Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé du sujet de Mathématiques

BTS Opticien Lunetier Session 2009

Proposé par Olivier BONNETON

Exercice 1 : (10 points)

Partie A : Modèle discret

1. Nous allons déterminer les premiers termes de cette suite arithmétique. Rappelons que si la raison est r, on a la relation : $p_{n+1} = p_n + r$

Ainsi, p1 = p0 + r = 50 + 20 = 70 p2 = p1 + r = 70 + 20 = 90

p3 = p2 + r = 90 + 20 = 110 p4 = p3 + r = 110 + 20 = 130

2. a) D'après l'énoncé, toute augmentation de 20 euros entraîne une diminution de 20 % du nombre de clients. Le coefficient multiplicateur se calcule en utilisant la formule suivante : coef = 1- t/100. Ici une diminution de 20 % équivaut à un coefficient de 1 – 20/100 = 0.8. Cela signifie qu'à chaque augmentation du prix de 20 euros, le nombre de clients est multiplié par 0.8. D'où : $c_{n+1} = 0.8\ c_n$

On a donc une suite géométrique de raison q = 0.8 et de premier terme $c_0 = 10000$

2.b) La formule générale d'une suite géométrique est : $c_n = c_0 \times q^n$. Avec les paramètres précédents, on a : $c_n = 10000 \times (0.8)^n$

3.a) On complète le tableau suivant :

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
p_n	50	70	90	110	130
c_n	10000	8000	6400	5120	4096
r_n	500000	560000	576000	563200	532480

Remarque : r_n se calcule en faisant le produit de p_n par c_n

3.b) La meilleure recette pour l'entreprise OPTITAN est réalisée p_n = 90 euros d'après le tableau ci-dessus.

Partie B : Modèle continu

Section I

1.a) Nous avons à résoudre une Equation Différentielle Linéaire du Premier Ordre Sans Second Membre. La solution de cette équation est :

$y(x) = k\,e^{-f(x)}$ où f(x) est la primitive de b/ a et k une constante réelle.

Ici on a $y' + 20/100\,y = 0$ d'où $a = 1$ $b = 20/100$ $b/a = 20/100 = 0.2$

La primitive de b/a est : 0.2x

Donc la solution est : $y(x) = k\,e^{-0.2x}$ avec k une constante réelle

1.b) La condition initiale qui nous est donnée dans l'énoncé nous permet de trouver la constante k.

$C(0) = k\,e^{-0.2x0} = k\,e^{0} = k = 10000$

La solution C est par conséquent : $C(x) = 10000\,e^{-0.2x}$

2.a) Complétons le tableau de valeurs suivant :

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
c_n (Partie A)	10000	8000	6400	5120	4096
C(n) (Partie B)	10000	8187	6703	5488	4493
$C(n) - c_n$	0	187	303	368	397

2.b) L'écart le plus important entre les deux modèles est pour n = 4. Cet écart vaut alors 397 clients. Interprétation : Le modèle continu estime un plus grand nombre de clients potentiels que le modèle discret lorsque le prix unitaire augmente.

Section II

1.a) Nous allons maintenant étudier la fonction R(x) sur [0 , 4]. Calculons la dérivée de R(x). Elle est de la forme $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = 5 + 2x$ $v(x) = e^{-0.2x}$

$u'(x) = 2$ $v'(x) = -0.2\,e^{-0.2x}$

On a : $R'(x) = 2\,e^{-0.2x} + (5 + 2x)(-0.2\,e^{-0.2x})$

$= e^{-0.2x} (2 – 0.2 (5 + 2x))$

$= e^{-0.2x} (1 – 0.4 x)$

1.b) Nous allons maintenant étudier le signe de cette dérivée. Une exponentielle est toujours supérieure à zéro. Le signe de R'(x) est celui de (1 – 0.4 x). Il s'agit d'un polynôme du premier degré. On détermine avant tout sa racine :

$1 – 0.4 x = 0$

$1 = 0.4 x$

$x = 1 / 0.4 = 2.5$

Ensuite, nous savons que ce polynôme est du signe de a (ici a = - 0.4) à droite de la racine. Ainsi, sur [0 , 2.5], le polynôme, et par conséquent R'(x), est positif ou nul et sur [2.5 , 4], R'(x) est négatif.

Le tableau de variation peut maintenant être réalisé :

x	0		$x_0 = 2.5$		4
R'(x)		+	0	-	
R(x)	5	$\nearrow$	$10 e^{-0.5}$	$\searrow$	$13 e^{-0.8}$

Les valeurs exactes de R(0), R(2.5) et R(4) ont été calculées et placées dans le tableau de variation.

1.c) A l'aide de la calculatrice, on donne les valeurs approchées à 10^{-2} près :

R(2.5) = 6.07 R(4) = 5.84

On nous demande le nombre de solutions de l'équation R(x) = 6 dans [0 , 4] sans justification. Il y a 2 solutions : une sur [0 , 2.5] et une sur [2.5 , 4] puisque la fonction croît de 5 à 6.07 (arrondie) puis décroît de 6.07 (arrondie) à 5.84 (arrondie). Une démonstration plus rigoureuse ferait intervenir le théorème de la bijection à appliquer deux fois sur chacun des deux intervalles.

2.a) On admet, d'après l'énoncé, que la fonction R(x) est la recette correspondante en centaines de milliers d'euros au prix de vente unitaire du modèle de lunettes solaires. Nous avons vu que la recette maximale est pour la valeur de x_0, c'est-à-dire 2.5. Nous pouvons déterminer le prix correspondant à cette valeur : p = 50 + 20 x 2.5 = 100 euros.

