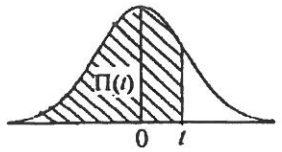
c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$

BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2010

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Matériel autorisé :

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.
(Circulaire n° 99 – 186 du 16/11/1999.)

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6,
dont une annexe à rendre avec la copie.

Un formulaire de 3 pages est joint au sujet.

BTS OPTICIEN LUNETIER		SESSION 2010
CODE : OLMAT	DUREE : 2H	Coefficient : 2
EPREUVE DE MATHEMATIQUE		Page 1/6

EXERCICE 1 (11 points)

Les deux parties A et D peuvent être traitées indépendamment des parties B et C.

A. Ajustement affine

Une entreprise souhaite lancer un nouveau produit sur le marché. Une enquête statistique effectuée avant le lancement auprès des consommateurs potentiels a permis d'établir le tableau suivant, où x désigne le prix unitaire exprimé en euros et y la quantité demandée, exprimée en milliers d'unités.

x	40	50	60	70	80	90	100
y	66	50	37	26	16	8	0

1° Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées seront à arrondir à 10^{-3}.

$t=\ln\left(\dfrac{x}{100}\right)$	$-0{,}916$						
y	66	50	37	26	16	8	0

2° Donner une équation de la droite de régression de y en t, obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = at + b$, où a et b sont à arrondir à l'unité.
(Pour cette question, on utilisera les fonctions de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas demandé).

3° En déduire une expression de y en fonction de x, selon cet ajustement.

B. Étude de fonctions et calcul intégral

On considère les fonction f et g définies sur l'intervalle $I = [40, 100]$ par :

$$f(x) = -72\ln(0{,}01x) \quad \text{et} \quad g(x) = 72\ln(0{,}1x - 3).$$

Les courbes représentatives de f et de g, tracées dans un repère orthogonal, sont fournies en annexe.

1° Démontrer que f est décroissante sur I et que g est croissante sur I.

2° Démontrer que, comme le suggère le graphique, pour tout x de I, $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$.

3° a) Résoudre, algébriquement, dans I l'équation $f(x) = g(x)$.
b) Vérifier graphiquement le résultat de la question précédente, en faisant apparaître les traits de construction sur la figure donnée en annexe.

4° a) Hachurer, sans justification, la partie du plan dont l'aire, exprimée en unités d'aire, est égale à l'intégrale $A = \int_{50}^{100} f(x)\,dx$.
b) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle I par $F(x) = 72x\,[1 - \ln(0{,}01x)]$ est une primitive de f sur l'intervalle I.
c) En déduire la valeur exacte de A, puis une valeur approchée arrondie à l'unité.

d) Développements limités

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t) \qquad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES*

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS OPTICIEN-LUNETIER

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$ $\qquad$ $\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; $\quad$ si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; $\quad$ si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$ $\qquad$ Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
e^t	e^t	Arc sin t	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
t^α $(\alpha \in \mathbb{C})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	Arc tan t	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

C. Application de la partie B

La demande est la quantité de produit, exprimée en milliers d'unités, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x euros. On admet que la fonction f, étudiée dans la partie B, modélise la demande.
L'offre est la quantité de produit, exprimée en milliers d'unités, que l'entreprise est prête à vendre au prix unitaire de x euros. On admet que la fonction g, étudiée dans la partie B, modélise l'offre.

1° On appelle prix d'équilibre le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales. Quel est ce prix d'équilibre ?

2° Donner une valeur approchée, à un millier d'unités près, de la demande correspondant au prix d'équilibre.

Commentaire : l'aire A représente, en milliers d'euros, la somme que les consommateurs sont prêts à payer collectivement pour l'achat de ce produit si son prix unitaire est compris entre 50 et 100 euros.

D. Étude de suites

L'entreprise commercialise le produit et décide, chaque année, d'adapter son offre à la demande de l'année précédente en utilisant le modèle des suites étudiées dans cette partie.
Pour tout entier naturel n, on note :

- O_n la quantité de produit, exprimée en milliers d'unités, que l'entreprise met sur le marché l'année de rang n (c'est l'offre cette année-là) ;
- D_n la quantité de produit, exprimée en milliers d'unités, que les consommateurs achètent l'année de rang n (c'est la demande cette année-là) ;
- p_n le prix unitaire, exprimé en euros, du produit l'année de rang n.

