

Probabilités

1 Introduction - Rappels

1.1 Aperçu historique succinct

Les probabilités étudient les phénomènes dont les résultats sont par nature impossibles à prévoir avec exactitude. Par exemple, le résultat du lancer d'un dé amène avec certitude une face et une seule ; mais il est impossible de dire avec certitude quelle sera cette face. De même, la distribution de cartes pour une partie de belote ou de tarots amène à chaque joueur une levée d'un certain nombre de cartes, parfaitement défini dans chaque jeu ; mais on ne peut pas prévoir exactement quelles seront les cartes obtenues dans une levée.

Les probabilités sont le domaine d'études de telles situations. Elles sont nées des travaux de FERMAT et PASCAL au XVII^e siècle, inspirée par la modélisation des problèmes liées au développement des premières compagnies d'assurance. Au début du XX^e siècle, elles ont été formalisées par le Russe KOLMOGOROV. Elles sont devenues depuis une branche très active de la recherche mathématique actuelle.

1.2 Vocabulaire des probabilités

1.2.1 Expérience aléatoire - Univers des possibles

Définition 1 Une expérience aléatoire est un processus dont le résultat n'est pas exactement prévisible, parmi un ensemble de résultats possibles prévisibles. Cet ensemble de résultats prévisibles est appelé l'univers ; on le note Ω .

Le résultat réellement obtenu après une expérience aléatoire est appelé une issue ou une éventualité.

Exemple 1 Dans le lancer d'un dé, l'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. C'est l'ensemble formé de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire que constitue le lancer du dé.

1.2.2 Événements d'une expérience aléatoire

Définition 2 Un événement associé à une expérience aléatoire est une partie de l'univers correspondant à cette expérience.

Un événement élémentaire est un événement qui ne comprend qu'une seule issue (ou une seule éventualité).

Exemple 2 Lors du lancer d'un dé, l'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Un événement élémentaire est l'obtention de la face numérotée 6 (par exemple). Un autre événement élémentaire est l'obtention de la face numérotée 2. Un événement non-élémentaire est par exemple l'événement suivant : "Le résultat du lancer est un numéro pair". Cet événement peut aussi se décrire de la manière suivante : "Le résultat du lancer est 2 ou 4 ou 6". Il est composé des événements élémentaires suivants : "Obtenir 2" ou "Obtenir 4" ou "Obtenir 6".

Définition 3 L'événement composé d'aucune issue, est appelé événement impossible. Il est noté $\emptyset$.

L'événement composé de toutes les issues est appelé événement certain.

Exemple 3 Lors du lancer d'un dé, les événements "Obtenir un 7", ou encore "Obtenir un Pique" sont des événements impossibles.

Par contre, les événements "Obtenir un entier" ou encore "obtenir un nombre compris entre 1 et 6" sont des événements certains.

Exercice 1 Pour les expériences aléatoires suivantes, déterminer à chaque fois l'univers de l'expérience.

- On lance une pièce de monnaie, et on observe le côté "Pile", ou le côté "Face".
- On écrit au hasard un nombre à deux chiffres, en choisissant ces chiffres dans l'ensemble $\{1; 2; 3\}$.
- On lance un dé dont une face porte un 6, deux faces un 1 et trois faces un 2.
- Dans un tiroir, on a placé 2 paires de chaussettes rouges, et 3 paires de chaussettes bleues. Mal réveillé le matin, on choisit au hasard une paire de chaussettes.

- e) Dans un tiroir, on a placé 2 paires de chaussettes rouges, et 3 paires de chaussettes bleues. Toujours mal réveillé le matin, on choisit au hasard deux paires de chaussettes.
- f) Dans un tiroir, on a placé 2 paires de chaussettes rouges, 1 paire de chaussettes vertes et 3 paires de chaussettes bleues. Éternellement mal réveillé le matin, on choisit au hasard une paire de chaussettes.
- g) Dans un tiroir, on a placé 2 paires de chaussettes rouges, 1 paire de chaussettes vertes et 3 paires de chaussettes bleues. Encore et toujours mal réveillé le matin, on choisit au hasard deux paires de chaussettes.
- h) Dans un tiroir, on a placé 2 paires de chaussettes rouges, 1 paire de chaussettes vertes et 3 paires de chaussettes bleues. Comme d'habitude, on choisit au hasard trois paires de chaussettes.

Exercice 2 Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, on demande de citer :

- un événement élémentaire ;
- un événement comportant plusieurs éventualités ;
- un événement certain ;
- un événement impossible.

- a) On choisit au hasard deux stylos parmi quatre stylos de couleur rouge, verte, noire et bleue.
- b) Un singe tape successivement sur deux touches de chiffres d'une calculatrice. On note le nombre ainsi obtenu.
- c) Dans une urne, il y a 2 boules vertes et 3 boules rouges. On tire 3 boules sans remise.
- d) Dans une urne, il y a 2 boules vertes et 3 boules rouges. On tire 3 boules, avec remise de la boule tirée après chaque tirage.

Exercice 3 On lance dix jetons numérotés de 1 à 10 dans un sac, et on tire au hasard un seul jeton. On appelle :

- A l'événement "le jeton tiré porte un nombre pair" ;
- B l'événement "le jeton tiré porte un nombre multiple de 3".

1°) Peut-on affirmer que $A = \{2; 4; 8; 10\}$?

2°) Peut-on affirmer que $B = \{1; 3; 6; 9\}$?

Définition 4 Pour tout événement A , il existe un événement $\bar{A}$ appelé événement contraire de A . $\bar{A}$ est constitué des éventualités de l'univers de l'expérience qui ne font pas partie de A .

Exemple 4 On lance un dé à 6 faces.

Si A est l'événement "Obtenir 3", alors $\bar{A} = \{1; 2; 4; 5; 6\}$.

Si A est l'événement "Obtenir un nombre pair", alors l'événement $\bar{A}$ est "Obtenir un nombre impair".

Si A est l'événement "Obtenir un nombre", alors l'événement $\bar{A}$ est "Ne pas obtenir de nombre du tout".

Proposition 1 i. Le contraire d'un événement $\bar{A}$, contraire d'un événement A , est l'événement A lui-même.
ii. L'événement certain et l'événement impossible sont contraires l'un de l'autre.

1.2.3 Opérations sur les événements

Définition 5 Si A et B sont deux événements d'un univers Ω donnée, on appelle réunion de A et B l'événement de Ω constitué des éventualités de A ou de B . On note $A \cup B$ la réunion de A et de B .

Exemple 5 On lance un dé à 6 faces, et on note la face obtenue. On appelle :

- A l'événement $\{1; 3; 5\}$;
- B l'événement $\{2; 4; 6\}$;
- C l'événement $\{1; 2; 3\}$.

La réunion de A et de B est l'événement $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. La réunion de A et de C est l'événement $A \cup C = \{1; 2; 3; 5\}$. La réunion de B et de C est l'événement $B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 6\}$.

Remarque 1 Notons que, si A et B sont deux événements d'un univers Ω , on a :

$$A \cup B = B \cup A.$$

(autrement dit, la réunion est une opération commutative).

Définition 6 Si A et B sont deux événements d'un univers Ω donné, on appelle intersection de A et B l'événement de Ω constitué des éventualités communes de A et de B .

