

Variables aléatoires réelles discrètes

1 Notion de variable aléatoire discrète

1.1 Définitions. Exemples

Définition 1 On appelle variable aléatoire associée à une expérience aléatoire toute fonction dont la valeur dépend du résultat de cette expérience.

L'image d'un événement $\omega \in \Omega$ est appelé une réalisation de l'événement ω , ou encore valeur de la variable aléatoire sur l'événement ω .

Remarque 1 Une variable aléatoire à valeurs réelles est la donnée d'une fonction

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

compatible avec les opérations sur l'espace des possibles Ω .

Exemple 1 On lance un dé traditionnel équilibré à 6 faces. On appelle X le numéro de la face obtenue à un certain lancer. Ici, l'ensemble des possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, et on a défini avec X une variable aléatoire réelle, par la relation :

$$\text{Pour tout } \omega \in \Omega, X(\omega) = \omega.$$

En clair, $X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3, X(4) = 4, X(5) = 5$ et $X(6) = 6$.

On fabrique ainsi une variable aléatoire, puisque la valeur de X dépend du tirage réalisé ...

Exemple 2 Un jeu de hasard consiste à lancer un dé traditionnel équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé. On appelle X le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer. Ici, l'ensemble des possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, et on a défini avec X une variable aléatoire réelle, par la relation :

$$\text{Pour tout } \omega \in \Omega, X(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & \text{si } \omega \text{ est pair} \\ -2\omega, & \text{si } \omega \text{ est impair} \end{cases}.$$

En clair, $X(1) = -2, X(2) = 4, X(3) = -6, X(4) = 8, X(5) = -10$ et $X(6) = 12$.

On fabrique ainsi une variable aléatoire, puisque la valeur de X dépend du tirage réalisé ...

Exemple 3 On dispose d'un jeu de belote traditionnel de 32 cartes. On tire une carte dans ce jeu, et on attribue à ce tirage la valeur X calculée suivant la règle suivante :

- si la carte est un As, X vaut 11 points ;
- si la carte est un Roi, X vaut 4 points ;
- si la carte est une Dame, X vaut 3 points ;
- si la carte est un Valet, X vaut 1 point ;
- toutes les autres cartes valent 0 point.

On fabrique ainsi une variable aléatoire, puisque la valeur de X dépend du tirage réalisé ...

Exemple 4 Un professeur peu consciencieux décide de corriger ainsi ses copies : sur son escalier composé de 21 marches, qu'il a au préalable numérotées de 0 à 20, il jette le paquet de copies, et attribue à chaque copie la note correspondant au numéro de la marche. On note X la note obtenue par la copie de Paul. Il est clair que X est une variable (très) aléatoire, puisqu'il s'agit d'attribuer une valeur à X (la note), qui est le résultat d'une expérience aléatoire (le lancer de copies, et leur atterrissage).

1.2 Variables aléatoires discrètes

Toutes les variables aléatoires rencontrées jusqu'ici sont des exemples de variables aléatoires discrètes. Ceci signifie en gros que ces variables ne peuvent prendre que des valeurs "éloignées" les unes des autres, comme le sont les nombres entiers les uns par rapport aux autres.

Définition 2 Une variable aléatoire discrète est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs qui peuvent être séparées les unes des autres (au moins en théorie)

Remarque 2 Plus concrètement, une variable aléatoire discrète est une variable aléatoire dont les valeurs possibles ne sont pas infiniment proches (au moins théoriquement).

Exemple 5 Un exemple important de variables aléatoires discrètes est fourni par les variables aléatoires prenant des valeurs entières, ou qui peuvent être transformées en variables aléatoires définies sur le même univers, et ne prenant que des valeurs entières.

Autrement dit, si Ω est l'univers sur lequel la variable aléatoire X est définie, alors on peut transformer X en une autre variable aléatoire Y définie sur Ω , telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ou $Y(\Omega) \subset \mathbb{Z}$. Ceci revient à dire que pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) \in \mathbb{N}$ ou $Y(\omega) \in \mathbb{Z}$

Exemple 6 Un jeu de hasard consiste à lancer un dé traditionnel équilibré à 6 faces. On note X le nombre obtenu en calculant l'inverse du carré du chiffre affiché sur le dé.

X est une variable aléatoire discrète, car ses valeurs possibles sont "éloignées" les unes des autres : celles-ci valent en effet $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}$. En posant $Y = X^{-1}$, on définit une nouvelle variable aléatoire sur l'univers de l'expérience (ici, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$), et les valeurs prises par Y sont entières (elles valent en effet 1, 4, 9, 16, 25, ou 36, ce qui revient à écrire que

$$Y(\Omega) = \{1; 4; 9; 16; 25; 36\}.$$

Cette dernière relation montre que Y , transformation de X , ne prend que des valeurs entières).

