Important : Ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Correction du sujet de Mathématiques
BTS Opticien Lunetier Session 2007
Proposé par Olivier Bonneton

<u>Exercice 1 :</u>

<u>PARTIE A :</u>

1/ On justifie que la variable aléatoire suit une loi Binomiale car nous avons n tirages indépendants (au hasard et avec remise) et il existe deux issues possibles : la boîte est défectueuse ou non. La loi sera donc une loi binomiale de paramètres B (n ; 0.006) puisque X mesure le nombre de boîtes défectueuses.

2/ La probabilité pour qu'il n'y ait aucune boîte défectueuse s'écrit :

$P(X = 0) = C_n^0\, 0.006^0 * 0.994^n = 0.994^n$

3/ a/ On admet que la loi binomiale B (500 , 0.006) peut être approchée par une loi de Poisson dont le paramètre est λ = n p = 500 * 0.006 = 3.

b/ On peut utiliser la table de Poisson du formulaire en prenant la colonne $\lambda = 3$. La question est de connaître la probabilité qu'il y ait au plus deux boîtes défectueuses dans le lot. On cherche donc :

$P(X_1 \leq 2) = P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2) = 0.05 + 0.149 + 0.224 = 0.42$

4/ On peut maintenant approcher la loi Binomiale B (10000 ; 0.006) par une loi Normale de paramètres :

a/ Moyenne m = n * p = 10000 x 0.006 = 60

Ecart type $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10000 * 0.006 * 0.994} = 7.72$

b/ On cherche $P(49.5 \leq Y \leq 70.5)$. La première étape est de transformer ces valeurs dans la loi Normale Centrée Réduite.

$P(49.5 \leq Y \leq 70.5) = P(\frac{49.5-60}{7.72} \leq Y \leq \frac{70.5-60}{7.72}) = P(-1.36 \leq t \leq 1.36)$. La relation est symétrique. On peut donc écrire qu'elle est égale à $2\Pi(1.36) - 1 = 2 * 0.9131 - 1 = 0.8262$

c/ La probabilité qu'il y ait entre 50 et 70 boîtes défectueuses dans le lot de 10000 boîtes vient d'être calculée ci-dessus. En effet, le calcul entre 49.5 et 70.5 provient de l'élargissement de l'intervalle en raison de l'application de la correction de continuité. En effet, cette correction doit être appliquée lorsqu'on réalise l'approximation d'une loi discrète (ici la Loi Binomiale) par une loi Continue (la Loi Normale).

Ainsi, la probabilité de trouver entre 50 et 70 boîtes défectueuses est de 0.83 (résultat approché à 0.01)

Important : Ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

PARTIE B :

1/ La meilleure estimation ponctuelle de p est de 85/100 = 0.85.

2/ Nous devons maintenant calculer l'intervalle de confiance avec le coefficient de 95 %.
Ce seuil de confiance va nous permettre de déterminer t à l'aide de la relation $\Pi(t)=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.05}{2}=0.975$. Par lecture indirecte de la table de la loi Normale Centrée Réduite, on trouve que $\Pi(t)=0.975=\Pi(1.96)$ donc t=1.96 (valeur connue par ailleurs)

L'intervalle de confiance de p au seuil de confiance de 95 % est donc de :

$$\left[p-t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};p-t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]=\left[0.85-1.96\sqrt{\frac{0.85*0.15}{100}};0.85+\sqrt{\frac{0.85*0.15}{100}}\right]=[0.78;0.92]$$

p est donc compris entre 0.78 et 0.92 au risque de 5%

3/ L'affirmation que p est compris dans cet intervalle de confiance est fausse !! En effet, un intervalle de confiance permet d'encadrer une valeur à un niveau de confiance donné ! Dans notre cas, on peut simplement dire que p est compris entre 0.78 et 0.92 au seuil de confiance de 95 %. Il y a donc 5 % de risque que p ne soit pas dans cet intervalle.

Exercice 2 :

PARTIE A :

1/ On détermine la solution de l'équation différentielle du premier ordre sans second membre : a=1 ; b=1. La solution est donc $Y_{SSM}(x) = C\, e^{-x}$ où C est une constante réelle.

2/ Afin de vérifier que f(x) est une solution particulière de (E), calculons f '(x) :

$f'(x) = (uv)' = u'v + uv'$ avec $u = -x^2$ et $v = e^{-x}$

$= -2x\,e^{-x} + (-x^2)(-e^{-x})$

$= -2x\,e^{-x} + x^2 e^{-x}$

On remplace maintenant dans (E) : $f'(x) + f(x) = -2x\,e^{-x} + x^2 e^{-x} + (-x^2 e^{-x}) = -2x\,e^{-x}$

L'équation différentielle (E) est vérifiée. Par conséquent, f(x) est bien une solution particulière de (E).

3/ L'ensemble des solutions de (E) est donné par $Y_{SG}(x) = Y_{SSM}(x) + f(x) = C\,e^{-x} - x^2 e^{-x}$

PARTIE B :

1/ On remarque que si C = 1 alors $Y_{SG}(x) = g(x)$. Par conséquent, g est solution de (E). On peut d'ailleurs vérifier ce résultat par le calcul en déterminant g '(x) et en remplaçant dans (E). Même raisonnement que la question 2/ de la partie A.

Important : Ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

2/ La question est intéressante et nécessite qu'on se ramène à la définition d'une intégrale.

$\int_0^1 g(x)dx = [h(x)]_0^1 = h(1) - h(0)$ car h est une primitive de la fonction g.

Ainsi, on détermine par lecture graphique h(1) et h(0) : h(1) = 1.5 ; h(0) = 1

$\int_0^1 g(x)dx = h(1) - h(0) = 1.5 - 1 = 0.5$ ua

3/ a/ On va réaliser une intégration par partie pour calculer l'intégrale demandée. Il s'agit d'un polynôme de degré 1 couplé à une exponentielle. On pose donc pour u(x) le polynôme et pour v '(x) l'exponentielle.

$u(x) = x \qquad v'(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) = -e^{-x}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-x}dx &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\
&= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx \\
&= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \left[e^{-x}\right]_0^1 \\
&= (-1e^{-1} - 0) - (e^{-1} - 1) \\
&= 1 - 2e^{-1}
\end{aligned}$$

C'est bien le résultat énoncé dans le sujet.

b/ On va utiliser la relation : $g(x) = -g'(x) - 2xe^{-x}$ et on va intégrer celle-ci :

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 -g'(x)dx - \int_0^1 2xe^{-x}dx = [-g(x)]_0^1 - 2\int_0^1 xe^{-x}dx$$

On arrive ainsi en utilisant le résultat de la question a/

$$\int_0^1 g(x)dx = g(0) - g(1) - 2(1 - 2e^{-1})$$

Or $g(0) = 1 - 0 = 1$ et $g(1) = e^{-1} - e^{-1} = 0$

$$\text{Soit } \int_0^1 g(x)dx = 1 - 2 + 4e^{-1} = 4e^{-1} - 1$$

Important : Ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Cette aire est exprimée en unités d'aire. On utilise l'échelle pour donner la valeur exacte en cm² : une unité sur x mesure 1.8 cm sur le graphique ; une unité sur y mesure 1.2 cm sur le graphique.

ATTENTION : Le sujet peut être à un format réduit ou agrandi et dans ce cas, les mesures ne sont plus les mêmes.

Pour avoir l'aire en cm², il nous suffit de multiplier le résultat trouvé précédemment par 1.2 x 1.8

Aire en cm² = $2.16\,(4\,e^{-1} - 1) = 8.64\,e^{-1} - 2.16$ cm²

Fin du sujet.