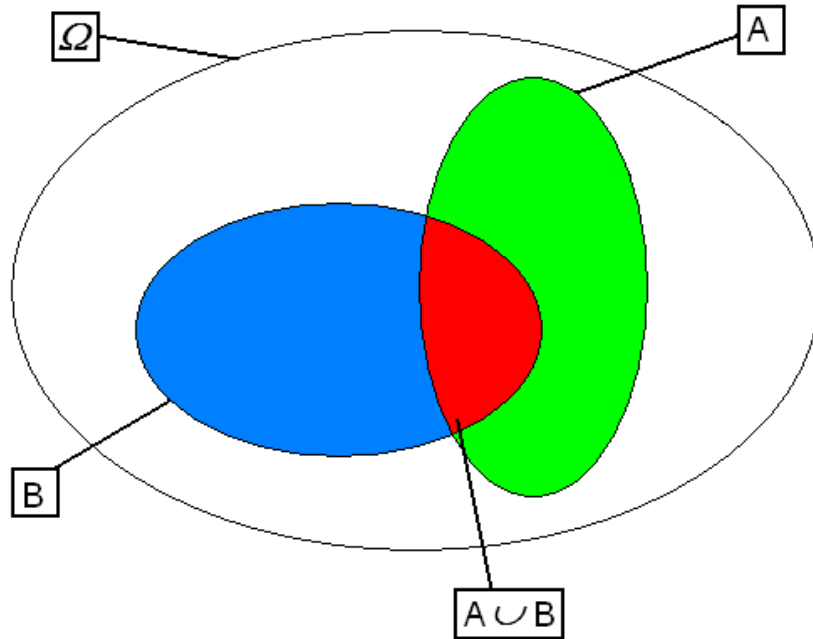


FIG. 1 – $A \cup B$ est l'ensemble colorié (en rouge, en vert ou en bleu)

Exemple 6 On lance un dé à 6 faces, et on note la face obtenue. On appelle :

- A l'événement $\{1; 3; 5\}$;
- B l'événement $\{2; 4; 6\}$;
- C l'événement $\{1; 2; 3\}$.

L'intersection de A et de B est l'événement $A \cap B = \emptyset$. L'intersection de A et de C est l'événement $A \cap C = \{1; 3\}$.
L'intersection de B et de C est l'événement (élémentaire) $B \cap C = \{2\}$.

Remarque 2 Notons que, si A et B sont deux événements d'un univers Ω , on a :

$$A \cap B = B \cap A.$$

(autrement dit, la réunion est aussi une opération commutative).

Définition 7 Deux événements A et B sont dits incompatibles lorsque leur intersection est l'événement impossible, autrement dit lorsqu'ils n'ont aucune éventualité en commun.

Exemple 7 On lance un dé à 6 faces. Les événements "Obtenir 3" et "Obtenir un nombre pair" sont incompatibles.

Proposition 2 Un événement et son contraire sont toujours des événements incompatibles.

Exercice 4 On considère un jeu de 32 cartes. On tire au hasard une carte parmi les 32. On appelle :

- T l'événement "Tirer un trèfle" ;
- K l'événement "Tirer un carreau" ;
- C l'événement "Tirer un coeur" ;
- P l'événement "Tirer un pique" ;
- A l'événement "Tirer une tête" ;
- R l'événement "Tirer un roi" ;

1°) Quelles sont les éventualités de T ? Combien A comporte-t-il d'éventualités ?

2°) a) Traduire par une phrase l'événement $R \cap T$.

b) Traduire par une phrase l'événement $K \cap A$.

3°) a) Traduire par une phrase l'événement $T \cup R$.

b) Traduire par une phrase l'événement $C \cup P$.

4°) Traduire, en utilisant des intersections ($\cap$) ou réunion ($\cup$) les événements suivants :

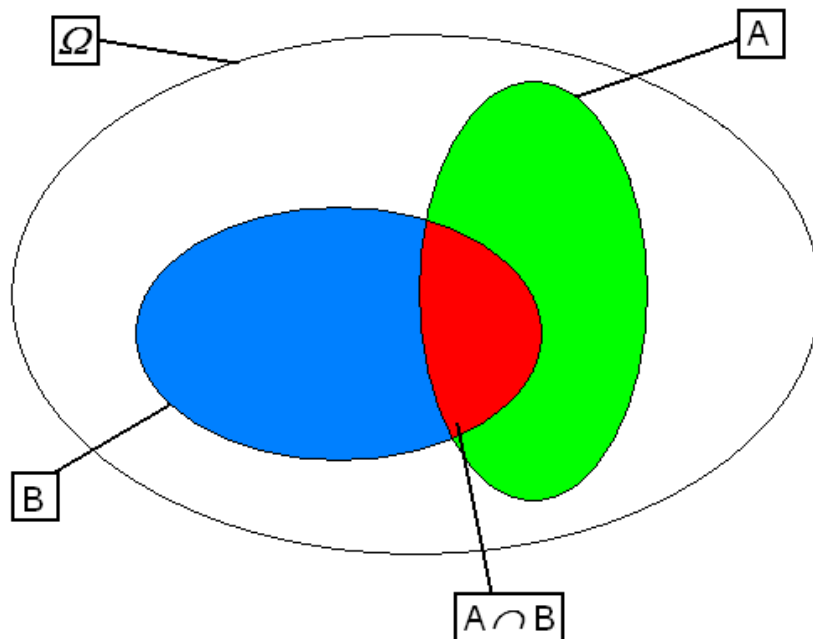


FIG. 2 – $A \cap B$ est l'ensemble en rouge

- La carte tirée est un carreau ou un pique ;
- La carte tirée est le roi de pique ;
- La carte tirée est une tête à coeur.

5°) Traduire par une phrase les événements suivants :

$\bar{A}$; $\bar{K}$; $\bar{R} \cap C$; $\bar{A} \cap K$; $\bar{T} \cap \bar{C}$.

6°) A l'aide des événements A , R , T , K , C et P , exprimer mathématiquement les événements suivants :

- La carte tirée n'est pas un roi ;
- La carte tirée n'est pas un pique ;
- La carte tirée est un roi différent du roi de pique ;
- La carte tirée n'est ni un pique ni un roi.

2 Calculs des probabilités

2.1 Définitions

Définition 8 Une probabilité est un nombre réel, compris entre 0 et 1, qui mesure le caractère plus ou moins probable d'un événement résultant d'une expérience aléatoire.

Par convention :

- l'événement le moins fréquent est l'événement impossible ; sa probabilité est 0.
- l'événement le plus fréquent est l'événement certain ; sa probabilité vaut 1.

2.2 Calcul des probabilités en cas d'équiprobabilité

Définition 9 On parle d'expérience aléatoire conduisant à une situation d'équiprobabilité lorsque chaque événement élémentaire peut être affecté de la même probabilité.

Ceci revient à dire que, dans la situation considérée, chaque issue élémentaire est aussi probable qu'une autre quelconque.

Exemple 8 On lance un dé à 6 faces. Si le dé est bien équilibré, on est dans une situation d'équiprobabilité. On place des boules dans une urne, toutes les boules étant de couleur différente, avant d'en retirer une. Supposer que les boules sont impossibles à distinguer au toucher revient à se placer dans une situation d'équiprobabilité.

Théorème 3 En cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A , partie d'un univers fini Ω , est le nombre réel, noté $\mathbb{P}(A)$, compris entre 0 et 1, qui se calcule par le rapport

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

où $\#A$ est le nombre d'éléments de A , et $\#\Omega$ le nombre d'éléments de Ω .

Exemple 9 On lance un dé à 6 faces bien équilibré. La probabilité de l'événement "Obtenir 5" est $\frac{1}{6}$; celle de l'événement "Obtenir un nombre pair" est $\frac{1}{2}$.

L'exemple et le théorème précédents montrent que le calcul de probabilités se ramène souvent à un problème de dénombrement : le tout est de savoir compter combien d'événements élémentaires comprennent l'univers des possibles et l'événement dont on cherche la probabilité. À ce titre, on verra dans un prochain paragraphe des méthodes de dénombrement possibles.

Exercice 5 On lance un dé à 6 faces bien équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ? un nombre impair ? une face numérotée 0 ?

Exercice 6 On lance deux dés à 6 faces bien équilibrés, et on ajoute les nombres obtenus sur chaque face.

- Quelle est la probabilité d'obtenir 8 ? et 4 ? et 36 ?
- Quelle est la somme la plus fréquente ?

