLE. 1. Un système linéaire de n équations à p inconnues du type

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les données sont les éléments a_{ij} et b_i de $\mathbb{K}$ et où l'inconnue est le vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$. L'application linéaire est

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^p &\rightarrow \mathbb{K}^p \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbb{A}\mathbf{x} \end{aligned}$$

et le second membre est $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^p$.

2. Une équation différentielle linéaire du premier ordre du type

$$a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où les données sont les fonctions a , b et c continues sur un intervalle I et où l'inconnue est la fonction y . L'application linéaire est

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1(I) &\rightarrow \mathcal{C}^0(I) \\ y &\mapsto ay' + by \end{aligned}$$

et le second membre est $c \in \mathcal{C}^0(I)$.



Proposition : structure de l'ensemble des solutions

Considérons l'équation linéaire $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ et notons $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions. Notons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_F$. Alors

- ❶ $\mathcal{S}_0 = \ker(f)$ est un sous-espace vectoriel (non vide) de E ;
- ❷ Si $\mathcal{S} \neq \emptyset$ et si $\mathbf{x}_p \in \mathcal{S}$ alors l'ensemble des solutions est une sous-espace vectoriel de E tel que

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p \mid \mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}_0 \}.$$

On énonce ce résultat en disant que la solution d'une équation linéaire est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.



Astuce

Si la dimension de $\ker(f)$ est connue, on connaît alors, grâce au théorème du rang, la dimension de $\text{im}(f)$. Si de plus on connaît une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E , on sait que $\text{im}(f) = \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$. On peut alors en déduire une base de $\text{im}(f)$ par «élimination» des vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres vecteurs de l'ensemble $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

EXEMPLE. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer $\ker(f)$ on résout le système homogène $f((x, y, z)) = (0, 0, 0)$:

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0, \\ -x + 3y + z = 0, \\ -x - y + z = 0, \end{cases} \iff (x, y, z) = (1, 0, 1).$$

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{im}(f)) = 3 - 1 = 2$. La famille

$$\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\} = \{(2, -1, -1), (-2, 3, -1), (-2, 1, 1)\}$$

est une famille génératrice de $\text{im}(f)$. On sait alors qu'il suffit d'en extraire une famille libre de cardinalité 2 pour obtenir une base, par exemple la famille $\{(2, -1, -1), (-2, 3, -1)\}$.

Astuce

Soit B un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ une base de B , W un espace vectoriel de dimension m et $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ une base de W .

Soit f une application linéaire de B dans W de matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{W}$.

Soit $u \in B$ et supposons de connaître les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, i.e. qu'on connaît les n coefficients $\beta_1, \dots, \beta_n$ tels que $u = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot b_j$.

Pour obtenir les coordonnées de $f(u) \in W$ dans la base $\mathcal{W}$, i.e. les m coefficients $\omega_1, \dots, \omega_m$ tels que $f(u) = \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot w_i$, on peut :

▷ soit utiliser la relation

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix};$$

▷ soit exprimer chacun des vecteurs $f(b_j)$ dans la base $\mathcal{W}$, i.e. trouver les m coefficients $\eta_{1j}, \dots, \eta_{mj}$ tels que $f(b_j) = \sum_{i=1}^m \eta_{ij} \cdot w_i$, et on obtient

$$f(u) = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot f(b_j) = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \left(\sum_{i=1}^m \eta_{ij} \cdot w_i \right) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \eta_{ij} \beta_j \right)}_{\omega_i} \cdot w_i$$

où $A = (\eta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.



Exercice 4.1

Soit l'application

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y + z \\ x + 3y + z \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'elle est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

SOLUTION. 1. Soit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x + u_y + v_y + u_z + v_z \\ u_x + v_x - u_y - v_y + u_z + v_z \\ u_x + v_x + 3u_y + 3v_y + u_z + v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + u_y + u_z \\ u_x - u_y + u_z \\ u_x + 3u_y + u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x + v_y + v_z \\ v_x - v_y + v_z \\ v_x + 3v_y + v_z \end{pmatrix} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}),$$

$$f(\lambda \cdot \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \lambda u_x + \lambda u_y + \lambda u_z \\ \lambda u_x - \lambda u_y + \lambda u_z \\ \lambda u_x + 3\lambda u_y + \lambda u_z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_x + u_y + u_z \\ u_x - u_y + u_z \\ u_x + 3u_y + u_z \end{pmatrix} = \lambda \cdot f(\mathbf{u}).$$

Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Recherche d'une base du noyau :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \in \ker(f) &\iff f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} u_x + u_y + u_z \\ u_x - u_y + u_z \\ u_x + 3u_y + u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} u_x + u_y + u_z = 0 \\ u_x - u_y + u_z = 0 \\ u_x + 3u_y + u_z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_x + u_y + u_z = 0 \\ -2u_y = 0 \\ 2u_y = 0 \end{cases} \\ &\iff \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\kappa \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix}, \quad \kappa \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -\kappa \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} \mid \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par conséquent $\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\ker(f)$ et $\dim(\ker(f)) = 1$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\dim(\text{im}(f)) = 3 - 1 = 2$. Soit $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, i.e.

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que, pour une application linéaire $f: E \rightarrow F$, l'image d'une base de E est une famille génératrice de $\text{im}(f) \subset F$:

$$\text{Vect} \{ f(\mathbf{c}_1), f(\mathbf{c}_2), f(\mathbf{c}_3) \} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Comme la cardinalité de cette famille est égale à la dimension de $\text{im}(f)$ on conclut que $\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\text{im}(f)$.

4. Comme $\ker(f) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, f n'est pas injective.

Comme $\dim(\text{im}(f)) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$, alors $\text{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, on en déduit que f n'est pas surjective.

5. Soit $\{c_1, c_2, c_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$f(c_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 + c_2 + c_3, \quad f(c_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 - c_2 + 3c_3, \quad f(c_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 + c_2 + c_3.$$

Alors par définition la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice 3×3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.2

Soit l'application

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \\ x + z \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'elle est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

SOLUTION. 1. Soit $u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(u+v) = f \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x + 2(u_y + v_y) \\ u_y + v_y \\ u_x + v_x + u_z + v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + 2u_y \\ u_y \\ u_x + u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x + 2v_y \\ v_y \\ v_x + v_z \end{pmatrix} = f(u) + f(v),$$

$$f(\lambda \cdot u) = \begin{pmatrix} \lambda u_x + 2\lambda u_y \\ \lambda u_y \\ \lambda u_x + \lambda u_z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_x + 2u_y \\ u_y \\ u_x + u_z \end{pmatrix} = \lambda \cdot f(u).$$

Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Recherche d'une base du noyau :

$$u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u_x + 2u_y \\ u_y \\ u_x + u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u_x + 2u_y = 0 \\ u_y = 0 \\ u_x + u_z = 0 \end{cases} \iff u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par conséquent $\dim(\ker(f)) = 0$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\dim(\operatorname{im}(f)) = 3$. De plus, $\operatorname{im}(f) \subset \mathbb{R}^3$ donc $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$. Par conséquent, une base de $\operatorname{im}(f)$ est par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4. Comme $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, f est injective.

Comme $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$, on en déduit que f est surjective.

Ainsi f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

5. Soit $\{c_1, c_2, c_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, i.e.

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(c_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 + c_3, \quad f(c_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2c_1 + c_2, \quad f(c_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_3.$$

Alors par définition la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice 3×3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.3

Soit l'application

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z$$

1. Démontrer qu'elle est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$.

SOLUTION. 1. Soit $u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(u+v) = f \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix} = u_x + v_x + u_y + v_y + u_z + v_z = (u_x + u_y + u_z) + (v_x + v_y + v_z) = f(u) + f(v),$$

$$f(\lambda \cdot u) = \lambda u_x + \lambda u_y + \lambda u_z = \lambda \cdot (u_x + u_y + u_z) = \lambda \cdot f(u).$$

Ainsi f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

2. Recherche d'une base du noyau :

$$u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(u) = 0 \iff u_x + u_y + u_z = 0 \iff u = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ -\kappa_1 - \kappa_2 \end{pmatrix}, \quad \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ -\kappa_1 - \kappa_2 \end{pmatrix} \mid \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

De plus les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaire, donc $\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\ker(f)$ et on conclut que $\dim(\ker(f)) = 2$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\dim(\text{im}(f)) = 3 - 2 = 1$. De plus, $\text{im}(f) \subset \mathbb{R}$ donc $\text{im}(f) = \mathbb{R}$. Par conséquent, une base de $\text{im}(f)$ est par exemple la base canonique de $\mathbb{R}$.