La recette maximale arrondie à l'euro est : R(2.5) x 100 000 = 1 000 000 e $^{-0.5}$

= 606 531 euros.

2.b) Nous avons vu qu'il existait deux solutions à l'équation R(x) = 6, c'est-à-dire à une recette égale à 600 000 euros. Une de ces solutions est favorable à l'acheteur. Il s'agit bien entendu de celle située entre x = 0 et x = 2.5 . Elle correspond au prix unitaire le plus bas (prix entre 50 et 100 euros). La deuxième solution, dans l'intervalle [2.5 , 4], correspond à un prix unitaire plus élevé (prix entre 100 et 130 euros) et sera plus favorable au vendeur.

Exercice 2 : (10 points)

Partie A : Evénements indépendants

1. D'après l'énoncé, P(A) = 0.05 P (B) = 0.10

2. La probabilité qui nous est demandée est $P(A \cap B)$. Nous pouvons réaliser un arbre de probabilité ou utiliser tout simplement la formule liée à l'indépendance de deux événements : $P(A \cap B)$ = P(A) x P(B) = 0.05 x 0.10 = 0.005

3. « Au moins un des deux collyres » fait référence au OU inclusif, c'est-à-dire $P(A \cup B)$. On utilise la formule :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ = 0.05 + 0.10 – 0.005 = 0.145

Partie B : Loi binomiale et loi de Poisson

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale car nous avons n tirages indépendants (prélèvements au hasard et avec remise) et il y a deux issues possibles (expérience de Bernoulli) : soit la fiche indique une pression intraoculaire normale (succès p =0.10), soit ce n'est pas le cas (échec q = 0.90). Les paramètres sont B (n , 0.10).

2. On a la loi binomiale de paramètres B(10 , 0.10). On va calculer P(X=0) :

P(X=0) = $C_{10}^{0}(0.10)^{0}(0.90)^{10} =$ 0.35

3.a) On prend maintenant n=100 et on peut approcher la variable aléatoire X par une loi de Poisson de paramètre λ = n p = 100 x 0.1 = 10

3.b) On veut déterminer P(Y≤3). Comme λ=10, nous ne sommes pas obligés d'appliquer la formule de Poisson. Nous allons utiliser la table de Poisson fournie. On ajoute les différentes probabilités dans la colonne λ=10 pour Y comprise entre 0 et 3 :

P(Y≤3) = 0.000 + 0.000 + 0.002 + 0.008 = 0.010

Partie C : Loi normale

Z suit une loi normale de paramètres m=19 et σ=2. On va calculer P(15 ≤ Z ≤ 23). Il faut dans un premier temps passer dans la loi normale centrée réduite N(0 , 1). On transforme les valeurs : P(15 ≤ Z ≤ 23) = $P(\frac{15-19}{2} \le t \le \frac{23-19}{2})$

= P (-2 ≤ t ≤ 2)

= 2 Π (2) – 1

= 2 x 0.9772 – 1

= 0.95

On utilise la relation suivante :

P (-a ≤ t ≤ +a) = 2 Π (a) – 1

La probabilité que la variable aléatoire Z soit comprise entre 19 et 23 est de 0.95

Partie D : Test d'hypothèse

1. Nous allons déterminer la valeur du nombre réel h positif tel que P (-h ≤ D ≤ h)=0.95

Transformons les valeurs dans la loi normale centrée réduite N(0 , 1) :

$$P(\frac{-h-0}{\sigma} \le t \le \frac{h-0}{\sigma}) = 0.95$$

$$P(\frac{-h}{\sigma} \le t \le \frac{h}{\sigma}) = 0.95$$

$$2\Pi(\frac{h}{\sigma}) - 1 = 0.95$$ avec $\sigma = \sqrt{\frac{25^2+20^2}{200}}$

$$2\Pi(\frac{h}{\sigma}) = 1.95$$

$$\Pi(\frac{h}{\sigma}) = \frac{1.95}{2} = 0.975$$

On réalise ensuite une lecture indirecte dans la table N(0,1) : 0.975 = Π (1.96)

Ainsi, on en déduit que $\frac{h}{\sigma} = 1.96$ d'où h = 1.96 x σ = $1.96\sqrt{\frac{25^2+20^2}{200}} = 4.44$

2. Donnons du sens au calcul précédent en énonçant la règle de décision :

Nous venons de calculer le nombre réel h, soit la valeur maximale tolérée de la différence au seuil de confiance de 95 %.

En d'autres termes, si la différence des moyennes observées entre l'échantillon du fichier 1 et l'échantillon du fichier 2 est inférieure en valeur absolue à 4.44, alors on conservera l'hypothèse H_0 au risque de 5 %.

Si l'écart entre les deux moyennes n'est pas dans l'intervalle [-4.44 , +4.44] alors, on rejette H_0 et on accepte H_1 toujours au risque de 5 %. Dans ce cas, cela signifie qu'il existe effectivement une différence significative entre la moyenne des pressions systoliques des patients atteints de glaucome et celle des patients non atteints au seuil de confiance de 95 %.

3. La différence entre les deux échantillons est de D = 133 – 130 = 3. Cette différence est comprise dans l'intervalle [-4.44 , +4.44]. Ainsi, on conserve H_0 au risque de 5% et on peut conclure de ce test qu'il n'existe pas de différence significative au seuil de confiance de 95 % entre la moyenne des pressions systoliques des patients atteints de glaucome et celle des patients non atteints.

Fin du corrigé.