2.3 Propriétés du calculs des probabilités

Le théorème suivant regroupe les propriétés des calculs de probabilités.

Proposition 4 On considère un univers Ω , sur lequel on envisage deux événements A et B . Alors

- Par définition, une probabilité est un nombre réel compris entre 0 et 1 ;
- La probabilité d'un événement certain est 1, la probabilité d'un événement impossible est 0 (autrement dit : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$) ;
- Si A est un événement dont l'événement contraire est $\bar{A}$, alors on a $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$;
- (Formule de l'union) On a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- Si A et B sont des événements incompatibles, alors on a : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;
- On a $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- (Formule des probabilités totales) On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$.

Remarque 3 Dans le cas d'une probabilité calculée en situation d'équiprobabilité, ces propriétés sont évidentes (et s'obtiennent par des raisonnements de dénombrement). On peut choisir de ne retenir que quelques unes de ces propriétés pour définir, en général, ce qu'est une probabilité (application de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0; 1]$, vérifiant certains axiomes). Ce n'est pas notre propos dans le cadre limité d'un cours de BTS.

Exercice 7 On considère un jeu de 32 cartes. On tire au hasard une carte parmi les 32. On appelle :

- T l'événement "Tirer un trèfle" ;
- K l'événement "Tirer un carreau" ;
- C l'événement "Tirer un coeur" ;
- P l'événement "Tirer un pique" ;
- A l'événement "Tirer une tête" ;
- B l'événement "Tirer un roi" ;

1°) Calculer les probabilités de chacun de ces événements.

2°) Quelle est la probabilité de l'événement $T \cap B$ et celle de l'événement $K \cap A$.

3°) Quelle est la probabilité de l'événement $T \cup B$ et celle de l'événement $C \cup P$.

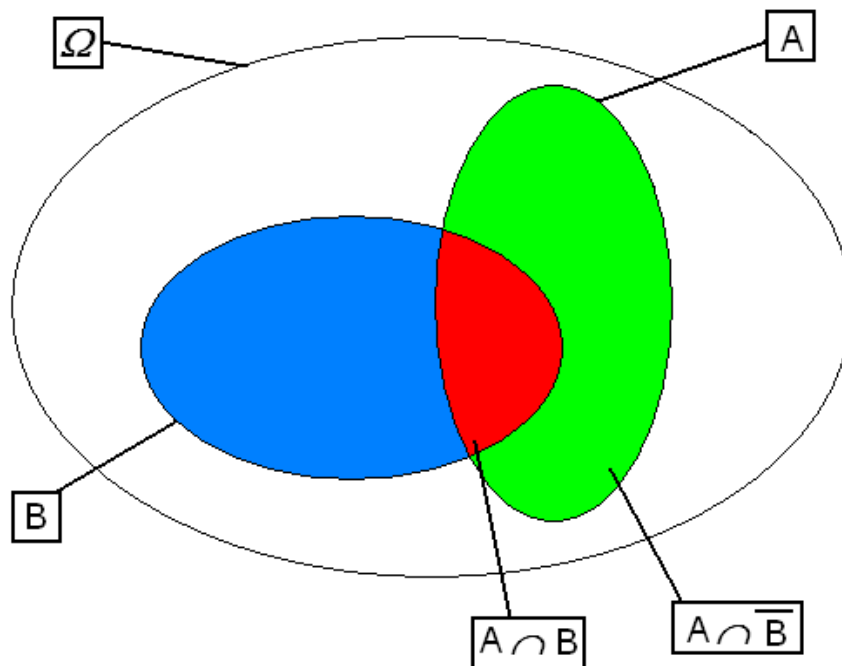


FIG. 3 – Illustration de la formule des probabilités totales

4°) Quelle est la probabilité des événements suivants :

- La carte tirée est un carreau ou un pique ;
- La carte tirée est le roi de pique ;
- La carte tirée est une tête à coeur ;
- $\bar{A}$;
- $\bar{K}$;
- $\bar{B} \cap C$;
- $\bar{A} \cap K$;
- $\bar{T} \cap \bar{C}$.
- La carte tirée n'est pas un roi ;
- La carte tirée n'est pas un pique ;
- La carte tirée est un roi différent du roi de pique ;
- La carte tirée n'est ni un pique ni un roi.

2.4 Le problème du dénombrement en calcul des probabilités

Ainsi que le montre le dernier exemple, le problème du calcul de probabilités se réduit en première analyse, à un problème de dénombrement (nombre des issues possibles, nombre des issues favorables). Les deux paragraphes qui suivent donnent une idée de deux méthodes courantes pour se tirer de ces situations de dénombrement, de manière artisanale. Les deux paragraphes suivants donnent des résultats théoriques qui s'appliquent à un grand nombre de situation pratiques.

2.4.1 Utilisation de tableaux des effectifs pour le dénombrement

Exercice 8 Voici les résultats d'un sondage effectué au début de l'année 1998 auprès de 1 000 personnes, à propos d'Internet :

- 40% des personnes interrogées déclarent être intéressées par Internet ;
- 35% des personnes interrogées ont moins de 25 ans et, parmi celles-ci, 80% déclarent être intéressées par Internet ;
- 30% des personnes interrogées ont plus de 50 ans et, parmi celles-ci, 85% ne sont pas intéressées par Internet.

1°) Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Intéressés par Internet	Non intéressés par Internet	Total
Moins de 25 ans		70	
De 25 à 50 ans			
Plus de 50 ans			
Total			1000

2°) On choisit au hasard une personne parmi les 1 000 interrogées. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :

A : "la personne interrogée est intéressée par Internet";

B : "la personne interrogée a moins de 25 ans".

a) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

b) Définir par une phrase l'événement contraire de B , puis calculer sa probabilité.

c) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$, puis calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$. En déduire $\mathbb{P}(A \cup B)$.

d) On sait maintenant que la personne interrogée n'est pas intéressée par Internet. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 50 ans ?

2.4.2 Utilisation d'arbres pour le dénombrement

Exercice 9 Benoît sait que le congélateur de la cuisine renferme cinq bâtons de crème glacée, de cinq parfums différents (vanille, chocolat, pistache, café, praliné).

Gourmand et insomniaque, il décide de se lever en pleine nuit, sans allumer la lumière, et de prendre, à tâtons et successivement, deux bâtons dans le congélateur.

Tous les choix sont équiprobables.

1°) À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de couples différents de bâtons qu'il peut ainsi obtenir.

2°) Ses parfums préférés sont vanille et café. Calculer les probabilités qu'il obtienne :

a) le bâton à la vanille, puis le bâton au café ;

b) les bâtons de ses parfums préférés dans un ordre quelconque ;

c) un seul de ses parfums préférés ;

d) aucun de ses parfums préférés.

Exercice 10 (Avec ou sans ordre ...)

1°) Une course de PMU voit 5 chevaux engagés. Combien de tiercés dans l'ordre peut-on composer ? et dans le désordre ?

2°) Mêmes questions avec 15 chevaux.

Remarque 4 La "technique de l'arbre" permet donc de dénombrer les situations pour lesquelles l'ordre de la liste constituant l'événement final auquel on s'intéresse a une importance.

Ainsi, dans le cas du tiercé, le recours à un arbre permet de dénombrer le nombre de d'arrivées possibles, en tenant compte de l'ordre (tiercé dans l'ordre). Si l'on souhaite dénombrer le nombre d'arrivée permettant de toucher le tiercé dans le désordre, il faut, à partir du résultat produit par l'arbre, regrouper certaines issues pour recomposer l'événement étudiée.

De même, dans le cas des glaces, le dénombrement à l'aide d'un arbre conduit à un résultat plus fin (on y distingue les issues selon l'ordre dans lequel les glaces arrivent), que l'on corrige par la suite.

2.4.3 Dénombrement des permutations

Exemple 10 On considère 4 pions de couleurs, respectivement verte (V), rouge (R), bleue (B) et noire (N). On souhaite aligner les pions les uns derrière les autres. De combien de manières différentes (par l'ordre des

couleurs) peut-on le faire ?

