

Applications linéaires

Fiche technique

Stéphane PASQUET

21 avril 2013

Montrer qu'une application est linéaire.

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire, on montre que :

$$\forall (u, v) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

Exemple 1. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(x; y) = (x - 2y; 3x - y)$$

Soient alors $u(x; y)$ et $v(x'; y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda u(\lambda x; \lambda y)$$

Et donc :

$$\lambda u + v = (\lambda x + x'; \lambda y + y')$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda x + x' - 2(\lambda y + y'); 3(\lambda x + x') - (\lambda y + y')) \\ &= (\lambda x - 2\lambda y + x' - 2y'; 3\lambda x - \lambda y + 3x' - y') \\ &= (\lambda x - 2\lambda y; 3\lambda x - \lambda y) + (x' - 2y'; 3x' - y') \\ &= \lambda(x - 2y; 3x - y) + (x' - 2y'; 3x' - y') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

L'application f est donc linéaire.

La présentation en ligne des coordonnées des vecteurs n'est pas très pratique pour la lisibilité. on pourra alors les présenter en colonne pour y voir mieux :

$$f(x; y) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x - y \end{pmatrix} \quad ; \quad u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad v \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= \begin{pmatrix} \lambda x + x' - 2(\lambda y + y') \\ 3(\lambda x + x') - (\lambda y + y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x - 2\lambda y + x' - 2y' \\ 3\lambda x - \lambda y + 3x' - y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' - 2y' \\ 3x' - y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Déterminer le noyau d'une application linéaire.

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$, on détermine les coordonnées de tous les vecteurs $u \in E$ pour que $f(u) = 0_F$ (vecteur nul de F). On cherche donc des conditions sur les coordonnées de u .

$$\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$$

Exemple 2. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(x; y) = (x - 2y; 3x - y)$$

$$\begin{aligned} u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3 \times 2y - y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(f) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \mid u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ (on adoptera uniquement l'une de ses notations).

Exemple 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x - z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = -x \end{cases} \quad \text{On exprime deux inconnues en fonction de l'autre} \\ &\Leftrightarrow u \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\ker(f) = \left\{ u \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$