4. Comme $\ker(f) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, f n'est pas injective.

Comme $\text{im}(f) = \mathbb{R}$, on en déduit que f est surjective.

5. Soit $\{c_1, c_2, c_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{w\}$ la base canonique de $\mathbb{R}$, i.e.

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad w = 1.$$

On a

$$f(c_1) = 1 = w,$$

$$f(c_2) = 1 = w,$$

$$f(c_3) = 1 = w.$$

Alors par définition la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}$ est la matrice 1×3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.4

Soit l'application

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'elle est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

SOLUTION. 1. Soit $u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(u+v) = f \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_x + v_x + u_y + v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_x + u_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x + v_y \end{pmatrix} = f(u) + f(v),$$

$$f(\lambda \cdot u) = \begin{pmatrix} \lambda u_x \\ \lambda u_y \\ \lambda u_x + \lambda u_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_x + u_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot f(u).$$

Ainsi f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Recherche d'une base du noyau :

$$u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_x + u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 0 \\ u_x + u_y = 0 \end{cases} \iff u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par conséquent $\dim(\ker(f)) = 0$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2$. Soit $\{c_1, c_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, i.e.

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que $\{f(c_1), f(c_2)\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{im}(f)$. De plus, le cardinal de cette famille est égal à la dimension de $\operatorname{im}(f)$, donc $\{f(c_1), f(c_2)\}$ est une base de $\operatorname{im}(f)$. On a

$$f(c_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(c_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on conclut que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\operatorname{im}(f)$.

4. Comme $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, f est injective.

Comme $\operatorname{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, on en déduit que f n'est pas surjective.

5. Soit $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, i.e.

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$f(c_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w_1 + w_3, \quad f(c_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2 + w_3.$$

Alors par définition la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ est la matrice 3×2

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.5 (Janvier 2011)

Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire pour laquelle

$$\ker(f) = \operatorname{Vec}\{v_1 = (1, 1, 0, -1), v_2 = (0, 1, -1, 0)\} \quad \text{et} \quad \operatorname{im}(f) = \pi,$$

où π désigne le plan d'équation $x + y - z = 0$. Trouver la forme générale de la matrice associée à f quand on donne à $\mathbb{R}^4$ et à $\mathbb{R}^3$ leurs bases canoniques.

SOLUTION. Soit

- ▷ $\mathcal{C} = \{c_1 = (1, 0, 0, 0), c_2 = (0, 1, 0, 0), c_3 = (0, 0, 1, 0), c_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et
 ▷ $\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

La matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$ s'écrit formellement

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

On va maintenant trouver des contraintes sur les entrées de la matrice.

- ▷ On exprime le fait que les images des vecteurs de la base de $\mathbb{R}^4$ sont dans π .

Comme $\operatorname{im}(f) \subset \pi$, en particulier $f(c_i) \in \pi$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Alors

$$\begin{aligned} f(c_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 \in \pi &\iff a_{11} + a_{21} - a_{31} = 0 \\ f(c_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 \in \pi &\iff a_{12} + a_{22} - a_{32} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_3) &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3 \in \pi \iff a_{13} + a_{23} - a_{33} = 0 \\ f(\mathbf{c}_4) &= a_{14}\mathbf{e}_1 + a_{24}\mathbf{e}_2 + a_{34}\mathbf{e}_3 \in \pi \iff a_{14} + a_{24} - a_{34} = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} & a_{14} + a_{24} \end{pmatrix}.$$

▷ On exprime le fait que $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont dans le noyau de f .

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \in \ker(f) &\iff f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \\ &\iff f(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_4) = \mathbf{0} \\ &\iff f(\mathbf{c}_1) + f(\mathbf{c}_2) - f(\mathbf{c}_4) = \mathbf{0} \\ &\iff (a_{11} + a_{12} - a_{14})\mathbf{e}_1 + (a_{21} + a_{22} - a_{24})\mathbf{e}_2 + (a_{31} + a_{32} - a_{34})\mathbf{e}_3 = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} + a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} + a_{22} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} & a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 \in \ker(f) &\iff f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} \\ &\iff f(\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3) = \mathbf{0} \\ &\iff f(\mathbf{c}_2) - f(\mathbf{c}_3) = \mathbf{0} \\ &\iff (a_{12} - a_{13})\mathbf{e}_1 + (a_{22} - a_{23})\mathbf{e}_2 + (a_{32} - a_{33})\mathbf{e}_3 = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{11} + a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{21} + a_{22} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{12} + a_{22} & a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}.$$

▷ On exprime le fait que $\text{rg}(f) = 2$.

Comme la deuxième et la troisième colonne coïncident, la quatrième colonne est une combinaison linéaire de la première et de la deuxième et la troisième ligne est une combinaison linéaire de la première et de la deuxième, alors

$$\text{rg}(\mathbb{A}) = \text{rg} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Pour que le rang de cette matrice soit 2 il faut que son déterminant soit non nul, d'où la condition $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$.

Exercice 4.6 (Janvier 2011)

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_3[t] &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ p &\mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Montrer que f est injective et surjective.

SOLUTION. Soit

▷ $\mathcal{C} = \{ c_0(t) = 1, c_1(t) = t, c_2(t) = t^2, c_3(t) = t^3 \}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[t]$ et

▷ $\mathcal{E} = \{ \mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0), \mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 0, 1) \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Comme

$$\begin{aligned} f(c_0(t)) &= c_0(0)\mathbf{e}_0 + c_0(1)\mathbf{e}_1 + c_0(2)\mathbf{e}_2 + c_0(3)\mathbf{e}_3 = (1, 1, 1, 1) \\ f(c_1(t)) &= c_1(0)\mathbf{e}_0 + c_1(1)\mathbf{e}_1 + c_1(2)\mathbf{e}_2 + c_1(3)\mathbf{e}_3 = (0, 1, 1, 1) \\ f(c_2(t)) &= c_2(0)\mathbf{e}_0 + c_2(1)\mathbf{e}_1 + c_2(2)\mathbf{e}_2 + c_2(3)\mathbf{e}_3 = (0, 1, 4, 9) \\ f(c_3(t)) &= c_3(0)\mathbf{e}_0 + c_3(1)\mathbf{e}_1 + c_3(2)\mathbf{e}_2 + c_3(3)\mathbf{e}_3 = (0, 1, 8, 27) \end{aligned}$$

alors la matrice de f relativement aux bases canoniques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ est

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(\mathbb{A}) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = (1 * 4 * 27 + 2 * 9 * 1 + 3 * 1 * 8) - (1 * 4 * 3 + 8 * 9 * 1 + 27 * 1 * 2) = 150 - 138 = 12 \neq 0$$

donc $\text{rg}(\mathbb{A}) = 4$: l'application linéaire est bijective.

Exercice 4.7

Soient E un espace vectoriel de base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ et F un espace vectoriel de base $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5\}$. Construire, si cela est possible, des applications linéaires $f: E \rightarrow F$ vérifiant :

1. $\text{im}(f) = \text{Vect}\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_4\}$;
2. $\text{im}(f) = \{\mathbf{0}_F\}$;
3. $\text{im}(f) = F$;
4. $\ker(f) = \text{Vect}\{\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ et $\text{im}(f) = \text{Vect}\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$.

SOLUTION. 1. Prendre par exemple $f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{c}_4$ et $f(\mathbf{b}_3) = f(\mathbf{b}_4) = \mathbf{0}_F$.
 2. Prendre $f(\mathbf{b}_1) = f(\mathbf{b}_2) = f(\mathbf{b}_3) = f(\mathbf{b}_4) = \mathbf{0}_F$.
 3. Impossible car $\dim(\text{im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) \leq \dim(E) = 4$ tandis que $\dim(F) = 5$.
 4. Prendre par exemple $f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{c}_3$ et $f(\mathbf{b}_3) = -\mathbf{c}_3$ et $f(\mathbf{b}_4) = \mathbf{0}_F$.