Un arbre permet de répondre à la question ; pour la première position, il y a 4 couleurs possibles. Pour la seconde, il n'y en a plus que 3 (pour chacune des 4 précédentes), la quatrième ayant été déjà utilisée. Pour la troisième position, il ne reste plus que deux possibilités de couleurs, deux ayant déjà été choisies. Enfin, pour la dernière position, il ne restera qu'une couleur, la dernière. Un arbre permet de décrire complètement ce schéma. Il y a donc au total $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilités d'ordonner les 4 pions de couleurs différentes.

Exemple 11 On considère une classe de 20 élèves, qui doit monter dans un bus. On suppose que les élèves montent à la queue-leu-leu, sans se doubler. On note à leur montée le nom de chacun des élèves. On considère que deux listes de noms sont différentes dès que l'ordre est différent de l'une à l'autre. Dans ces conditions, combien y a-t-il de listes différentes possibles ?

Pour la première place, il y a 20 noms possibles. Pour la seconde, il n'y en a plus que 19, et pour la troisième, plus que 18.

En faisant un arbre de toutes les possibilités, on voit qu'il y a $20 \times 19 \times 18 \times \dots \times 2 \times 1$ possibilités de listes différentes.

Définition 10 Une permutation des éléments d'un ensemble fini est un placement des éléments de cet ensemble, qui échange ou pas les positions initiales de chacun, de sorte que chacun obtienne une et une seule nouvelle place, et que tous soient rangés.

Définition 11 Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle n le nombre noté $n!$, et qui vaut

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1.$$

Par convention, $0! = 1$.

Proposition 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n + 1)! = (n + 1) \times n!$.

Remarque 5 $5!$ se lit "factorielle 5", et non pas "5 factorielle" !

Théorème 6 Il y a $n!$ permutations possibles distinctes des éléments d'un ensemble qui en compte n .

Il y a aussi $n!$ manières de ranger n objets dans n cases, de manière à placer tous les objets dans une et une seule case.

Exercice 11 Calculer les nombre suivants (on pourra utiliser la calculatrice) :

1°) a) $3!$ b) $6!$ c) $8!$ d) $15!$

2°) Que penser du résultat donné par la calculatrice pour le nombre du d) ?

Exercice 12 1°) Simplifier les expressions suivantes :

a) $\frac{15!}{13!}$ b) $\frac{7!}{5!2!}$ c) $\frac{100!}{98!3!}$ d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ e) $5! - 3!$ f) $5!3!$

g) $\frac{25!}{20!5!}$ h) $\frac{n!}{2!(n-2)!}$.

2°) Écrire, à l'aide de factorielles, les nombres suivants :

a) $1 \times 5 \times 3 \times 2 \times 4$ b) $4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$ c) $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10$
d) $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9$ e) $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n - 2) \times (2n)$ f) $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1) \times (2n + 1)$.

Exercice 13 Faire un emploi du temps d'une classe de BTS consiste (grossièrement) à placer 16 blocs de 2 heures, dans un planning hebdomadaire vierge, qui compte 16 créneaux de 2 heures. Déterminer le nombre d'emplois du temps différents que l'on peut constituer :

- de manière exacte ;

- en en donnant un ordre de grandeur.

(Rép : $16! = 20922789888000$, soit environ 21 000 milliards)

Exercice 14 À la foire aux célibataires de Plougastel, il n'y a cette année que 9 hommes et 9 femmes. Pour être certain que tous les hommes danseront une valse avec chaque femme, on jouera autant de valses qu'il faudra. Le Gentil Organisateur, n'étant pas très fort en maths, décide d'aligner les hommes avant chaque valse (toujours dans le même ordre), et forme les couples de toutes les manières possibles en plaçant une femme avec chaque homme. La procédure prend 1 minute, à laquelle il faut rajouter les 3 minutes de la valse.

Combien de temps va durer la fête des célibataires de Plougastel ?

(Aux dernières nouvelles, le Conseil Municipal n'organisera plus jamais de foire aux célibataires).

2.4.4 Dénombrement des combinaisons

Exemple 12 On dispose de 4 pions de couleurs, respectivement verte (V), rouge (R), bleue (B) et noire (N). On souhaite prélever deux pions dans ce lot, pour former un couple, sans tenir compte de l'ordre dans lequel on les a choisis. De combien de manières peut-on le faire ?

On appelle N le nombre cherché. Chacun de ces N couples prélevés peut être formé de $2!$ manières différentes (une couleur et un autre, ou le contraire). Donc $2!N$ est le nombre de listes ordonnées (on distingue alors la couleur tirée en premier de celle tirée en second) composées de deux couleurs. Mais ce même nombre peut être aussi calculé au moyen d'un arbre, en reconstituant les tirages possibles :

- pour la première couleur, il y a 4 choix possibles ;
- pour la seconde couleur, il n'y en a plus que 3 (pour chacune des 4 précédentes). Au total, il y a donc $4 \times 3 = 12$ listes ordonnées bicolores. Ce nombre peut être obtenu par le calcul suivant : $12 = \frac{4!}{2!} = \frac{4!}{(4-2)!}$.

Au final, on a donc $2!N = \frac{4!}{2!}$, soit donc $N = \frac{4!}{2!2!}$.

Exemple 13 Une classe compte 20 élèves. Pour aller protester à la rentrée contre leur emploi du temps, les élèves décident de créer une délégation de 4 personnes. Combien de délégations différentes peut-on former ainsi ? On appelle N ce nombre recherché. Une fois choisies 4 personnes, et comme l'ordre de choix n'a pas d'importance dans la délégation, il y a $4!$ manières d'obtenir la même composition (en tenant compte de l'ordre d'arrivée dans la délégation).

Par ailleurs, cherchons le nombre de manières de constituer une délégation, en tenant compte de l'ordre :

- pour la première place, il y a 20 noms possibles ;
- pour la seconde place, il n'y en a plus que 19 (pour chacune des 20 précédentes) ;
- pour la troisième place, il n'y en a plus que 18 ;
- enfin, pour la quatrième place, il n'y a plus que 17 noms possibles.

Au total, il y a $20 \times 19 \times 18 \times 17$ possibilités de former une liste (ordonnée) de 4 personnes parmi 20. Or on a

$$20 \times 19 \times 18 \times 17 = \frac{20!}{16!} = \frac{20!}{(20-4)!}.$$

Au final, on a donc $4!N = \frac{20!}{(20-4)!}$, soit donc $N = \frac{20!}{4!(20-4)!}$.

Exemple 14 On considère une urne comportant n boules numérotées de 1 à n , chacune de couleur différente. On considère les expériences aléatoires consistant : à prélever p boules parmi elles (sans remise), et

1. à noter le nombre formé par la juxtaposition de ces p boules de gauche à droite dans l'ordre de sortie.
2. à relever la composition du groupe de boules colorées ainsi formé (en termes de couleurs uniquement).

1°) a) Dans le cas $n = 5$ et $p = 3$, déterminer, au moyen d'un arbre, le nombre de nombres différents à p chiffres que l'on peut former par ce procédé.

b) Combien de compositions différentes de groupes de boules colorées (en termes de couleurs uniquement) peut-on former ?

2°) Reprendre les questions précédentes dans le cas n et p entiers naturels quelconques ($p \leq n$).

Définition 12 Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On appelle combinaison de p éléments parmi n le fait de prélever p éléments parmi n , de manière à constituer un groupe dans lequel l'ordre n'a pas d'importance.

Remarque 6 Si l'on s'intéresse à la constitution d'un groupe ordonné, on parle d'arrangement, au lieu de combinaison.

Définition 13 Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On définit le nombre C_n^p par la relation :

$$C_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 7 On note aussi C_n^p sous la forme $\binom{n}{p}$.