Remarque 3 En BTS, les variables aléatoires discrètes au programme prennent toutes des valeurs entières, en nombre fini (variables suivant une loi de Bernoulli ou binômiale) ou infini (variable suivant une loi de Poisson).

2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 3 Un univers probabilisé est un univers sur lequel on connaît les probabilités de chacun des événements élémentaires.

Définition 4 Soit X une variable aléatoire définie sur un univers probabilisé. On appelle loi de la variable aléatoire la donnée de toutes les probabilités de réalisation d'une valeur de X .

Remarque 4 En général, on présente la loi d'une variable aléatoire X discrète sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs des probabilités des valeurs prises par X .

Valeurs de X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Ce tableau doit bien sûr faire penser à celui d'une série statistique à une variable, présentée par distribution de fréquences.

Exemple 7 On lance un dé traditionnel équilibré à 6 faces. On appelle X le numéro de la face obtenue à un certain lancer. Ici, l'ensemble des possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, et on a défini avec X une variable aléatoire réelle. En clair, $X(1) = 1$, $X(2) = 2$, $X(3) = 3$, $X(4) = 4$, $X(5) = 5$ et $X(6) = 6$, et la loi de X est donnée par

X	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemple 8 Un jeu de hasard consiste à lancer un dé traditionnel équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé. On appelle X le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer. Les valeurs possibles de X sont $X(1) = -2$, $X(2) = 4$, $X(3) = -6$, $X(4) = 8$, $X(5) = -10$ et $X(6) = 12$.

La loi de X est donnée par

X	-10	-6	-2	4	8	12
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On fabrique ainsi une variable aléatoire, puisque la valeur de X dépend du tirage réalisé ...

Exemple 9 On dispose d'un jeu de belote traditionnel de 32 cartes. On tire une carte dans ce jeu, et on attribue à ce tirage la valeur X calculée suivant la règle suivante :

- si la carte est un As, X vaut 11 points ;
- si la carte est un Roi, X vaut 4 points ;
- si la carte est une Dame, X vaut 3 points ;
- si la carte est un Valet, X vaut 1 point ;
- toutes les autres cartes valent 0 point.

La loi de X est donnée par

X	0	1	3	4	11
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{16}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$

Exemple 10 La loi de la somme de deux dés à 6 faces, traditionnels, équilibrés, est donnée par :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarque 5 Dans le cas où la variable aléatoire X serait discrète mais prendrait une infinité de valeurs $(x_i)_{i \geq 1}$, donner la loi de X consiste à déterminer les probabilités $(p_i)_{i \geq 1}$ de chacun des événements $X = x_i$. On a donc : pour tout $i \in \mathbb{N}$, $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Exemple 11 Considérons par exemple les lancers successifs d'une pièce équilibrée. On note X le numéro du premier lancer qui amène Pile.

On a $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, et que de manière générale $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$.

La loi de X est donc donnée par les relations : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$, ou encore par le tableau

Valeurs de X	1	2	3	4	...	k	...
Probabilités associées	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{2^k}$	...

(Notons que pour tout k , $0 \leq \mathbb{P}(X = k) \leq 1$, et que $\sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.)

3 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition 5 Soit X une variable aléatoire réelle finie sur un univers probabilisé. On suppose que X a pour loi

Valeurs de X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

On appelle espérance de la variable aléatoire X le réel, noté $\mathbb{E}(X)$, et qui vaut

$$\mathbb{E}(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Remarque 6 L'espérance de la variable aléatoire X est la moyenne de la série statistique discrète X , présentée selon les fréquences $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Remarque 7 Dans le cas où la variable aléatoire X serait discrète mais prendrait une infinité de valeurs $(x_i)_{i \geq 1}$, chacune respectivement avec la probabilité $(p_i)_{i \geq 1}$, on adopte la définition suivante

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i x_i,$$

si cette dernière quantité est finie. Ce nombre généralise alors celui retenu dans la définition précédente. On adopte la convention suivante : si $(x_i)_{i \geq 1}$ est une suite de réels,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} u_i := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N u_i.$$

Exemple 12 Considérons par exemple les lancers successifs d'une pièce équilibrée. On note X le numéro du premier lancer qui amène Pile.

On a vu plus haut que la loi de X était donnée par les relations : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$, ou encore par le tableau

Valeurs de X	1	2	3	4	...	k	...
Probabilités associées	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{2^k}$	...

S'il existe, l'espérance de X est le réel $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \frac{i}{2^i}$.