Exercice 4.8

Soit l'endomorphisme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. On considère trois vecteurs $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$, $\mathbf{v} = (-3, 5, 1)$ et $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$.
 - 4.1. Démontrer que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - 4.2. Déterminer $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$ et $f(\mathbf{w})$. En déduire la matrice de f dans la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. On la notera $\mathbb{D}$.
 - 4.3. Donner un lien matriciel entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{D}$.

SOLUTION. 1. Un endomorphisme f est un automorphisme si et seulement si la matrice est inversible. Comme

$$\det(\mathbb{A}) = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (30 + 0 + 0) - (0 + 0 + 30) = 0,$$

$\mathbb{A}$ n'est pas inversible donc f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Il faut d'abord commencer par déterminer $f(\mathbf{n})$ pour tout $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$f(\mathbf{n}) = \mathbb{A} \times \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5n_1 - 3n_2 \\ 10n_1 + 6n_2 \\ -2n_1 - n_2 - n_3 \end{pmatrix}.$$

Recherche d'une base du noyau :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(\mathbf{n}) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} -5n_1 - 3n_2 = 0 \\ 10n_1 + 6n_2 = 0 \\ -2n_1 - n_2 - n_3 = 0 \end{cases} \iff \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3\kappa \\ 5\kappa \\ \kappa \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -3\kappa \\ 5\kappa \\ \kappa \end{pmatrix} \mid \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donc $\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\ker(f)$ et on conclut que $\dim(\ker(f)) = 1$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 2$. Soit $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, i.e.

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que, pour une application linéaire $f: E \rightarrow F$, l'image d'une base de E est une famille génératrice de $\text{im}(f) \subset F$:

$$\text{Vect} \{f(\mathbf{c}_1), f(\mathbf{c}_2), f(\mathbf{c}_3)\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comme $f(\mathbf{c}_2)$ et $f(\mathbf{c}_3)$ ne sont pas colinéaires, $\text{Vect} \{f(\mathbf{c}_2), f(\mathbf{c}_3)\}$ est une famille libre de $\text{im}(f)$. Étant donné que la cardinalité de cette famille est égale à la dimension de $\text{im}(f)$ on conclut que $\text{Vect} \{f(\mathbf{c}_2), f(\mathbf{c}_3)\}$ est une base de $\text{im}(f)$.

4. On considère trois vecteurs $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$, $\mathbf{v} = (-3, 5, 1)$ et $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$.

- 4.1. Pour démontrer que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer qu'elle est une famille libre (car son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$). On dit qu'une famille $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \implies a_i = 0 \quad \forall i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \iff a_1 \mathbf{u} + a_2 \mathbf{v} + a_3 \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_1 - 3a_2 = 0, \\ -2a_1 + 5a_2 = 0, \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre. Comme $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \subset \mathbb{R}^3$ et elle a cardinalité 3 égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \subset \mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- 4.2. On a

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}, \\ f(\mathbf{v}) &= \mathbf{0}, \\ f(\mathbf{w}) &= -\mathbf{w}. \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 4.3. D'après la formule de changement de base pour les endomorphismes :

$$\mathbb{D} = \mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} \mathbb{A} \mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}},$$

où, par définition, la matrice $\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$ est telle que sa 1-ère colonne est constituée des coordonnées de $\mathbf{u}$ dans la base $\mathcal{C}$, sa 2-ème colonne est constituée des coordonnées de $\mathbf{v}$ dans la base $\mathcal{C}$ et sa 3-ème colonne est constituée des coordonnées de $\mathbf{w}$ dans la base $\mathcal{C}$, i.e.

$$\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.9

On considère l'application linéaire f de matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$$

par rapport à la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (2, -1, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, -1)$ et $\mathbf{u}_3 = (-2, 1, 3)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les matrices de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$.
3. Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

SOLUTION. 1. Comme $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$, les vecteurs sont linéairement indépendantes, ainsi $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ est une famille libre. Comme $\text{card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Les colonnes de la matrice $\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ sont données par les vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

pour obtenir $\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$ il faut inverser $\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$. On trouve

$$\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est alors

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} \mathbb{A} \mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \mathbb{M}(f, \mathcal{B})$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & -81 & 78 \\ -32 & 45 & -44 \\ -75 & 105 & -103 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.10

On note $f: \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x]$ l'application linéaire définie par $f(p)(x) = p(x+1) - p(x)$.

1. Déterminer la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{M}(f, \mathcal{B})$ de f dans la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Déterminer la matrice $\mathbb{C} = \mathbb{M}(f, \mathcal{C})$ de f dans la base $\mathcal{C} = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3)\}$ de $\mathbb{R}_4[x]$.
3. Calculer les matrices de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$. Quelle est la relation entre $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$?
4. Décrire sous forme de Vect, en précisant leurs dimensions, le noyau et l'image de f .

SOLUTION. Notons

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{b}_1(x) = 1 & \mathbf{b}_2(x) = x & \mathbf{b}_3(x) = x^2 & \mathbf{b}_4(x) = x^3 & \mathbf{b}_5(x) = x^4 \\ \mathbf{c}_1(x) = 1 & \mathbf{c}_2(x) = x & \mathbf{c}_3(x) = x(x-1) & \mathbf{c}_4(x) = x(x-1)(x-2) & \mathbf{c}_5(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) \end{array}$$

1. On calcule l'image de chaque vecteur de $\mathcal{B}$ par f :

$$\begin{cases} f(\mathbf{b}_1) = 0 = \mathbf{0}, \\ f(\mathbf{b}_2) = 1 = \mathbf{b}_1, \\ f(\mathbf{b}_3) = 2x + 1 = 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1, \\ f(\mathbf{b}_4) = 3x^2 + 3x + 1 = 3\mathbf{b}_3 + 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1, \\ f(\mathbf{b}_5) = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 4\mathbf{b}_4 + 6\mathbf{b}_3 + 4\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On calcule l'image de chaque vecteur de $\mathcal{C}$ par f :

$$\begin{cases} f(\mathbf{c}_1) = 0 = \mathbf{0}, \\ f(\mathbf{c}_2) = 1 = \mathbf{c}_1, \\ f(\mathbf{c}_3) = 2x = 2\mathbf{c}_1, \\ f(\mathbf{c}_4) = 3x(x-1) = 3\mathbf{c}_2, \\ f(\mathbf{c}_5) = 4x(x-1)(x-2) = 4\mathbf{c}_4, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. On calcule les coordonnées de chaque vecteur de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{c}_4 = \mathbf{b}_4 - 3\mathbf{b}_3 + 2\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{c}_5 = \mathbf{b}_5 - 6\mathbf{b}_4 + 11\mathbf{b}_3 - 6\mathbf{b}_2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$ soit on calcule la matrice inverse de $\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$, soit on résout le système linéaire précédent ; on trouve

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1, \\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2, \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_2, \\ \mathbf{b}_4 = \mathbf{c}_4 + 3\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_2, \\ \mathbf{b}_5 = \mathbf{c}_5 + 6\mathbf{c}_4 + 7\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la relation cherchée est

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} \mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \mathbb{B}.$$

4. On a $\dim(\text{im}(f)) = \text{rg}(\mathbb{B}) = 4$, donc $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}_4[x]) - \dim(\text{im}(f)) = 1$. Une base de $\text{im}(f)$ est alors l'ensemble $\{f(\mathbf{b}_2), f(\mathbf{b}_3), f(\mathbf{b}_4), f(\mathbf{b}_5)\}$. Étant donné que $\text{Vect}\{f(\mathbf{b}_2), f(\mathbf{b}_3), f(\mathbf{b}_4), f(\mathbf{b}_5)\} \subset \mathbb{R}_3[x]$ et que $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 3$ on conclut que $\text{Vect}\{f(\mathbf{b}_2), f(\mathbf{b}_3), f(\mathbf{b}_4), f(\mathbf{b}_5)\} = \mathbb{R}_3[x]$, une autre base de $\text{im}(f)$ est alors la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Comme $f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{0}$, une base de $\ker(f)$ est l'ensemble $\{\mathbf{b}_1\}$, i.e. le sous-espace vectoriel constitué par les polynômes constants : $\ker(f) = \mathbb{R}_0[x]$.