Proposition 7 On a les propriétés suivantes :

- i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$;

ii. (Symétrie) Pour tous $n; p \in \mathbb{N}$, avec $p \leq n$, $C_n^p = C_n^{n-p}$;

iii. (Relation de Pascal) Pour tous $n; p \in \mathbb{N}$, avec $p \leq n$, $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

Théorème 8 Soient $n; p \in \mathbb{N}$, avec $p \leq n$. Le nombre de manière de prélever p éléments dans un ensemble en contenant n pour former un groupe (sans tenir compte de l'ordre d'arrivée dans le groupe) est C_n^p .

Exercice 15 Calculer les nombres suivantes :

a) C_5^0 b) C_5^1 c) C_5^2 d) C_5^3 e) C_5^4 f) C_5^5

Exercice 16 Vérifier que $C_8^3 + C_8^4 = C_9^4$

Remarque 8 (Triangle de Pascal) La propriété $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ des combinaisons permet de construire le "triangle de Pascal", dont le but est le calcul récursif des combinaisons C_n^p .

Remarque 9 (Formule du binôme) On démontre que, pour tous réels $a; b$ et tout entier naturel n , on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Exercice 17 Afin de représenter les élèves d'une classe, on en élit 2 parmi les 18 qui la composent. Combien de manières y a-t-il de composer le duo de délégués ?

Exercice 18 Dans un avion embarquant 40 passagers, on propose à 4 personnes prises au hasard de répondre à un sondage sur le programme de fidélisation de la compagnie. De combien de manières différentes peut-on composer l'échantillon du sondage ?

Exercice 19 On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32, pour constituer une main (sans tenir compte de l'ordre d'arrivée des cartes).

1°) Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?

2°) Combien y a-t-il de mains contenant exactement 3 rois ?

Exercice 20 Un code barre est composé d'une suite de 5 barres, qui peuvent être épaisses ou fines.

1°) Combien de codes barres est-il ainsi possible de former ?

2°) Combien de codes barres est-il possible de composer avec exactement une barre épaisse ?

3°) Combien de codes barres est-il possible de composer avec exactement 3 barres épaisses ?

4°) Combien de codes barres est-il possible de composer avec exactement 4 barres épaisses ?

Exercice 21 (Schéma de Bernoulli).

On lance une pièce à pile ou face, et on suppose que la pièce est bien équilibrée (et qu'elle ne tombe jamais sur la tranche).

On réalise une série de n lancers successifs ($n \in \mathbb{N}$), et on note à la suite F ou P sur une feuille de papier, suivant les résultats de la série de piles ou faces obtenue en n lancers. On compose ainsi des "mots" de n lettres, du type (si $n = 5$) : $FFFPP$ ou $PPFFP$, etc.

On fait l'hypothèse que, lors d'un lancer, la pièce n'a pas conscience de la face obtenue lors des lancers précédents.

On s'intéresse aux événements $F_{i,n}$: "Obtenir i fois Face, au cours d'une série de n lancers".

Étude du cas $n = 1$

On ne réalise qu'un lancer de la pièce.

1°) Combien de "mots" d'une lettre peut-on former avec les deux symboles P et F ?

2°) Quelle est la probabilité des événements $F_{0,1}$ et $F_{1,1}$?

Étude d'une série de 2 lancers successifs (cas $n = 2$)

On réalise successivement 2 lancers de la pièce.

3°) Combien de "mots" de 2 lettres peut-on former avec les deux symboles P et F ?

4°) Combien y a-t-il de mots de 2 lettres composés d'aucun symbole P ? d'un seul symbole P ? de deux symboles P ?

5°) Quelle est la probabilité des événements $F_{0,2}$, $F_{1,2}$ et $F_{2,2}$?

Étude d'une série de 3 lancers successifs (cas $n = 3$)

On réalise successivement 3 lancers de la pièce.

6°) Combien de "mots" de 3 lettres peut-on former avec les deux symboles P et F ?

7°) Combien y a-t-il de mots de 3 lettres composés d'aucun symbole P ? d'un seul symbole P ? de deux symboles P ? de 3 symboles P ?

8°) Quelle est la probabilité des événements $F_{0;3}$, $F_{1;3}$, $F_{2;3}$ et $F_{3;3}$?

Étude d'une série de 5 lancers successifs (cas $n = 5$)

On réalise successivement 5 lancers de la pièce.

6°) Combien de "mots" de 5 lettres peut-on former avec les deux symboles P et F ?

7°) Combien y a-t-il de mots de 5 lettres composés d'aucun symbole P ? d'un seul symbole P ? de deux symboles P ? de 3 symboles P ? de 4 symboles P ? de 5 symboles P ?

8°) Quelle est la probabilité des événements $F_{0;5}$, $F_{1;5}$, $F_{2;5}$, $F_{3;5}$, $F_{4;5}$ et $F_{5;5}$?

Étude d'une série de n lancers successifs (cas n entier non nul)

On réalise successivement n lancers de la pièce.

6°) Combien de "mots" de n lettres peut-on former avec les deux symboles P et F ?

7°) Combien y a-t-il de mots de n lettres composés de k symboles P ($0 \leq k \leq n$) ?

8°) Quelle est la probabilité des événements $F_{k;n}$, pour k entier, $0 \leq k \leq n$.

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Définition

Définition 14 Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire, et A et S deux événements associés à cet univers. On suppose que S n'est pas un événement de probabilité nulle.

On appelle probabilité conditionnelle de A relativement à S la probabilité que l'événement A se réalise, sachant que S est réalisé.

De plus, la probabilité conditionnelle de A relativement à S (ou de A sachant S) est le nombre réel noté $\mathbb{P}_S(A)$, et qui vaut

$$\mathbb{P}_S(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S)}{\mathbb{P}(S)}.$$

Remarque 10 On trouve aussi la notation $\mathbb{P}(A|S)$ pour $\mathbb{P}_S(A)$.

Exemple 15 On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les événements :

- S : "la face obtenue porte un numéro pair" ;

- A : "la face obtenue porte un numéro multiple de 3".

On veut déterminer la probabilité d'obtenir numéro multiple de 3, sachant qu'on a un numéro pair, autrement dit $\mathbb{P}_S(A)$.

Commençons par remarquer que l'événement (A/S) : "obtenir numéro multiple de 3 sachant qu'on a un numéro pair" correspond à l'événement "obtenir un numéro multiple de 3" parmi les éventualités de S , autrement dit parmi $\{2; 4; 6\}$. Il n'y a donc que l'issue "obtenir 6" qui compose (A/S) . Comme on est en situation d'équiprobabilité,

$$\mathbb{P}_S(A) = \frac{1}{3}.$$

Par ailleurs, comme on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(S) = \frac{1}{2}$, et $\mathbb{P}(A \cap S) = \frac{1}{6}$, puisque $A \cap S = \{6\}$. D'après la formule de définition, on a

$$\mathbb{P}_S(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3};$$

Cette exemple illustre l'idée de la probabilité conditionnelle de A à S : au lieu de mesurer la probabilité de A par rapport à l'univers Ω de l'expérience aléatoire considérée, il s'agit de mesurer sa probabilité rapportée au nouvel univers constitué du seul événement S . Ainsi, si $\mathbb{P}(A)$ mesure le poids de A relativement à Ω , $\mathbb{P}_S(A)$ mesure le poids de A relativement à S (voir la figure ci-dessous).

