

APPLICATIONS LINÉAIRES

Rappels de cours

1 Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels réels, et soit f une application de E dans F .

On dit que f est une *application linéaire* si :

$$\forall (x; y) \in E \times E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

2 Noyau

Soit f une application linéaire de E dans F .

Le *noyau* de f est l'ensemble :

$$\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

3 Ensemble image

Soit f une application linéaire de E dans F .

L'*ensemble image* de f est l'ensemble :

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

4 Théorème du rang

Soit f une application linéaire de E dans F .

Alors,

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$$

5 Application injective, surjective, bijective

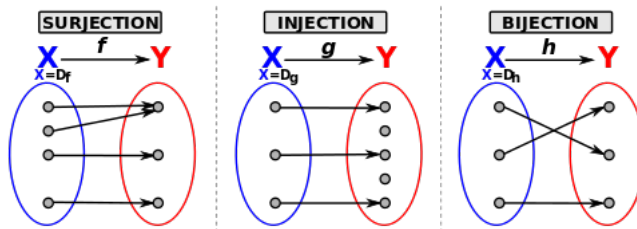
Soit f une application linéaire de E dans F .

On dit que f est *injective* si :

$$\forall (x; y) \in E \times E, f(x) = f(y) \iff x = y \quad \text{ou} \quad f \text{ injective} \iff \ker(f) = \{0_E\}$$

On dit que f est *surjective* si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E .

On dit que f est *bijective* si elle est injective et surjective.



6 Applications linéaires particulières

Une application linéaire de E dans E est appelée un *endomorphisme*.

Une application linéaire bijective est appelée un *isomorphisme*.

Une application linéaire bijective de E dans E est appelée un *automorphisme*.

Exercices

★ Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x; y; z) = (x + y - z; x - y)$$

- 1 Montrer que f est linéaire.
- 2 Montrer que $\ker(f) = \{(x; x; 2x), x \in \mathbb{R}\}$.
- 3 En déduire $\dim(\ker(f))$, $\dim(\operatorname{Im}(f))$ puis $\operatorname{Im}(f)$.

★ Exercice 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x; y) = (x + 2y; 3x - y)$$

- 1 Montrer que f est un automorphisme.
- 2 Déterminer $\ker(f)$.
- 3 En déduire $\operatorname{Im}(f)$.

★ Exercice 3

Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) &\mapsto P(X) + (1 - X)P''(X) \end{aligned}$$

où $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré 2.

- 1 Montrer que f est linéaire.
- 2 Montrer que $\ker(f) = \{0\}$. En déduire $\dim(\ker(f))$.
- 3 Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$.
- 4 Déduire des deux dernières questions une base de $\operatorname{Im}(f)$.
- 5 Montrer que f est bijective et trouver sa bijection réciproque.

★ Exercice 4

Pour les applications suivantes, déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

- 1 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x; y) = (2x + y; x - y)$
- 2 $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x; y; z) = (2x + y + z; y - z; x + y)$
- 3 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x; y) = (y; 0; x - 7y; x + y)$

★ Exercice 5

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x; y) = xy$$

f est-elle linéaire ?

★ Exercice 6

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x; y; z) = x + 2y - 3z$$

f est-elle linéaire ? injective ? surjective ? bijective ?

★ Exercice 7

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$f(P(X)) = P'(X)$$

Montrer que f est linéaire et déterminer $\ker(f)$.

★ Exercice 8

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x; y; z) = (x + y + z; x - y - z)$$

Montrer que f est linéaire. Déterminer $\ker(f)$, puis $\dim(\ker(f))$.

★ Exercice 1

- 1** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $u(x; y; z)$ et $v(x'; y'; z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$.
Alors,

$$\lambda u + v(\lambda x + x'; \lambda y + y'; \lambda z + z')$$

et

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda x + x' + \lambda y + y' - \lambda z - z'; \lambda x + x' - \lambda y - y') \\ &= (\lambda(x + y - z) + x' + y' - z'; \lambda(x - y) + x' - y') \\ &= \lambda(x + y - z; x - y) + (x' + y' - z'; x' - y') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

f est donc linéaire.

- 2** $\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 0\}$.
Posons $u(x; y; z) \in \ker f$. Alors,

$$\begin{aligned} f(u) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u(x; x; 2x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, $\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u(x; x; 2x), x \in \mathbb{R}\}$.