Exercice 4.11

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ par

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_2[x] &\rightarrow E \\ p &\mapsto (2x+1)p + (1-x^2)p' \end{aligned}$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
3. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$? Si oui, déterminer la matrice de f^{-1} dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

SOLUTION.

1. Soit p et q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(p+q) = (2x+1)(p+q) + (1-x^2)(p+q)' = (2x+1)(p+q) + (1-x^2)(p'+q')$$

$$\begin{aligned}
&= (2x+1)p + (1-x^2)p' + (2x+1)q + (1-x^2)q' = f(p) + f(q), \\
f(\lambda \cdot p) &= (2x+1)(\lambda p) + (1-x^2)(\lambda p)' = (2x+1)(\lambda p) + (1-x^2)(\lambda p') = \lambda \cdot f(p).
\end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[x]$ dans E . De plus, si $p \in \mathbb{R}_2[x]$, alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $p(x) = a + bx + cx^2$ et

$$\begin{aligned}
f(p(x)) &= (2x+1)p(x) + (1-x^2)p'(x) \\
&= (2x+1)(a + bx + cx^2) + (1-x^2)(b + 2cx) \\
&= 2ax + 2bx^2 + 2cx^3 + a + bx + cx^2 + b + 2cx - bx^2 - 2cx^3 \\
&= (a+b) + (2a+b+2c)x + (2b+c-b)x^2 \in \mathbb{R}_2[x].
\end{aligned}$$

On conclut que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. La base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est $\mathcal{C} = \{c_0(x) = 1, c_1(x) = x, c_2(x) = x^2\}$ et l'on a

$$\begin{aligned}
f(c_0(x)) &= 1 + 2x, \\
f(c_1(x)) &= 1 + x + x^2, \\
f(c_2(x)) &= 2x + x^2,
\end{aligned}$$

donc par définition la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ est

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\det(\mathbb{C}) = -3 \neq 0$, ce qui prouve que $\mathbb{C}$ est inversible, donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$. On sait que, si $\mathbb{C}$ est la matrice de l'automorphisme f dans la base $\mathcal{C}$, alors $\mathbb{C}^{-1}$ est la matrice de l'automorphisme f^{-1} dans la base $\mathcal{C}$. Pour calculer $\mathbb{C}^{-1}$ on résout le système

$$\begin{cases} x+y=a, \\ 2x+y+2z=b, \\ y+z=c, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x+y=a, \\ -y+2z=b-2a, \\ y+z=c, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x+y=a, \\ -y+2z=b-2a, \\ 3z=b+c-2a, \end{cases}$$

d'où

$$z = \frac{-2a+b+c}{3}, \quad y = \frac{2a-b+c}{3}, \quad x = \frac{a+b+2c}{3}.$$

La matrice de f^{-1} dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ est alors

$$\mathbb{C}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci permet d'écrire facilement l'endomorphisme $f^{-1}: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$:

$$f^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \frac{a_0 + a_1 + 2a_2}{3} + \frac{2a_0 - a_1 + 2a_2}{3}x + \frac{-2a_0 + a_1 + a_2}{3}x^2.$$

Exercice 4.12

On note $f: \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x]$ l'application linéaire définie par $f(p)(x) = (x-1)p'(x) - p(x)$.

1. Calculer $f(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$. En déduire $\ker(f)$.
2. L'équation $f(p) = q$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}_4[x]$ pour tout q de $\mathbb{R}_4[x]$?
3. Calculer $f((x-1)^k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. En déduire une caractérisation des polynômes q pour lesquels l'équation $f(p) = q$ a des solutions.

SOLUTION.

1. $f(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = (x-1)(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d) - (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = 3ax^4 + (2b-4a)x^3 + (c-3b)x^2 - 2cx - d - e$. Par conséquent $f(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = 0$ si et seulement si $a = b = c = 0$ et $e = -d$, ce qui implique $\ker(f) = \{dx - d \mid d \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{x-1\}$.

2. Comme $\dim(\ker(f)) = 1$, alors $\dim(\operatorname{im}(f)) = 4$, ce qui prouve que f n'est pas surjective, donc l'équation $f(p) = q$ n'a pas toujours de solution.
3. La famille $\{(x-1)^k \mid k = 0, 1, 2, 3, 4\}$ est une base de $\mathbb{R}_4[x]$ donc $\operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}\{f(x-1)^k \mid k = 0, 1, 2, 3, 4\}$. Comme $f((x-1)^k) = (k-1)(x-1)^k$ alors $\operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}\{(x-1)^k \mid k = 0, 2, 3, 4\}$. On sait que $\dim(\operatorname{im}(f)) = 4$ donc $\{(x-1)^k \mid k = 0, 2, 3, 4\}$ est une base de $\operatorname{im}(f)$. Par conséquent tout polynôme $q \in \mathbb{R}_4[x]$ dont l'écriture dans la base $\{(x-1)^k \mid k = 0, 1, 2, 3, 4\}$ n'as pas de terme en $(x-1)$ est dans l'image de f et l'équation $f(p) = q$ a des solutions.

Exercice 4.13 (Janvier 2011)

Soit $T: V \rightarrow V$ un endomorphisme de V . Considérons deux bases différentes de V , à savoir $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ et $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. Nous savons que

$$T(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2,$$

$$T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{w}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2.$$

Trouver la matrice de T dans la base $\mathcal{W}$.

SOLUTION. On a

$$\mathbf{e}_1 = 3\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2,$$

$$\mathbf{e}_2 = -2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

donc

$$T(\mathbf{w}_1) = T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2) = (3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2)$$

$$= 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = 4(3\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) + 2(-2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = 8\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2,$$

$$T(\mathbf{w}_2) = T(2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) = 2T(\mathbf{e}_1) + 3T(\mathbf{e}_2) = 2(3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) + 3(\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2)$$

$$= 9\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2 = 9(3\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) + 8(-2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = 11\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2,$$

et la matrice de T dans la base $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ est

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient le même résultat d'après la formule du changement de base :

▷ matrice de T dans la base $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

▷ matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{W}$:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

▷ matrice de passage de $\mathcal{W}$ à $\mathcal{E}$:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{E}} = \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W}}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

▷ matrice de T dans la base $\mathcal{W}$:

$$\mathbb{W} = \mathbb{P}_{\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{E}} \mathbb{E} \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.14 (Septembre 2009)

Dans la suite on notera $\mathbb{R}_2[t]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Si p est un de ces polynôme, p' dénotera sa dérivée.

Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[t]$ défini par

$$L: \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$$

$$p(t) \mapsto (-2at + 1)p(t) + (at^2 + b)p'(t)$$

où a et b sont des nombres réels. Déterminer la valeur du produit ab pour que le rang de L soit 2 ou 3.

SOLUTION. Le rang de L coïncide avec le rang de la matrice qui le représente. Calculons alors cette matrice. La base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$ est $\mathcal{C} = \{ \mathbf{c}_0(t) = 1, \mathbf{c}_1(t) = t, \mathbf{c}_2(t) = t^2 \}$ et l'on a

$$\begin{aligned} L(\mathbf{c}_0(t)) &= (-2at + 1)(1) + (at^2 + b)0 = \mathbf{c}_0(t) - 2a\mathbf{c}_1(t), \\ L(\mathbf{c}_1(t)) &= (-2at + 1)(t) + (at^2 + b)1 = b\mathbf{c}_0(t) + \mathbf{c}_1(t) - a\mathbf{c}_2(t), \\ L(\mathbf{c}_2(t)) &= (-2at + 1)(t^2) + (at^2 + b)2t = 2b\mathbf{c}_1(t) + \mathbf{c}_2(t), \end{aligned}$$

donc par définition la matrice de L dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[t]$ est

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ -2a & 1 & 2b \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(\mathbb{C}) = (1 + 0 + 0) - (0 - 2ab - 2ab) = 1 + 4ab$,

▷ si $ab \neq 1/4$ alors $\text{rg}(\mathbb{C}) = \text{rg}(L) = 3$;

▷ si $ab = 1/4$ alors $\text{rg}(\mathbb{C}) = \text{rg}(L) < 3$ et comme la première colonne et la dernière colonne sont linéairement indépendantes, $\text{rg}(\mathbb{C}) = \text{rg}(L) = 2$.