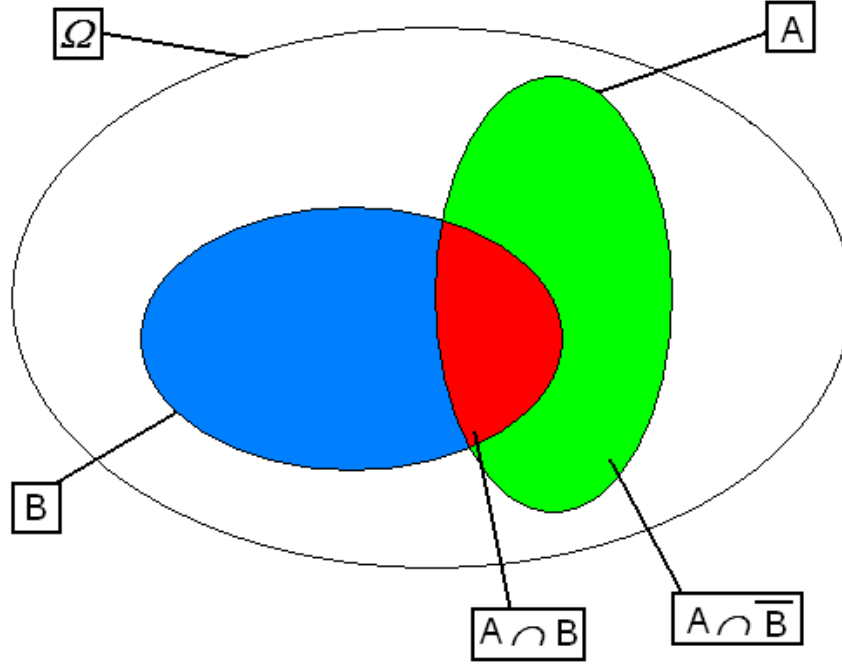


FIG. 4 – Probabilité conditionnelle de A sachant S (calcul du poids relatif de A par rapport à S)

3.2 Propriétés

Proposition 9 Si Ω est l'univers associé à une expérience aléatoire, dont A et S sont deux événements tels que $\mathbb{P}(S) > 0$, alors on a

$$\mathbb{P}(A \cap S) = \mathbb{P}_S(A)\mathbb{P}(S).$$

Remarque 11 Si dans l'énoncé précédent on suppose en outre que $\mathbb{P}(A) > 0$, on a alors

$$\mathbb{P}(A \cap S) = \mathbb{P}_S(A)\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}_A(S)\mathbb{P}(A).$$

Théorème 10 Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire, et S un événement associé à cet univers. On suppose que $\mathbb{P}(S) > 0$.

Soient A et B deux autres événements associés à cet univers. Alors on a :

- i. Une probabilité conditionnelle est toujours un nombre compris entre 0 et 1 ;
- ii. La probabilité conditionnelle d'un événement certain est 1, la probabilité conditionnelle d'un événement impossible est 0 (autrement dit : $\mathbb{P}_S(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}_S(\Omega) = 1$) ;
- iii. Si A est un événement dont l'événement contraire est $\bar{A}$, alors on a $\mathbb{P}_S(A) = 1 - \mathbb{P}_S(\bar{A})$;
- iv. (Formule de l'union) On a $\mathbb{P}_S(A \cup B) = \mathbb{P}_S(A) + \mathbb{P}_S(B) - \mathbb{P}_S(A \cap B)$;
- v. Si A et B sont des événements incompatibles, alors on a : $\mathbb{P}_S(A \cup B) = \mathbb{P}_S(A) + \mathbb{P}_S(B)$;
- vi. On a $\mathbb{P}_S(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}_S(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}_S(A \cap B)$.

Remarque 12 Ce théorème revient à dire qu'une probabilité conditionnelle relative à un événement S (avec $\mathbb{P}(S) > 0$) a toutes les propriétés habituelles du calcul des probabilités.

Théorème 11 (Formule des probabilités totales) On suppose que $\mathbb{P}(S) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{S}) \neq 0$. Alors on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_S(A)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}_{\bar{S}}(A)\mathbb{P}(\bar{S})$.

Preuve

◀ Par définition, $\mathbb{P}_S(A)\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A \cap S)$ et $\mathbb{P}_{\bar{S}}(A)\mathbb{P}(\bar{S}) = \mathbb{P}(A \cap \bar{S})$. La relation à démontrer s'écrit donc en réalité $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(A \cap \bar{S})$, et c'est la formule bien connue des probabilités totales. ▶

3.3 Exemples de calculs de probabilités conditionnelles

3.3.1 Avec un tableau des effectifs

Exercice 22 On estime que 1 avion sur 40 dans le monde est mal entretenu. A Roissy ce matin, 200 avions sont prévus au décollage. La DGAC procède comme chaque jour à des contrôles de sécurité portant sur 10% des appareils, ce qui conduit à l'observation suivante : 5% des avions inspectés sont mal entretenus, et devront donc rester au sol en raison de ce défaut d'entretien.

1°) Dresser un tableau permettant de calculer le nombre d'avions se trouvant dans toutes les situations possibles compte tenu des éléments ci-dessus.

2°) On s'intéresse à un avion prévue au décollage ce matin à Roissy. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- A : "cet avion est mal entretenu et sera inspecté".

- B : "cet avion, dont on sait qu'il sera contrôlé, est mal entretenu".

- C : "cet avion ne sera pas contrôlé ou est mal entretenu".

3°) Calculer la probabilité que l'avion ne soit pas contrôlé, sachant que il est mal entretenu.

3.3.2 Avec les définitions et propriétés

Exercice 23 Une usine produit chaque jour 2 000 pièces du même modèle. Chacune des pièces peut présenter un défaut d'épaisseur, noté E , un défaut de longueur L , ou les deux à la fois.

On sait que 6% des pièces produites présentent le défaut E , 5% le défaut L , et parmi les pièces présentant le défaut E , 25% ont aussi le défaut L .

On tire au hasard une pièce dans la production du jour. Calculer la probabilité des événements suivants :

1°) A : la pièce présente les deux défauts ;

2°) B : La pièce n'a que le défaut L ;

3°) C : La pièce n'a que le défaut E ;

2°) D : La pièce présente au moins un défaut ;

2°) E : La pièce n'a qu'un seul défaut L .

Exercice 24 Un cadenas est composé de 4 barillets, portant chacun les 10 chiffres de 0 à 9.

1°) Combien de codes différents à 4 chiffres peut-on choisir sur le cadenas ?

2°) On admet que tous les codes ont la même probabilité d'être choisis. Donner la probabilité des événements suivants :

a) A : " Tous les chiffres du code sont différents" ;

b) B : "Le chiffre 1 ne figure pas dans le code" ;

c) C : "Le chiffre 1 figure une seule fois dans le code" ;

d) D : "Le chiffre 1 figure au moins deux fois dans le code" ;

e) E : "Il n'y a que des chiffres impairs dans le code".

3°) Calculer la probabilité que tous les chiffres du code soient différents, ou que 1 ne figure pas dans le code.

4°) Sachant qu'il n'y a que des chiffres impairs dans le code, quelle est la probabilité que tous les chiffres du code soient différents ?

Exercice 25 Un sous-traitant fabrique des écrous de précision pour l'aéronautique. Il teste toute sa production, dont il sait que 98% est conforme aux prescriptions du cahier des charges. Le processus de test est fiable dans une certaine mesure :

- d'une part, 90% des pièces conformes sont déclarées valables à l'issue du test ;

- d'autre part, 99% des pièces non conformes sont reconnues comme telles.

On considère les événements suivants :

A : "Un écrou est conforme" et B : "Un écrou est reconnu non conforme".

1°) Déterminer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}_A(\bar{A})$, et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$.

2°) Déterminer $\mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ puis $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.

3°) Déterminer la probabilité qu'un écrou soit refusé.

4°) Déterminer la probabilité qu'un comprimé soit conforme, sachant qu'il est refusé par le test.

3.3.3 Avec un arbre des probabilités conditionnelles

Exercice 26 On considère les résultats d'une enquête réalisée au Lycée, et qui croise les informations relatives au sexe des élèves avec celles relatives au tabagisme :

	Garçons	Filles	Totaux
Fumeurs	36	44	80
Non-fumeurs	9	11	20
Totaux	45	55	100

On choisit au hasard un élève de ce lycée, et on l'interroge.