- 3** On peut noter $\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ donc $\dim \ker f = 1$.

D'après le théorème du rang, $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im}(f)$, soit $3 = 1 + \dim \operatorname{Im}(f)$.
Par conséquent, $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$ et $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

★ Exercice 2

- 1** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $u(x; y)$ et $v(x'; y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Alors,

$$\lambda u + v(\lambda x + x'; \lambda y + y')$$

et

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda x + x' + 2\lambda y + 2y'; 3\lambda x + 3x' - \lambda y - y') \\ &= \lambda(x + 2y; 3x - y) + (x' + 2y'; 3x' - y') \\ &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Donc, f est linéaire.

Posons $v(x'; y') \in \operatorname{Im}(f)$.

Alors, il existe un vecteur $u(x; y)$ tel que $v = f(u)$, soit $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x - y \end{cases}$. Après calculs, on

arrive à : $\begin{cases} x = \frac{1}{7}x' + \frac{2}{7}y' \\ y = \frac{3}{7}x' - \frac{1}{7}y' \end{cases}$.

Il existe donc un unique antécédent à tout v de $\text{Im}(f)$. f est donc bijective.
 f est donc un automorphisme.

2 $\ker f = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid f(u) = 0\}$.

Soit $u(x; y) \in \ker f$. Alors, $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$, soit $x = y = 0$.

Ainsi, $\ker f = \{(0; 0)\}$.

3 f est bijective donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

★ Exercice 3

1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X) + (1 - X)(\lambda P' + Q')(X) \\ &= \lambda P(X) + (\lambda(1 - X)P'(X) + Q(X) + (1 - X)Q'(X)) \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2 Soit $P \in \ker f$, $P(X) = aX^2 + bX + c$. Alors,

$$\begin{aligned} f(P) = 0 &\Leftrightarrow aX^2 + bX + c + 2a(1 - X) = 0 \quad \forall X \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow aX^2 + (b - 2a)X + 2a + c = 0 \quad \forall X \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a - b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0 \\ &\Leftrightarrow u(X) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\ker f = \{0\}$ et $\dim \ker f = 0$.

3 $f(1) = 1 - (1 - X) \times 0 = 1$, $f(X) = X + (1 - X) \times 0 = X$ et $f(X^2) = X^2 + (1 - X) \times 2 = X^2 - 2X + 2$.

4 D'après le théorème du rang, $\dim \text{Im}(f) = 3$ (car $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$).

Ainsi, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.

5 $\mathcal{B} = \{1; X; X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

De plus, d'après la question précédente, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(X) \\ f(X^2) \end{pmatrix}$$

En notant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. A est inversible donc f est bijective.

- Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, avec $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors $f(P)(X) = aX^2 + (b - 2a)X + 2a + c$.
- Si $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, avec $Q(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, alors $Q(X) = \alpha(X^2 - 2X + 2) + (\beta + 2\alpha)X + \gamma - 2\alpha$ donc $f^{-1}(Q)(X) = \alpha X^2 + (\beta - 2\alpha)X + \gamma - 2\alpha$.

★ Exercice 4

$$1 \quad u(x; y) \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}.$$

$$2 \quad u(x; y; z) \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow u(-y; y; y) \Rightarrow \ker f = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$3 \quad u(x; y) \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 7y \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}.$$

★ Exercice 5

$$f(\lambda u + v) = (\lambda x + x')(\lambda y + y') = \lambda^2 xy + \lambda(xy' + yx') + x'y' \neq \lambda xy + x'y'.$$

Donc, f n'est pas linéaire.

★ Exercice 6

f est linéaire.

$\ker f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.

Posons $k \in \mathbb{R}$. Existe-t-il un $u(x; y; z)$ tel que $f(u) = k$? Oui ; par exemple $u(k; 0; 0)$. Donc f est surjective.

Donc f n'est pas bijective.

★ Exercice 7

$$f(\lambda P + Q) = \lambda P' + Q' = \lambda f(P) + f(Q).$$

Donc f est linéaire.

$$P \in \ker f \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P(X) = k, k \in \mathbb{R}.$$

Donc $\ker f = \mathbb{R}$.

★ Exercice 8

f linéaire : évident.

$$\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle. \text{ Donc } \dim \ker f = 1.$$