Exercice 4.15 (Février 2010)

Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[t]$ défini par

$$\begin{aligned} L: \mathbb{R}_2[t] &\rightarrow \mathbb{R}_2[t] \\ p &\mapsto p + 3p' + 4p'' \end{aligned}$$

1. Donner la matrice de L quand on muni l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[t]$ de sa base canonique.
2. Donner une base du noyau et de l'image de L .
3. Montrer que L est inversible et calculer la matrice $\mathbb{M}$ associée à L^{-1} dans la base canonique. Si l'on dénote avec $\mathbf{u}_1$ le vecteur colonne des composantes du polynôme générique $a_0 + a_1t + a_2t^2$, vis-à-vis de la base canonique, déterminer les vecteurs colonnes $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ des composantes respectives de p' et de p'' . Montrer que

$$\mathbb{M}\mathbf{u}_1 = \kappa_1\mathbf{u}_1 + \kappa_2\mathbf{u}_2 + \kappa_3\mathbf{u}_3$$

où les coefficients κ_1 , κ_2 et κ_3 sont à calculer. Utiliser ce dernier calcul pour montrer que

$$L^{-1}(p) = p - 3p' + 5p''.$$

SOLUTION.

1. La base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$ est $\mathcal{C} = \{ \mathbf{c}_0(t) = 1, \mathbf{c}_1(t) = t, \mathbf{c}_2(t) = t^2 \}$ et l'on a

$$\begin{aligned} L(\mathbf{c}_0(t)) &= (1) + 3(0) + 4(0) = \mathbf{c}_0(t), \\ L(\mathbf{c}_1(t)) &= (t) + 3(1) + 4(0) = 3\mathbf{c}_0(t) + \mathbf{c}_1(t), \\ L(\mathbf{c}_2(t)) &= (t^2) + 3(2t) + 4(2) = 8\mathbf{c}_0(t) + 6\mathbf{c}_1(t) + \mathbf{c}_2(t), \end{aligned}$$

donc par définition la matrice de L dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[t]$ est

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Recherche d'une base du noyau :

$$\begin{aligned} q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \ker(L) &\iff L(q) = 0 \\ &\iff (a_0 + 3a_1 + 8a_2) + (a_1 + 6a_2)t + a_2t^2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} a_0 + 3a_1 + 8a_2 = 0, \\ a_1 + 6a_2 = 0, \\ a_2 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

d'où $\ker(L) = \{0\}$ et $\dim(\ker(L)) = 0$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{im}(L)) = \dim(\mathbb{R}_2[t]) - \dim(\ker(L)) = 3$. Comme $\operatorname{im}(L) \subset \mathbb{R}_2[t]$, alors $\operatorname{im}(L) = \mathbb{R}_2[t]$ donc $\mathcal{C}$ est une base de $\operatorname{im}(L)$.

3. L est inversible si et seulement si la matrice qui le représente dans une base donnée est inversible. Si on considère la base canonique, étant donné que $\det(\mathbb{C}) = (1+0+0) - (0+0+0) = 1$, $\mathbb{C}$ est inversible. La matrice $\mathbb{M}$ associée à L^{-1} dans la base canonique est alors l'inverse de $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x + 3y + 8z = a, \\ y + 6z = b, \\ z = c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = a - 3b + 10c, \\ y = b - 6c, \\ z = c \end{cases}$$

donc

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on dénote avec $\mathbf{u}_1 = (a_0, a_1, a_2)$ le vecteur colonne des composantes du polynôme générique $a_0 + a_1t + a_2t^2$, vis-à-vis de la base canonique, alors les vecteurs colonnes $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ des composantes respectives de p' et de p'' sont respectivement les vecteurs $\mathbf{u}_2 = (a_1, 2a_2, 0)$ et $\mathbf{u}_3 = (2a_2, 0, 0)$. Alors

$$\mathbb{M}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - 3a_1 + 10a_2 \\ a_1 - 6a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3.$$

Par conséquent, si $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, alors

$$\operatorname{coord}(L^{-1}(p), \mathcal{C}) = \mathbb{M} \operatorname{coord}(\mathbf{u}_1, \mathcal{C}) = \operatorname{coord}(\mathbf{u}_1, \mathcal{C}) - 3 \operatorname{coord}(\mathbf{u}_2, \mathcal{C}) + 5 \operatorname{coord}(\mathbf{u}_3, \mathcal{C}) = \operatorname{coord}(p - 3p' + 5p'', \mathcal{C}).$$

Exercice 4.16 (Février 2010)

Soit $\mathbb{A}$ la matrice d'ordre 2×3 définie par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $\mathbb{A}$ détermine une application linéaire $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $L(\mathbf{u}) = \mathbb{A}\mathbf{u}$, où $\mathbf{u}$ est un vecteur colonne avec trois composantes.

- Montrer que la matrice associée à L quand on muni $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques est la matrice $\mathbb{A}$.
- Trouver la matrice associée à L quand on muni $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ des bases respectives :
 $\triangleright \mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{b}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{b}_3 = (1, 0, 0)\}$ et
 $\triangleright \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1 = (1, 3), \mathbf{c}_2 = (2, 5)\}.$

SOLUTION. Pour tout $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$L(\mathbf{n}) = \mathbb{A} \times \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n_1 + 5n_2 - 3n_3 \\ n_1 - 4n_2 + 7n_3 \end{pmatrix}$$

- Soit $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1 = (1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_1) &= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \\ L(\mathbf{u}_2) &= 5\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2, \\ L(\mathbf{u}_3) &= -3\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2, \end{aligned}$$

par conséquent la matrice associée à L quand on muni $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques est la matrice $\mathbb{A}$.

2. Soit $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{b}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{b}_3 = (1, 0, 0) \}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = \{ \mathbf{c}_1 = (1, 3), \mathbf{c}_2 = (2, 5) \}$ une base $\mathbb{R}^2$. On écrit d'abord les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique $\mathcal{U}$, on connaît l'image par L de ces vecteurs dans la base canonique $\mathcal{V}$, on exprime alors ces images dans la base $\mathcal{C}$: comme

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, & \mathbf{b}_2 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, & \mathbf{b}_3 &= \mathbf{u}_1, \\ \mathbf{v}_1 &= -5\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2, & \mathbf{v}_1 &= 2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} L(\mathbf{b}_1) &= L(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = L(\mathbf{u}_1) + L(\mathbf{u}_2) + L(\mathbf{u}_3) = (2 + 5 - 3)\mathbf{v}_1 + (1 - 4 + 7)\mathbf{v}_2 \\ &= 4\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 = 4(-5\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) + 4(2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) = -12\mathbf{c}_1 + 8\mathbf{c}_2, \\ L(\mathbf{b}_2) &= L(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = L(\mathbf{u}_1) + L(\mathbf{u}_2) = (2 + 5)\mathbf{v}_1 + (1 - 4)\mathbf{v}_2 \\ &= 7\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 = 7(-5\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) - 3(2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) = -44\mathbf{c}_1 + 24\mathbf{c}_2, \\ L(\mathbf{b}_3) &= L(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ &= 2(-5\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) + (2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) = -8\mathbf{c}_1 + 5\mathbf{c}_2, \end{aligned}$$

par conséquent la matrice associée à L quand on muni $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ des bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -12 & -44 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{pmatrix}.$$

On obtient le même résultat d'après la formule du changement de base :

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}} \mathbb{A} \mathbb{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -44 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.17 (Novembre 2011)

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}_3[x]$. Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow F \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto ax^3 + bx^2 + (c - d) \end{aligned}$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.

2. Soit

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbb{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

la base canonique de E et

$$\mathcal{F} = \{ p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x^3 \}$$

la base canonique de F . Écrire $\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F .

3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{im}(f)$.

4. f est bijective ? Justifier.

5. Soit

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \mathbb{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

une famille de E . Montrer qu'elle n'est pas libre et en extraire une base qu'on notera $\mathcal{B}$.

6. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}}$.

7. Soit

$$\mathcal{C} = \{ q_0(x) = 1 - x, q_1(x) = x - x^2, q_2(x) = x^2 - x^3, q_3(x) = x^3 \}.$$

Montrer qu'elle constitue une base de F .

8. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}}$.

9. Calculer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F et vérifier que $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}}$.

SOLUTION.

