

Correction du sujet de mathématiques 2005

Olivier Bonneton

Important : Ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par



Exercice 1 :

Partie A

Avant toute chose, on peut éventuellement construire un tableau ou un arbre pour répondre aux différentes questions de cette partie.

1) Ces différentes probabilités sont données directement par la lecture de l'énoncé :

- $P(A) = 0.600$
- $P(B) = 0.400$
- $P(D/A) = 0.01$
- $P(D/B) = 0.02$

2) On calcule $P(D \cap A) = P(A) \times P(D/A) = 0.6 \times 0.01 = 0.006$
De même, $P(D \cap B) = P(B) \times P(D/B) = 0.4 \times 0.02 = 0.008$

3) Le calcul de $P(D)$ se fait à partir de la question précédente :
 $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = 0.006 + 0.008 = 0.014$

4) La traduction en terme de probabilité de cette question est : $P(A/D)$
 $P(A/D) = P(A \cap D) / P(D) = 0.006 / 0.014 = 0.429$

Partie B

1) X suit la loi Binomiale de paramètre $n=50$ et $p=0.02$. En effet, nous avons ici des tirages indépendants car avec remise et avec un stock important. De plus, l'expérience répétée est une loi de Bernouilli avec une probabilité Succès (0.02) – Echec (0.98)

2) 'Aucune des montures' peut se traduire par la probabilité $P(X=0) = C_{50}^0 (0.02)^0 (0.98)^{50} = 0.364$

3) 'Au plus deux' peut se traduire par la probabilité $P(X \leq 2)$:

$$P(X \leq 2) = 0.364 + C_{50}^1 (0.02)^1 (0.98)^{49} + C_{50}^2 (0.02)^2 (0.98)^{48} = 0.364 + 0.372 + 0.186 = 0.922$$

Partie C

La monture a un poids conforme si L est dans l'intervalle $[99 ; 101]$.

Nous savons que L suit la loi Normale $(100 ; 0.5)$. Calculons la probabilité :

$$P(99 \leq L \leq 101) = P\left(\frac{99-100}{0.5} \leq t \leq \frac{101-100}{0.5}\right) = P(-2 \leq t \leq 2) = 2 \Pi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.954$$

Partie D

1) Nous savons que si Y suit la loi Normale $(\mu ; 0.5)$ alors $\bar{Y}$ suit la loi Normale $(\mu ; \frac{0.5}{\sqrt{100}}) = (\mu ; 0.05)$

2) Calculons le réel h positif tel que :

$$P(100 - h \leq \bar{Y} \leq 100 + h) = 0.95$$

$$P\left(\frac{100-h-100}{0.05} \leq t \leq \frac{100+h-100}{0.05}\right) = 0.95$$

$$\text{rappel : } h / 0.05 = h / (5/100) = h \cdot 100 / 5 = 20 h$$

$$P(-20 h \leq t \leq 20 h) = 0.95$$

$$2 \cdot \Pi(20 h) - 1 = 0.95$$

$$\Pi(20 h) = 0.975 = \Pi(1.96) \text{ d'après une lecture inversée de la table.}$$

Donc on arrive à $20 h = 1.96$ ce qui entraîne que $h = 1.96 / 20 = 0.098$

- 3) La règle de décision de ce test est la suivante : L'hypothèse H_0 est conservée au seuil de risque de 5% si la moyenne de l'échantillon est dans l'intervalle $[100 - 0.098 ; 100 + 0.098]$ soit $[99.902 ; 100.098]$. Si la moyenne n'est pas dans cet intervalle, dans ce cas, on rejette H_0 et on accepte H_1 .
- 4) D'après la règle de décision précédente, nous avons ici une moyenne de 100.032 comprise dans l'intervalle. H_0 est donc validée et on peut dire que les montures de la livraison sont conformes en ce qui concernent leur poids.

Exercice 2 :

Partie A

- 1) On résout l'équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre : $y' - y = 0$
On a : $a = 1$ $b = -1$ soit $b/a = -1$ donc une primitive de b/a est $-x$.
La fonction solution Sans Second Membre est :

$$Y_{SSM} = C e^x$$

- 2) $h(x)$ est une solution particulière de E si $h(x)$ vérifie E. Il nous faut $h'(x)$

$$h'(x) = (uv)' = u'v + uv' = e^x (1/x + \ln x) + e^x (1/x - 1/x^2) = e^x (2/x + \ln x - 1/x^2)$$

$$h'(x) - h(x) = e^x (2/x + \ln x - 1/x^2) - e^x (1/x + \ln x) = e^x (1/x - 1/x^2)$$

On retrouve bien le second membre de E. Donc $h(x)$ est une solution particulière de E

- 3) L'ensemble des solutions de E est la somme de la solution sans second membre et de la solution particulière.

$$y(x) = C e^x + e^x (1/x + \ln x) = e^x (1/x + \ln x + C)$$

- 4) Il nous reste à déterminer C à l'aide de la condition : $f(1) = 2e$

$$f(1) = e (1 + \ln 1 + C) = e (1 + C) = 2e \quad \text{Ainsi on détermine } C = 1$$

$$\text{La fonction solution est } f(x) = e^x (1/x + \ln x + 1)$$

Partie B

- 1) a) Calculons la limite en $+\infty$ de $h(x)$. Nous savons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ est $+\infty$. Il en est de même pour la limite de $1/x + \ln x$ car $\ln x$ tend vers $+\infty$ et $1/x$ tend vers 0.
Ainsi la limite de $h(x)$ en $+\infty$ est $+\infty$.

$$b) \text{ On peut écrire } e^x (1/x + \ln x) = e^x (1/x + \frac{x \ln x}{x}) = e^x / x (1 + x \ln x)$$

Cette nouvelle écriture va nous permettre de déterminer la limite en zéro de $h(x)$.

En effet, e^x / x tend vers $+\infty$ et nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ en zéro = 0.

Soit $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ en zéro = $+\infty$

- c) Cette dernière limite nous permet de préciser qu'il existe une asymptote verticale en $x = 0$.

- 2) a) D'après le tableau de variation de g donné par l'énoncé, nous allons utiliser la bijection pour montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0.5 ; 0.6]$.

En effet, g est continue sur $]0 ; +\infty[$ donc sur $[0.5 ; 0.6]$. De plus, elle est strictement croissante sur cet intervalle. Elle réalise donc une bijection de $[0.5 ; 0.6]$ sur $[g(0.5) ; g(0.6)]$.

Or, $g(0.5) = -0.633$ et $g(0.6) = 0.0447$.

0 appartient à l'intervalle $[g(0.5) ; g(0.6)]$. Il existe donc un unique $\alpha \in [0.5 ; 0.6]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b) D'après la calculatrice, on trouve une valeur de $\alpha = 0.59$

c) On peut donc en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$

Sur $]0 ; \alpha[$, la fonction g est négative puis sur $[\alpha ; +\infty[$, la fonction g est positive ou nulle.

d) Nous pouvons reprendre la question A 2). Nous avons vu que $h'(x) = e^x (2/x + \ln x - 1/x^2)$.

Soit $h'(x) = e^x g(x)$

e) D'après ce qui précède, nous constatons que le signe de $h'(x)$ est le même que celui de $g(x)$ car sur $\mathbb{R}$ la fonction e^x est strictement positive. Donc sur $]0 ; \alpha[$, la fonction $h'(x)$ est négative puis sur $[\alpha ; +\infty[$, la fonction $h'(x)$ est positive ou nulle.

f) On peut maintenant déduire de ce qui précède le tableau de variation de h :

x	0	α	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$h(\alpha)$	$+\infty$