1°) Déterminer la probabilité des événements suivants :

- G : "L'élève interrogé est un garçon".

- F : "L'élève interrogé est une fille".

- C : "L'élève est un fumeur".

- D : "L'élève n'est pas un fumeur".

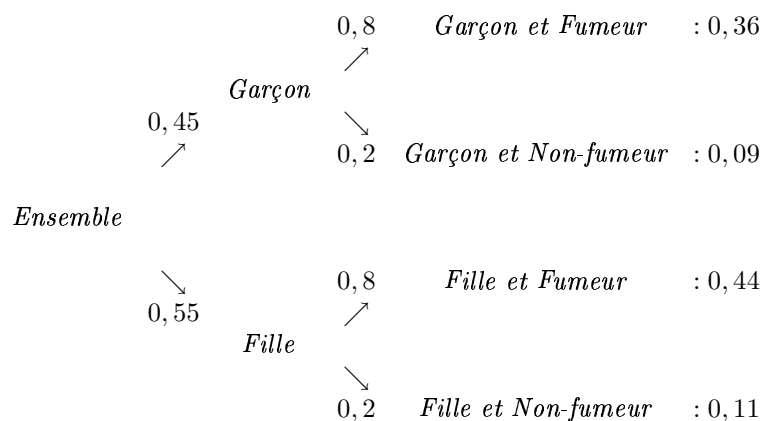
2°) a) Évaluer directement (sans utiliser de probabilités conditionnelles) la probabilité de l'événement : "Sachant que l'on interroge un non-fumeur, c'est une fille".

b) Utiliser la définition des probabilités conditionnelles pour retrouver ce résultat.

3°) a) Évaluer directement (sans utiliser de probabilités conditionnelles) la probabilité de l'événement : "Sachant que l'on interroge un garçon, c'est un fumeur".

b) Utiliser la définition des probabilités conditionnelles pour retrouver ce résultat.

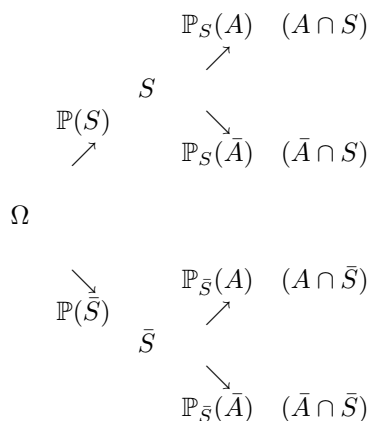
La situation de l'exemple précédent peut se représenter par un arbre, appelé arbre des probabilités conditionnelles :



Par convention :

- sur les branches issues de la première ramification on porte des probabilités simples ;
- sur les branches issues des ramifications suivantes, on porte la probabilité conditionnelle de l'événement correspondant à la branche, relativement à l'événement qui a causé la ramification précédente ;
- en bout de branche, on trouve la probabilité de l'événement sachant tous les événements précédents dans la ramification en faisant le produit des probabilités des branches qui y aboutissent.

Autrement dit, pour un univers Ω d'une expérience aléatoire, et des événements A et S tels que $\mathbb{P}(S) \neq 0$, et un système d'événements étudié simplement du type $\{S; \bar{S}\}$ et $\{A; \bar{A}\}$, un arbre de probabilités conditionnelles est de la forme :



avec $\mathbb{P}(A \cap S) = \mathbb{P}_S(A)\mathbb{P}(S)$, $\mathbb{P}(\bar{A} \cap S) = \mathbb{P}_S(\bar{A})\mathbb{P}(S)$, $\mathbb{P}(A \cap \bar{S}) = \mathbb{P}_{\bar{S}}(A)\mathbb{P}(\bar{S})$, $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{S}) = \mathbb{P}_{\bar{S}}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{S})$: on a donc la règle suivante :

Règle de calcul dans un arbre de probabilités conditionnelles : la probabilité d'un événement situé à l'extrémité de l'une des ramifications de l'arbre est le produit des probabilités portées sur chacune des branches conduisant à cette extrémité.

Cette disposition commode des données de l'énoncé permet de visualiser directement les réponses à certaines questions (en particulier la valeur de $\mathbb{P}(A \cap S)$, $\mathbb{P}(A \cap \bar{S})$, $\mathbb{P}(\bar{A} \cap S)$, $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{S})$, mais aussi $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\bar{A})$) et les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_S(A)$, $\mathbb{P}_S(\bar{A})$, $\mathbb{P}_{\bar{S}}(A)$ et $\mathbb{P}_{\bar{S}}(\bar{A})$.

On notera aussi que l'on retrouve la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(A \cap \bar{S}) = \mathbb{P}_S(A)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}_{\bar{S}}(A)\mathbb{P}(\bar{S}).$$

En revanche, les valeurs de $\mathbb{P}_A(S)$, $\mathbb{P}_{\bar{A}}(S)$, $\mathbb{P}_A(\bar{S})$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(\bar{S})$ ne sont pas directement accessibles dans cet arbre, et doivent donc être calculées à part (par exemple, $\mathbb{P}_A(S) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S)}{\mathbb{P}(A)}$ en revenant à la définition).

Enfin, les cas présentés ici peuvent ne pas être aussi simples dans certains cas : dans l'exemple, chaque ramification est produite par un système complet d'événements simple (du type $\{S; \bar{S}\}$ et $\{A; \bar{A}\}$), mais peut l'être par un système complet de n événements ($n > 2$). Le principe reste le même, le nombre de ramifications en est simplement augmenté.

3.3.4 Rapport entre ces techniques

Exercice 27 Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 découpent des pièces métalliques identiques. M_1 fournit 60% de la production (parmi lesquelles 6,3% sont défectueuses, le reste étant fourni par M_2 (dont 4% de la production est défectueuse).

La production du jour est constituée des pièces produites par les deux machines, et on en tire en fin de soirée une pièce au hasard (tous les prélèvements sont supposés équiprobables).

A. Utilisation des formules des probabilités conditionnelles

- Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?
- Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?
- Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?

B. Utilisation d'un tableau

1°) On suppose maintenant que la production est composée de x pièces. Reproduire et compléter le tableau suivant qui décrit la production du jour :

	Nombre de pièces produites par M_1	Nombre de pièces produites par M_2	Total
Nombre de pièces défectueuses			
Nombre de pièces conformes			
Total			

- a) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?
 b) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?
 c) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?
 3°) Quelle conclusion tirer des parties A et B ?

C. Utilisation d'un arbre des probabilités conditionnelles

- 1°) Dresser un arbre des probabilités conditionnelles relatif à la situation proposée.
 2°) a) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?
 b) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?
 c) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?
 3°) Quelle conclusion tirer des parties A, B et C ?

4 Indépendance de deux événements

4.1 Définition

Définition 15 Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire, et A et B deux événements de cet univers. On dit que A et B sont des événements indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Remarque 13 Si A et B sont deux événements associés à un univers, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a en général

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Demander que A soit indépendant de B revient à demander que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$ (la probabilité de A est fixe, que B soit ou non réalisé). Autrement dit, cela revient à imposer la relation $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, qui conduit à la condition $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ retenue pour définition.

Réciproquement, si l'on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, on en tire immédiatement $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$, c'est-à-dire que la probabilité de A ne varie jamais, que B soit ou pas réalisé. C'est l'idée de l'indépendance de A vis-à-vis de B . Notons pour finir que, si A et B sont tous les deux de probabilité non nulle, l'indépendance de B vis-à-vis de A se traduit par $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$, donc par $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, c'est à dire finalement par $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$, relation qui traduit l'indépendance de A vis-à-vis de B ...

Ainsi, l'indépendance de A vis-à-vis de B est équivalente à l'indépendance de B vis-à-vis de A , qui est donc équivalente à l'indépendance de A et de B l'un par rapport à l'autre. Cette dernière relation se traduit donc bien par la relation choisie pour définition de l'indépendance de A et B .