1. Pour toutes $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B}) &= f\left(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}\right) \\ &= (\alpha a + \beta a')x^3 + (\alpha b + \beta b')x^2 + (\alpha c + \beta c')x - (\alpha d + \beta d') \\ &= \alpha(ax^3 + bx^2 + cx - d) + \beta(a'x^3 + b'x^2 + c'x - d') = \alpha f(\mathbb{A}) + \beta f(\mathbb{B}). \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire.

2.

$$\begin{cases} f(\mathbb{E}_1) = x^3 = p_3(x), \\ f(\mathbb{E}_2) = x^2 = p_2(x), \\ f(\mathbb{E}_3) = 1 = p_0(x), \\ f(\mathbb{E}_4) = -1 = -p_0(x), \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On commence par étudier le noyau de f :

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{ \mathbb{A} \in E \mid f(\mathbb{A}) = 0_F \} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \mid ax^3 + bx^2 + (c - d)x = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \mid a = b = c - d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{pmatrix} \in E \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent $\dim(\ker(f)) = 1$ et une base de $\ker(f)$ est la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

On sait que l'image d'une base est une famille génératrice de l'image de f donc

$$\text{im}(f) = \text{Vect} \{ f(\mathbb{E}_1), f(\mathbb{E}_2), f(\mathbb{E}_3), f(\mathbb{E}_4) \} = \text{Vect} \{ p_3(x), p_2(x), p_0(x), -p_0(x) \} = \text{Vect} \{ p_3(x), p_2(x), p_0(x) \}.$$

Comme $\dim(\text{im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = 3$, alors la famille $\{ p_3(x), p_2(x), p_0(x) \}$ est une base de $\text{im}(f)$.

4. f n'est pas bijective car elle n'est ni injective (le noyau n'est pas réduit au 0_E) ni surjective ($\text{im}(f) \neq F$).
5. $\tilde{\mathcal{B}}$ n'est pas libre car $\mathbb{B}_4 = \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2 - \mathbb{B}_3$. On en extrait par exemple la famille $\mathcal{B} = \{ \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3, \mathbb{B}_5 \}$ qui est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car
- 5.1. $\mathbb{B}_i \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$,
- 5.2. $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$,
- 5.3. $\mathcal{B}$ est libre car la combinaison linéaire $a\mathbb{B}_1 + b\mathbb{B}_2 + c\mathbb{B}_3 + d\mathbb{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a comme unique solution $a = b = c = d = 0$.

6.

$$\begin{cases} \mathbb{B}_1 = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_4, \\ \mathbb{B}_2 = \mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_3, \\ \mathbb{B}_3 = \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3, \\ \mathbb{B}_5 = \mathbb{E}_4, \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. $\mathcal{C}$ constitue une base de F car $\text{card}(\mathcal{C}) = \dim(F)$ et les vecteurs de $\mathcal{C}$ sont libres :

$$\begin{aligned} \alpha_1 q_0(x) + \alpha_2 q_1(x) + \alpha_3 q_2(x) + \alpha_4 q_3(x) &= 0 \iff (\alpha_4)x^3 + (\alpha_3 - \alpha_2)x^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)x + (\alpha_1 - \alpha_4) = 0 \\ &\iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0. \end{aligned}$$

8.

$$\begin{cases} q_0(x) = p_0(x) - p_1(x) \\ q_1(x) = p_1(x) - p_2(x) \\ q_2(x) = p_2(x) - p_3(x) \\ q_3(x) = p_3(x) \end{cases} \implies \begin{cases} p_0(x) = q_0(x) + q_1(x) + q_2(x) + q_3(x) \\ p_1(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x) \\ p_2(x) = q_2(x) + q_3(x) \\ p_3(x) = q_3(x) \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9.

$$\begin{cases} f(\mathbb{B}_1) = x^3 - 1 = -q_0(x) - q_1(x) - q_2(x) \\ f(\mathbb{B}_2) = x^2 - 1 = -q_0(x) - q_1(x) \\ f(\mathbb{B}_3) = x^3 - 1 = -q_0(x) - q_1(x) - q_2(x) \\ f(\mathbb{B}_5) = -1 = -q_0(x) - q_1(x) - q_2(x) - q_3(x) \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifions que $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}}$:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.18 (Novembre 2011)

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application définie par

$$f: E \rightarrow F$$

$$p(x) \mapsto \begin{pmatrix} p(0) & p''(2) \\ p'(1) & p'''(3) \end{pmatrix}$$

1. Soit $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ un polynôme de E . Écrire la matrice $f(a)$.
2. Soit

$$\mathcal{E} = \{ p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x^3 \}$$

la base canonique de E et

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{F}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

la base canonique de F . Écrire $\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F .

3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{im}(f)$.
4. f est bijective ? Justifier.
5. Soit

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{ q_0(x) = 1 - x, q_1(x) = x - x^2, q_2(x) = x^2 - x^3, q_3(x) = x^3 - 1, q_4(x) = x^3 \}$$

une famille de E . Montrer qu'elle n'est pas libre et en extraire une base qu'on notera $\mathcal{B}$.

6. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}}$.
7. Notons $\mathbb{C}_{i+1}(x) = f(p_i)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. Sans faire de calculs, expliquer pourquoi la famille $\mathcal{C} = \{ \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3, \mathbb{C}_4 \}$ est une base de F .
8. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}}$.
9. Calculer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F et vérifier que $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}}$.

SOLUTION.

1.

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 & a(0) &= a_0, \\ a'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 & a'(1) &= a_1 + 2a_2 + 3a_3, \\ a''(x) &= 2a_2 + 6a_3x & a''(2) &= 2a_2 + 12a_3, \\ a'''(x) &= 6a_3 & a'''(3) &= 6a_3, \end{aligned}$$

donc

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0 & 2a_2 + 12a_3 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 & 6a_3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{cases} f(p_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{F}_1, \\ f(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{F}_3, \\ f(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbb{F}_2 + 2\mathbb{F}_3, \\ f(p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 12\mathbb{F}_2 + 3\mathbb{F}_3 + 6\mathbb{F}_4, \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. On commence par étudier le noyau de f :

$$\begin{aligned}\ker(f) &= \{ p \in E \mid f(p) = 0_2 \} = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in E \mid \begin{pmatrix} a_0 & 2a_2 + 12a_3 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 & 6a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in E \mid a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0 \} = \{ 0_E \}.\end{aligned}$$

Par conséquent $\dim(\ker(f)) = 0$.

Comme $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = 4 = \dim(F)$, alors $\operatorname{im}(f) = F$: toute base de F est aussi une base de $\operatorname{im}(f)$, on peut alors prendre la famille $\mathcal{F}$.

4. On remarque que $\det(\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = -12$, donc $\operatorname{rg}(\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})) = \dim(E) = \dim(F)$: f est alors bijective.

5. $\tilde{\mathcal{B}}$ n'est pas libre car $q_3 = -q_0 - q_1 - q_2$. On en extrait par exemple la famille $\mathcal{B} = \{ q_0, q_1, q_2, q_4 \}$ qui est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ car

5.1. $q_i \in \mathbb{R}_3[x]$ pour tout $i = 0, 1, 2, 4$,

5.2. $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}_3[x])$,

5.3. $\mathcal{B}$ est libre car la combinaison linéaire $aq_0(x) + bq_1(x) + cq_2(x) + dq_4(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a comme unique solution $a = b = c = d = 0$.

6.

$$\begin{cases} q_0(x) = p_0(x) - p_1(x) \\ q_1(x) = p_1(x) - p_2(x) \\ q_2(x) = p_2(x) - p_3(x) \\ q_4(x) = p_3(x) \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. On a

$$\mathbb{C}_1 = f(p_0) = \mathbb{F}_1$$

$$\mathbb{C}_2 = f(p_1) = \mathbb{F}_3$$

$$\mathbb{C}_3 = f(p_2) = 2\mathbb{F}_2 + 2\mathbb{F}_3$$

$$\mathbb{C}_4 = f(p_3) = 12\mathbb{F}_2 + 3\mathbb{F}_3 + 6\mathbb{F}_4$$

Étant $\mathcal{C}$ l'image d'une base de E , elle est une famille génératrice de $\operatorname{im}(f)$. Comme la cardinalité de la famille $\mathcal{C}$ est égale à la dimension de $\operatorname{im}(f)$, elle constitue une base de $\operatorname{im}(f)$. Étant donné que $\operatorname{im}(f) = F$ alors la famille $\mathcal{C}$ est une base de F .