On admet que $p_0 = 50$ et que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} O_{n+1} = \dfrac{1}{2}D_n + 20 \\ D_n = -p_n + 100 \\ O_n = D_n \end{cases}.$$

1° Montrer que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + 30$.

2° Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = p_n - 60$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n, puis p_n, en fonction de n.

c) En déduire la limite p de la suite (p_n).

Commentaire : à long terme, p est le prix unitaire du produit sur le marché.

EXERCICE 2 (9 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Loi normale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Une machine remplit des flacons de produit de nettoyage pour lentilles de contact. Dans la production d'une journée, on prélève au hasard un flacon. On désigne par V la variable aléatoire qui, à chaque flacon prélevé, associe le volume de produit contenu dans ce flacon, exprimé en millilitres.

1° On suppose que V suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 4. Calculer la probabilité que le volume de produit contenu dans le flacon prélevé soit compris entre 245 et 255 millilitres.

2° Le réglage de la machine est modifié de façon que 95 % des flacons contiennent entre 245 et 255 millilitres de produit. On suppose qu'après réglage, la variable aléatoire V suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type σ. Calculer σ.

B. Probabilités conditionnelles, loi binomiale et loi de Poisson

Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse a, b, c, d est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Si le total est négatif, la note pour cette partie est ramenée à 0.

On admet qu'à l'issue du remplissage, 95 % des flacons sont remplis correctement, et on procède à un contrôle. Cependant, le contrôle n'est pas parfait : 4 % des flacons remplis correctement sont refusés, et 4 % des flacons mal remplis sont acceptés.
On prélève au hasard un flacon à l'issue du contrôle dans un stock important.
On appelle A l'événement : « le flacon est accepté ».
On appelle C l'événement : « le flacon est correctement rempli ».

1° La probabilité que le flacon soit rempli correctement et refusé est :

Réponse *a*	Réponse *b*	Réponse *c*	Réponse *d*
$P(C \cup \overline{A})$	$P(C) \times P(\overline{A})$	0,04	$0{,}04 \times 0{,}95$

On admet que la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle sur un flacon tiré au hasard dans ce stock à l'issue du contrôle est 0,04. On prélève un échantillon de 50 flacons à l'issue du contrôle. La quantité de flacons est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque échantillon de 50 flacons ainsi prélevé, le nombre d'erreurs de contrôle dans l'échantillon.

2° La valeur arrondie à 10^{-3} de la probabilité $P(X = 1)$ est :

Réponse *a*	Réponse *b*	Réponse *c*	Réponse *d*
0,04	0,005	0,271	$1 - 0{,}96^{50}$

3° La probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs de contrôle dans l'échantillon, arrondie à 10^{-2}, est :

Réponse *a*	Réponse *b*	Réponse *c*	Réponse *d*
0,40	0,32	0,60	0,68

4° On approche la loi suivie par X par une loi de Poisson. Soit Y une variable aléatoire suivant cette loi de Poisson. Avec la précision de la table, la probabilité $P(Y \leq 4)$ est :

Réponse *a*	Réponse *b*	Réponse *c*	Réponse *d*
0,090	0,857	0,947	0,628

C. Test d'hypothèse

Un site de vente par correspondance commercialise ces flacons. À la suite d'une série de réclamations, le gestionnaire du site décide de mettre en oeuvre un test unilatéral, pour décider si, au seuil de signification de 5 %, le volume moyen des flacons qui lui sont livrés est inférieur à 250 millilitres.
On note Z la variable aléatoire qui, à tout flacon prélevé au hasard dans la livraison, associe le volume de liquide contenu, exprimé en millilitres. La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type 2,5.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 25 flacons prélevés dans la livraison, associe la moyenne des volumes de liquide contenus dans les flacons de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 250$.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu < 250$.
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1° Sous l'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 0,5.

On admet également que : $P(\overline{Z} \geq 249{,}2) = 0{,}95$. **Ce résultat n'a pas à être démontré.**
Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2° Le gestionnaire prélève un échantillon aléatoire de 25 flacons et observe que, pour cet échantillon, le volume moyen de liquide est $\overline{x} = 249{,}4$ millilitres.
Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que le volume moyen des flacons livrés est inférieur à 250 millilitres ?

ANNEXE À COMPLÉTER PUIS À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 1

Questions *B*. 3° b) et *B*. 4° a).