Corrigé de l'épreuve de Mathématiques du BTS OL 2010

EXERCICE 1

A.Ajustement affine

1°

$t=\ln(\frac{x}{100})$	-0,916	-0,693	-0,511	-0,357	-0,223	-0,105	0
y	66	50	37	26	16	8	0

2°

Une équation de la droite de régression de y en t, obtenue par la méthode des moindres carrés est :

y = -72t + 0 soit y = -72t

3°

Comme $t=\ln(\frac{x}{100})$, $y=-72\ln(\frac{x}{100})$ soit $y=-72\ln(0{,}01x)$

B.Etude de fonctions et calcul intégral

1°

On détermine la fonction f' dérivée de la fonction f sur I :

$$f'(x)=-72\times\frac{0{,}01}{0{,}01x}$$

$$f'(x)=-\frac{72}{x}$$

Sur I, x $\geq$ 40 donc f'(x) < 0 sur I.

La fonction f est donc décroissante sur I.

On détermine la fonction g' dérivée de la fonction g sur I :

$$g'(x)=72\times\frac{0{,}1}{0{,}1x-3}$$

$$g'(x)=\frac{7{,}2}{0{,}1x-3}$$

Sur I, $x \geq 40$ donc $0{,}1x - 3 \geq 1$ donc $g'(x) > 0$ sur I.

La fonction g est croissante sur I.
2°
Sur I,
$x \geq 40$
$0{,}1x \geq 4$
$0{,}1x - 3 \geq 1$
$\ln(0{,}1x - 3) \geq 0$
$72\ln(0{,}1x - 3) \geq 0$
$g(x) \geq 0$

Sur I,
$x \leq 100$
$0{,}01x \leq 1$
$\ln(0{,}01x) \leq 0$
$-72\ln(0{,}01x) \geq 0$
$f(x) \geq 0$

Pour tout x de I, $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$

3°

a)

On résout $f(x) = g(x)$

$$-72\ln(0{,}01x) = 72\ln(0{,}1x - 3)$$
$$-\ln(0{,}01x) = \ln(0{,}1x - 3)$$
$$\ln(0{,}01x) + \ln(0{,}1x - 3) = 0$$
$$\ln[0{,}01x(0{,}1x - 3)] = 0$$
$$0{,}01x(0{,}1x - 3) = 1$$
$$0{,}001x^2 - 0{,}03x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-0{,}03)^2 - 4 \times 0{,}001 \times (-1) = 0{,}0049$$

$$x_1 = \frac{-(-0{,}03) - \sqrt{0{,}0049}}{2 \times 0{,}001} = -20 \text{ et } x_2 = \frac{-(-0{,}03) + \sqrt{0{,}0049}}{2 \times 0{,}001} = 50$$

Sur I, l'équation a pour solution unique $x = 50$

b)

Voir Annexe.
On vérifie bien que le point d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g a pour abscisse $x = 50$.

4°

a)

Voir annexe.
Il s'agit de l'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations x = 50 et x = 100.

b)

On vérifie que F'(x) = f(x)

$F'(x) = 72[1 - \ln(0{,}01x)] + 72x(-\frac{0{,}01}{0{,}01x})$

$F'(x) = 72 - 72\ln(0{,}01x) - 72$

$F'(x) = -72\ln(0{,}01x)$

$F'(x) = f(x)$

La fonction F est bien une primitive de la fonction f sur I.

c)

$A = \int_{50}^{100} f(x)dx$

$A = F(100) - F(50)$

$A = 72 \times 100[1 - \ln(0{,}01 \times 100)] - 72 \times 50[1 - \ln(0{,}01 \times 50)]$

$A = 7200 - 3600(1 - \ln 0{,}5)$

$A = 7200 - 3600 + 3600\ln 0{,}5$

$A = 3600 + 3600\ln 0{,}5$ u.a. ou $A = 3600(1 + \ln 0{,}5)$ u.a. ou $A = 3600(1 - \ln 2)$ u.a.

$A \approx 1105$ u.a.

C.Application de la partie B

1°

Le prix d'équilibre est le prix pour lequel f(x) = g(x)

Le prix d'équilibre est d'environ 50 euros. (d'après B.3°)

2°

$f(50) = -72\ln(0{,}01 \times 50) \approx 50$

La demande correspondant au prix d'équilibre est d'environ cinquante milliers d'unités.