8.

$$\begin{cases} \mathbb{C}_1 = \mathbb{F}_1, \\ \mathbb{C}_2 = \mathbb{F}_3, \\ \mathbb{C}_3 = 2\mathbb{F}_2 + 2\mathbb{F}_3, \\ \mathbb{C}_4 = 12\mathbb{F}_2 + 3\mathbb{F}_3 + 6\mathbb{F}_4, \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbb{F}_1 = \mathbb{C}_1, \\ \mathbb{F}_2 = -\mathbb{C}_2 + \frac{1}{2}\mathbb{C}_3, \\ \mathbb{F}_3 = \mathbb{C}_3, \\ \mathbb{F}_4 = 2\mathbb{C}_2 - \frac{3}{2}\mathbb{C}_3 + \frac{1}{6}\mathbb{C}_4, \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

9. On peut faire le calcul direct

$$\begin{cases} f(q_0) = f(p_0 - p_1) = \mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2 \\ f(q_1) = f(p_1 - p_2) = \mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_3 \\ f(q_2) = f(p_2 - p_3) = \mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_4 \\ f(q_4) = f(p_3) = \mathbb{C}_4 \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ou utiliser la relation $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}}$:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} = (\mathbb{P}_{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}})^{-1} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} = (\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}))^{-1} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} = \mathbb{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}}$$

car

$$\mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}} = (\mathbb{P}_{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}})^{-1} = (\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}))^{-1}$$

Exercice 4.19

Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[t]$ définie par

$$f: \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}_n[t]$$

$$p(t) \mapsto t^2 p''(t) - (t+1)p'(t) - 3p(t)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[t]$.
2. Calculer le rang de f .
3. Donner une base du noyau de f .
4. Soit $a(t)$ le polynôme de $\ker(f)$ tel que le coefficient du terme de degré maximale est égale à 1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{f(t), f(t^2), f(t^3), a(t)\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[t]$.
5. Calculer $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ la matrice de f quand on muni l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[t]$ de la base $\mathcal{B}$ au départ et de la base canonique à l'arrivée.

SOLUTION.

1. Prouvons que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[t]$, i.e. que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[t]$ dans $\mathbb{R}_3[t]$.
 $\triangleright$ Prouvons d'abord que $f(p) \in \mathbb{R}_3[t]$ pour tout $p \in \mathbb{R}_3[t]$. Sans faire de calculs, il suffit de remarquer que

$$\deg(f(p)(t)) \leq \max \{ \deg(t^2 p''(t)), \deg((t+1)p'(t)), \deg(3p(t)) \} = \deg(p(t)) \leq 3.$$

Sinon, on peut calculer explicitement l'image de $p \in \mathbb{R}_3[t]$ par f : si $p \in \mathbb{R}_3[t]$, il existe $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tels que $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ et on obtient

$$\begin{aligned} f(p(t)) &= t^2 p''(t) - (t+1)p'(t) - 3p(t) \\ &= t^2(2a_2 + 6a_3 t) - (t+1)(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2) - 3(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) \\ &= (-3a_0 - a_1) + (-4a_1 - 2a_2)t + (-3a_2 - 3a_3)t^2 \in \mathbb{R}_3[t]. \end{aligned}$$

- $\triangleright$ Prouvons maintenant que f est une application linéaire. En effet, soit p et q deux polynômes de $\mathbb{R}_3[t]$ et λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned} f(\lambda p(t) + \mu q(t)) &= t^2(\lambda p(t) + \mu q(t))'' - (t+1)(\lambda p(t) + \mu q(t))' - 3(\lambda p(t) + \mu q(t)) \\ &= \lambda t^2 p''(t) + \mu t^2 q''(t) - \lambda(t+1)p'(t) - \mu(t+1)q'(t) - \lambda 3p(t) - \mu 3q(t) \\ &= \lambda(t^2 p''(t) - (t+1)p'(t) - 3p(t)) + \mu(t^2 q''(t) - (t+1)q'(t) - 3q(t)) = \lambda f(p) + \mu f(q). \end{aligned}$$

2. Pour calculer le rang de f on peut utiliser une matrice représentative de f . Pour cela, considérons la base canonique de $\mathbb{R}_3[t]$, $\mathcal{C} = \{c_0(t) = 1, c_1(t) = t, c_2(t) = t^2, c_3(t) = t^3\}$, et calculons l'image de chaque vecteur de cette base

$$\begin{aligned} f(c_0(t)) &= t^2 c_0''(t) - (t+1)c_0'(t) - 3c_0(t) = -3 = -3c_0(t), \\ f(c_1(t)) &= t^2 c_1''(t) - (t+1)c_1'(t) - 3c_1(t) = -(t+1) - 3t = -c_0(t) - 4c_1(t), \\ f(c_2(t)) &= t^2 c_2''(t) - (t+1)c_2'(t) - 3c_2(t) = 2t^2 - (t+1)2t - 3t^2 = -2c_1(t) - 3c_2(t), \\ f(c_3(t)) &= t^2 c_3''(t) - (t+1)c_3'(t) - 3c_3(t) = t^2(6t) - (t+1)(3t^2) - 3t^3 = -3c_2(t), \end{aligned}$$

donc par définition la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_3[t]$ est

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Clairement $\det(\mathbb{M}(f, \mathcal{C})) = 0$ et $\det \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 36$ donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(\mathbb{M}(f, \mathcal{C})) = 3$.

3. Comme $\dim(\text{im}(f)) = \text{rg}(f) = 3$, d'après le théorème du rang alors $\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\text{im}(f)) = 1$: toute base du noyau ne contient qu'un vecteur (non nul).

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \ker(f) \iff \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \\ -3\kappa \\ 6\kappa \\ -6\kappa \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R}$$

d'où $\ker(f) = \{ \kappa - 3\kappa t + 6\kappa t^2 - 6\kappa t^3 \mid \kappa \in \mathbb{R} \} = \text{Vect} \{ 1 - 3t + 6t^2 - 6t^3 \}$ et la famille $\{ 1 - 3t + 6t^2 - 6t^3 \}$ est une base de $\ker(f)$.

4. $a(t)$ est alors le polynôme $a(t) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}t - t^2 + t^3$ et la famille $\mathcal{B}$ l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{f(t), f(t^2), f(t^3), a(t)\} \\ &= \{f(\mathbf{c}_1(t)), f(\mathbf{c}_2(t)), f(\mathbf{c}_3(t)), a(t)\} \\ &= \left\{ -\mathbf{c}_0(t) - 4\mathbf{c}_1(t), -2\mathbf{c}_1(t) - 3\mathbf{c}_2(t), -3\mathbf{c}_2(t), -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_1(t) - \mathbf{c}_2(t) + \mathbf{c}_3(t) \right\}\end{aligned}$$

qui a cardinalité 4. La dimension de l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}$ est égal au rang de $\mathcal{B}$. Comme

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1/6 \\ -4 & -2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} = -6$$

alors $\dim(\text{Vect}(\mathcal{B})) = 4$. On conclut alors que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[t]$.

5. Pour calculer $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ il faut calculer les coordonnées dans la base canonique $\mathcal{C}$ de l'image de chaque vecteur de $\mathcal{B}$ par f (on ne change pas de base dans l'espace d'arrivée) :

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{I}_4 \mathbb{M}(f, \mathcal{C}) \mathbb{P}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1/6 \\ -4 & -2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 \\ 16 & 14 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.20

Pour $\ell \in \mathbb{R}$, soit

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \ell & \ell & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \ell & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice représentative d'une application linéaire $f: E \rightarrow F$ par rapport aux bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F .

- ① Calculer $\text{rg}(\mathbb{A})$ en fonction de ℓ .
- ② Calculer les dimensions de $\ker(f)$ et $\text{im}(f)$ en fonction de ℓ .
- ③ Pour $\ell = 0$ expliciter une base de $\ker(f)$ et $\text{im}(f)$. Peut-on conclure que $\mathbb{R}^4 = \ker(f) \oplus \text{im}(f)$?

SOLUTION.