Proposition 12 Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire, et A et B deux événements de cet univers. Si A et B sont des événements indépendants, alors :

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ et } \bar{B} \\ \bar{A} \text{ et } B \\ \bar{A} \text{ et } \bar{B} \end{array} \right\} \text{ sont également des événements indépendants.}$$

Preuve

◀ Si A et B sont indépendants, on a :

- $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}_B(\bar{A})\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B)$, donc $\bar{A}$ et B sont indépendants.
- $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}_A(\bar{B})\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(A)$, donc A et $\bar{B}$ sont indépendants.
- $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A}) + \mathbb{P}(\bar{B}) - \mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(A) + 1 - \mathbb{P}(B) - 1 + \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, car A et B sont indépendants ; or, comme $\mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B}) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, on a montré que $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B})$, donc que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants. ►

Exercice 28 La commande d'un portail de jardin tombe en panne à chaque fois qu'il pleut. Par ailleurs, chaque fois qu'un caillou se coince sous l'un des deux battants, le portail est bloqué. Le propriétaire a remarqué que les jours de beau temps sont deux fois plus nombreux que les jours de pluie, tandis que les cailloux viennent se glisser sous le battant un jour par semaine. On suppose que ceci se produit indépendamment du temps qu'il fait.

- 1°) Quelle est la probabilité que le portail soit bloqué ?
 2°) Quelle est la probabilité qu'un caillou bloque le portail sachant qu'il pleut ?
 3°) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau, sachant qu'aucun caillou ne bloque le portail ?

4.2 Application aux calculs de probabilités

Proposition 13 Soient A et B deux événements d'un univers Ω associée à une expérience aléatoire. Si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Exercice 29 En fin de chaîne de montage, une voiture peut présenter un défaut de forme de carrosserie C , ou un défaut de peinture P . La probabilité d'un défaut C est 0,01, et celle d'un défaut P est 0,005. On suppose que les deux défauts apparaissent indépendamment l'un de l'autre.
Quelle est la probabilité d'avoir un défaut sur la voiture ?

Exercice 30 En fin de chaîne de montage, une voiture peut présenter un défaut de forme de carrosserie C , ou un défaut de peinture P . La probabilité d'un défaut C est 0,01, et celle d'un défaut P est 0,005 si le défaut C n'est pas déjà présent, et de 0,2 dans le cas contraire.

1°) Peut-on considérer que les deux défauts apparaissent indépendamment l'un de l'autre ?

2°) Quelle est la probabilité d'avoir le défaut P ?

3°) Quelle est la probabilité d'avoir un défaut sur la voiture ?

Exercice 31 Dans un atelier, 2% des pièces produites sont défectueuses. On décide donc de procéder à un contrôle de qualité de la production, qui est tel que :

- si la pièce produite est bonne, elle est acceptée avec probabilité 0,96 ;

- si la pièce est défectueuse, elle est rejetée avec probabilité 0,98.

Enfin, on considère qu'il y a erreur de contrôle si l'une des deux situations précédentes se produit.

On prélève au hasard une pièce dans la production, et on considère les événements :

- D : "la pièce est défectueuse" ;

- C : "la pièce est conforme" ;

- A : "la pièce est acceptée" ;

- R : "la pièce est refusée" ;

- E_1 : "la pièce est défectueuse et est acceptée" ;

- E_2 : "la pièce est conforme et est refusée" ;

- E : "il y a erreur de contrôle sur cette pièce".

1°) a) Exprimer E_1 et E_2 à l'aide des événements A , R , D , C , puis E à l'aide de E_1 et E_2 .

b) Montrer que les événements E_1 et E_2 sont incompatibles.

c) Calculer la probabilité des événements E_1 et E_2 .

d) En déduire la probabilité de l'événement E .

2°) a) Calculer la probabilité que la pièce soit conforme sachant qu'elle a été refusée au contrôle.

b) Calculer la probabilité que la pièce soit conforme sachant qu'elle a été acceptée au contrôle.

3°) a) Calculer, après l'avoir décrit, la probabilité de l'événement $A \cap C$.

b) Les événements A et C sont-ils indépendants ?

5 Lien entre probabilités et statistiques : la loi des grands nombres

Activité 1 On a lancé deux dés un certain nombre de fois, et additionné les résultats lus sur chaque face obtenue. Les valeurs S de la somme ont été reportées dans le tableau ci-dessous.

Valeur de S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs pour 10 lancers											
Effectifs pour 10 lancers											
Effectifs pour 10 lancers											
Effectifs pour 100 lancers											
Effectifs pour 100 lancers											
Effectifs pour 100 lancers											
Effectifs pour 1000 lancers											
Effectifs pour 1000 lancers											
Effectifs pour 1000 lancers											
Effectifs pour 100000 lancers											
Effectifs pour 100000 lancers											
Effectifs pour 100000 lancers											

1°) Calculer les fréquences d'apparition de chaque valeur de S dans chacune des quatre séries de lancers.

2°) Estimer chaque fois l'événement le plus fréquent, et sa fréquence d'apparition. Qu'observe-t-on ? Que peut-on

en déduire ?

3°) Peut-on retrouver de manière théorique les fréquences théoriques d'apparition de chaque valeur de S ?

Le Formulaire indispensable pour survivre ...

Ω désigne l'ensemble des issues élémentaires possibles d'une expérience aléatoire ; A et B sont deux événements composés d'aucune, d'une ou de plusieurs issues de Ω .

Langage des ensembles - Langage des événements

Événement certain	Ω
Événement impossible	$\emptyset$
Événement contraire de A	$\bar{A}$
Le contraire du contraire de A est A lui-même	$\bar{\bar{A}} = A$
Événement A ou B	$A \cup B$
Événement A et B	$A \cap B$

Calcul des probabilités

Probabilité d'un événement certain	$\mathbb{P}(\Omega) = 1$
Probabilité d'un événement impossible	$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
Probabilité d'un événement A (si Ω est fini et en cas d'équiprobabilité)	$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$
Probabilité d'un événement contraire	$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
Probabilité de A ou B	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
Probabilités totales	$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$
Probabilité de " A sachant B " (si B de probabilité non nulle)	$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
Probabilité de " A et B " (si A et B sont indépendants)	$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Dénombrements

n et p étant des entiers naturels, avec $0 \leq p \leq n$:

- Le nombre de permutations distinctes des n éléments d'un ensemble est $n!$ (avec $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$).
- Le nombre de compositions de groupes (sans tenir compte de l'ordre d'arrivée) à p éléments choisis parmi n

est $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Table des matières

1	Introduction - Rappels	1
1.1	Aperçu historique succinct	1
1.2	Vocabulaire des probabilités	1
1.2.1	Expérience aléatoire - Univers des possibles	1
1.2.2	Événements d'une expérience aléatoire	1
1.2.3	Opérations sur les événements	2
2	Calculs des probabilités	4
2.1	Définitions	4
2.2	Calcul des probabilités en cas d'équiprobabilité	4
2.3	Propriétés du calculs des probabilités	5
2.4	Le problème du dénombrement en calcul des probabilités	6
2.4.1	Utilisation de tableaux des effectifs pour le dénombrement	6
2.4.2	Utilisation d'arbres pour le dénombrement	7
2.4.3	Dénombrement des permutations	7
2.4.4	Dénombrement des combinaisons	9
3	Probabilité conditionnelle	11
3.1	Définition	11
3.2	Propriétés	12
3.3	Exemples de calculs de probabilités conditionnelles	13
3.3.1	Avec un tableau des effectifs	13
3.3.2	Avec les définitions et propriétés	13
3.3.3	Avec un arbre des probabilités conditionnelles	14
3.3.4	Rapport entre ces techniques	15
4	Indépendance de deux événements	16
4.1	Définition	16
4.2	Application aux calculs de probabilités	17
5	Lien entre probabilités et statistiques : la loi des grands nombres	17