D.Etudes de suites

1°

Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} D_{n+1} = \frac{1}{2} D_n + 20 \\ D_n = -p_n + 100 \end{cases}$$

La 2ème équation donne $D_{n+1} = -p_{n+1} + 100$

Dans la 1ère équation on remplace D_{n+1} et D_n par leur expression et on obtient :

$$-p_{n+1} + 100 = \frac{1}{2}(-p_n + 100) + 20$$
$$-p_{n+1} + 100 = -\frac{1}{2} p_n + 50 + 20$$
$$-p_{n+1} = -\frac{1}{2} p_n - 30$$
$$p_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + 30$$

2°

a)

Comme $u_n = p_n - 60$ on a $u_{n+1} = p_{n+1} - 60$

Donc $u_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + 30 - 60$ (car $p_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + 30$)

$u_{n+1} = \frac{1}{2} p_n - 30$

$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 60) - 30$ (car $p_n = u_n + 60$)

$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 30 - 30$

$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$

La suite (u_n) est bien une suite géométrique (de premier terme $u_o = p_o - 60 = 50 - 60 = -10$ et) de raison $q = \frac{1}{2}$

b)

Comme, la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_o = -10 et de raison q = $\frac{1}{2}$

$u_n = u_0 \times q^n$

$u_n = -10 \times (\frac{1}{2})^n$

$u_n = \frac{-10}{2^n}$

Comme $p_n = u_n + 60$, $p_n = \frac{-10}{2^n} + 60$

c)

$\lim_{n \to +\infty} p_n = 60$ car $\lim_{n \to +\infty} \frac{-10}{2^n} = 0$

La limite de la suite (p_n) est donc p = 60

EXERCICE 2

A.Loi normale

1°

La variable aléatoire V suit la loi normale de moyenne $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 4$

$$P(245 \leq V \leq 255) = 2P(V \leq 255) - 1 = 2\Pi(\frac{255-250}{4}) - 1 = 2\Pi(1{,}25) - 1 = 2 \times 0{,}8944 - 1 = 0{,}79$$

La probabilité que le volume de produit contenu dans le flacon prélevé soit compris entre 245 et 255 millilitres est d'environ 0,79.

2°

La variable aléatoire V suit la loi normale de moyenne $\mu = 250$ et d'écart type σ inconnu

$$P(245 \leq V \leq 255) = 0{,}95$$

$$2\Pi(\frac{255-250}{\sigma}) - 1 = 0{,}95$$

$$2\Pi(\frac{5}{\sigma}) = 1{,}95$$

$\Pi(\frac{5}{\sigma}) = 0{,}975$

par lecture inverse de la table de la loi normale centrée réduit, on a

$\frac{5}{\sigma} = 1{,}96$

$\sigma = \frac{5}{1{,}96}$

$\sigma = 2{,}55$

La variable aléatoire V suit la loi normale de moyenne $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 2{,}55$

B.Probabilités conditionnelles, loi binomiale et loi de Poisson

1°

Réponse d : $P(C \cap \overline{A}) = P(C) \times P(\overline{A}/C) = 0{,}95 \times 0{,}04$

2°

Réponse c : $P(X = 1) = C_{50}^{1} \times 0{,}04^{1} \times 0{,}96^{49} = 0{,}271$

3°

Réponse c :

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - C_{50}^{0} \times 0{,}04^{0} \times 0{,}96^{50} - C_{50}^{1} \times 0{,}04^{1} \times 0{,}96^{49} = 0{,}60$

4°

Réponse c : la variable aléatoire Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 50 \times 0{,}04 = 2$

$P(Y \leq 4) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4)$

$P(Y \leq 4) = 0{,}135 + 0{,}271 + 0{,}271 + 0{,}180 + 0{,}090 = 0{,}947$

C.Test d'hypothèse

1°

La règle de décision de ce test est la suivante :

l'hypothèse H_0 est conservée au seuil de risque de 5 % si la moyenne de l'échantillon est supérieure à 249,2 ml,

si la moyenne n'est pas supérieure à 249,2 ml, dans ce cas, on rejette H_0 et on accepte H_1.

2°

Le volume moyen de liquide de l'échantillon est 249,4 ml supérieure à 249,2 ml.

On ne peut pas conclure qu'au seuil de signification de 5 % le volume moyen des flacons livrés est inférieur à 250 ml.

ANNEXE À COMPLÉTER PUIS
À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 1
Questions *B*. 3° b) et *B*. 4° a).