- ① Si $\ell = 0$ alors $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\text{rg}(\mathbb{A}) = 2$. Si $\ell \neq 0$ alors $\det(\mathbb{A}) = \ell \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ell & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\ell^2 \neq 0$ et $\text{rg}(\mathbb{A}) = 4$.
- ② $\dim(\text{im}(f)) = \text{rg}(\mathbb{A})$ et $\dim(\ker(f)) = 4 - \dim(\text{im}(f))$. Si $\ell = 0$ alors $\dim(\text{im}(f)) = 2$ et $\dim(\ker(f)) = 2$. Si $\ell \neq 0$ alors $\dim(\text{im}(f)) = 4$ et $\dim(\ker(f)) = 0$.
- ③ Pour $\ell = 0$,
 - ▷ $\text{im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, l'espace vectoriel engendré par les deux éléments de F qui ont coordonnées $(1, 0, 0, 0)$ et $(1, 4, 3, 2)$ dans la base $\mathcal{F}$.
 - ▷ $\ker(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, l'espace vectoriel engendré par les deux éléments de E qui ont coordonnées $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$ dans la base $\mathcal{E}$.
 On se rappelle que si H_1 et H_2 sont deux espaces vectoriels de H , la somme de H_1 et H_2 est directe si et seulement si

$$\begin{cases} H = H_1 + H_2 \\ H_1 \cap H_2 = \{ \mathbf{0}_H \} \end{cases}$$

De plus, $\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$.

Comme $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = 4$, $\dim(\text{im}(f) \cap \ker(f)) = 0$ donc $\text{im}(f) \cap \ker(f) = \{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \}$. Il suffit alors de montrer que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est libre pour conclure que $\mathbb{R}^4 = \ker(f) \oplus \text{im}(f)$. Comme

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{ alors } \mathbb{R}^4 = \ker(f) \oplus \text{im}(f).$$

Exercice 4.21

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et F un espace vectoriel de dimension 2.

- ① Calculer $\dim(\mathcal{L}(E, F))$.
- ② Soit $\mathcal{E} = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$ une base de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} = \{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \}$ une base de $\mathcal{F}$. Soit $G = \{ f \in \mathcal{L}(E, F) \mid f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}_F \}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. Calculer $\dim(G)$.

SOLUTION.

- ① Fixons deux bases $\mathcal{E} = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$ de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} = \{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \}$ de $\mathcal{F}$. Tout élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ est tel que

$$f(\mathbf{e}_1) = a_{11}\mathbf{c}_1 + a_{12}\mathbf{c}_2,$$

$$f(\mathbf{e}_2) = a_{21}\mathbf{c}_1 + a_{22}\mathbf{c}_2,$$

$$f(\mathbf{e}_3) = a_{31}\mathbf{c}_1 + a_{32}\mathbf{c}_2.$$

Alors, à tout élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ on peut associer une et une seule matrice $\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et viceversa (autrement dit, les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont isomorphes). Par conséquent $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})) = 6$.

- ② Tout élément g de G est tel que

$$g(\mathbf{e}_1) = a_{11}\mathbf{c}_1 + a_{12}\mathbf{c}_2,$$

$$g(\mathbf{e}_2) = a_{11}\mathbf{c}_1 + a_{12}\mathbf{c}_2,$$

$$g(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}.$$

Alors, à tout élément g de G on peut associer une et une seule matrice

$$\mathbb{M}(g, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & 0 \\ a_{12} & a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

et viceversa. Autrement dit, les espaces vectoriels G et $\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ sont isomorphes. Par conséquent $\dim(G) = 2$.

Exercice 4.22

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ nilpotent d'ordre 3, c'est-à-dire tel que $f^3 = 0$ mais $f^2 \neq 0$.

- ① Montrer qu'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $\mathcal{B} = \{ \mathbf{x}, f(\mathbf{x}), f^2(\mathbf{x}) \}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- ② Calculer $\mathbb{M}(f, \mathcal{B})$ la matrice de f relativement à cette base. En déduire une base de $\text{im}(f)$ et une base de $\text{ker}(f)$.
- ③ Montrer que $\text{ker}(f^2) = \text{im}(f)$ et que $\text{im}(f^2) = \text{ker}(f)$.

SOLUTION.

- ① Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \}$. La famille $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1 = \mathbf{x}, \mathbf{b}_2 = f(\mathbf{x}), \mathbf{b}_3 = f^2(\mathbf{x}) \} \subset \mathbb{R}^3$ a cardinalité 3. Pour prouver qu'elle est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de prouver qu'elle est libre, i.e. que l'équation $\alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2 + \gamma\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ admet l'unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Pour cela observons que

$$\begin{cases} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = \alpha\mathbf{x} + \beta f(\mathbf{x}) + \gamma f^2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = f(\alpha\mathbf{x} + \beta f(\mathbf{x}) + \gamma f^2(\mathbf{x})) \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = f^2(\alpha\mathbf{x} + \beta f(\mathbf{x}) + \gamma f^2(\mathbf{x})) \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = \alpha\mathbf{x} + \beta f(\mathbf{x}) + \gamma f^2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f^2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = \alpha f^2(\mathbf{x}) \end{cases} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$$

- ② On a

$$\begin{cases} f(\mathbf{b}_1) = f(\mathbf{x}) = 0\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 + 0\mathbf{b}_3 \\ f(\mathbf{b}_2) = f^2(\mathbf{x}) = 0\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2 + 1\mathbf{b}_3 \\ f(\mathbf{b}_3) = f^3(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$\triangleright \text{ker}(f) = \text{Vect} \{ f^2(\mathbf{x}) \}$ et la famille $\{ f^2(\mathbf{x}) \}$ est une base de $\text{ker}(f)$.

▷ $\text{im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\text{im}(f)$ car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

③ On a

$$\begin{cases} f^2(\mathbf{b}_1) = f(f(\mathbf{b}_1)) = f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_3 \\ f^2(\mathbf{b}_2) = f(f(\mathbf{b}_2)) = f(\mathbf{b}_3) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \\ f^2(\mathbf{b}_3) = f(f(\mathbf{b}_3)) = f(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \implies \mathbb{M}(f^2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

▷ $\ker(f^2) = \text{Vect} \{ \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \} = \text{Vect} \{ f(\mathbf{x}), f^2(\mathbf{x}) \} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{im}(f)$

▷ $\text{im}(f^2) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \{ f^2(\mathbf{x}) \} = \ker(f)$.

Exercice 4.23

Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et f un endomorphisme de E . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- ① $\ker(f) = \text{im}(f)$,
- ② $f \circ f = 0$ et $\dim(\text{im}(f)) = 2$.

SOLUTION.

▷ Prouvons que ① $\implies$ ② : si $\ker(f) = \text{im}(f)$, d'après le théorème du rang on a $4 = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f)) = 2 \dim(\ker(f))$ d'où $\dim(\ker(f)) = \dim(\text{im}(f)) = 2$.

Soit $\mathcal{C} = \{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \}$ une base de $\text{im}(f)$ alors il existe $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in E$ linéairement indépendantes tels que $f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{c}_1$ et $f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{c}_2$. Comme $\ker(f) = \text{im}(f)$, alors $\mathcal{C}$ est aussi une base de $\ker(f)$ et donc $f(\mathbf{c}_1) = f(\mathbf{c}_2) = \mathbf{0}_E$. Autrement dit $f^2(\mathbf{b}_1) = f^2(\mathbf{b}_2) = \mathbf{0}_E$. Comme la famille $\{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \} \subset E$ est libre et a cardinalité 4, elle est une base de E et $f^2(\mathbf{b}_1) = f^2(\mathbf{b}_2) = f^2(\mathbf{c}_1) = f^2(\mathbf{c}_2) = \mathbf{0}_E$, alors $f \circ f = 0$.

▷ Prouvons que ② $\implies$ ① : si $\dim(\text{im}(f)) = 2$, d'après le théorème du rang on a $4 = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f)) = \dim(\ker(f)) + 2$ d'où $\dim(\ker(f)) = \dim(\text{im}(f)) = 2$. Soit $\mathcal{E} = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \}$ une base de E telle que $\{ f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \}$ est une base de $\text{im}(f)$. Comme $f \circ f = 0$ alors $\{ f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \}$ est une base de $\ker(f)$ donc $\ker(f) = \text{im}(f)$.