Calculons, pour $N \in \mathbb{N}$, la quantité $\sum_{i=1}^N i \left(\frac{1}{2}\right)^i$.

On montre en Première que, si $x \neq 1$ est réel, $\sum_{i=1}^N x^i = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1} - 1 = f(x)$. Par dérivation, pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, il vient

$$f'(x) = \sum_{i=1}^N i x^{i-1} = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^N i x^i$$

d'une part, et

$$f'(x) = \frac{(N+1)x^N(x-1) - (x^{N+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1}{(x-1)^2}$$

d'autre part. Donc

$$\sum_{i=1}^N i x^i = x \cdot \frac{Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1}{(x-1)^2}.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, il vient

$$\sum_{i=1}^N i \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{N}{2^{N+1}} - \frac{(N+1)}{2^N} + 1}{\frac{1}{4}} = 2 \left(\frac{N}{2^{N+1}} - \frac{(N+1)}{2^N} + 1 \right) = 2 \left(1 - \frac{N+2}{2^{N+1}} \right).$$

Pour $N \rightarrow +\infty$, cette quantité tend vers 2. Donc $\mathbb{E}(X)$ existe, et vaut 2.

4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète

Définition 6 Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers probabilisé. On suppose que X a pour loi

Valeurs de X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

On suppose que X a pour espérance le nombre $\mathbb{E}(X)$.

On appelle variance de la variable aléatoire X le réel, noté $\mathbb{V}(X)$, et qui vaut

$$\mathbb{V}(X) = p_1(x_1 - \mathbb{E}(X))^2 + p_2(x_2 - \mathbb{E}(X))^2 + \dots + p_n(x_n - \mathbb{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i(x_i - \mathbb{E}(X))^2.$$

On appelle écart-type de X le réel, noté $\sigma(X)$, défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Remarque 8 La variance et l'écart-type de la variable aléatoire X sont la variance et l'écart-type de la série statistique discrète X , présentée selon les fréquences $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Remarque 9 Dans le cas où la variable aléatoire X serait discrète mais prendrait une infinité de valeurs $(x_i)_{i \geq 1}$, chacune respectivement avec la probabilité $(p_i)_{i \geq 1}$, on adopte les définitions suivantes

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i(x_i - \mathbb{E}(X))^2$$

si cette dernière quantité est finie. Ce nombre généralise alors celui retenu dans la définition précédente. On adopte la même convention que plus haut : si $(x_i)_{i \geq 1}$ est une suite de réels,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} u_i := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N u_i.$$

Par ailleurs, on pose toujours $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarque 10 Dans tous les cas, on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

La variance est donc l'espérance des écarts carrés à l'espérance. Ceci donne un moyen commode de calculer en pratique la variance : on détermine la loi de la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$, et on en calcule l'espérance.

Théorème 1 (de Kœnig) Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un univers probabilisé, admettant une espérance et une variance. Alors on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Preuve

◀ Ce résultat sera démontré plus loin, dans le chapitre consacré aux opérations sur les variables aléatoires. ▶

Exemple 13 Considérons par exemple les lancers successifs d'une pièce équilibrée. On note X le numéro du premier lancer qui amène Pile.

On a vu plus haut que la loi de X était donnée par les relations : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$, ou encore par le tableau

Valeurs de X	1	2	3	4	...	k	...
Probabilités associées	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{2^k}$	...

et que l'espérance de X était $\mathbb{E}(X) = 2$. Calculons maintenant sa variance et son écart-type ; nous aurons pour cela besoin de quelques résultats démontrés plus loin :

Lemme 2 i. Pour tout $-1 < x < 1$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$;

ii. Pour tout $-1 < x < 1$, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

En admettant les résultats de ce lemme, on a donc, en posant $x = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^k + x \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} \\ &= x^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(X)^2 = 4$. Donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 6 - 4 = 2$, et $\sigma_X = \sqrt{2}$.

Il reste à démontrer le lemme :

Preuve

◀ Point i. : on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ (somme des termes d'une série géométrique de raison x). Pour $-1 < x < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$, et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Il suit immédiatement que $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+1} = x \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$.

Point ii. : pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + \sum_{k=1}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Par dérivation en x , il vient $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^{n+1}(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$. Pour $-1 < x < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx^n = 0$ donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-(n+1)x^{n+1}(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

L'autre partie du point ii. se démontre de la même manière, en dérivant une nouvelle fois par rapport à x , et en passant à la limite sur n lorsque $-1 < x < 1$.

Ainsi, on a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (kx^{k-1})' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (kx^{k-1})' = \left(\sum_{k=1}^n kx^{k-1} \right)',$$

la dernière inégalité découlant des propriétés de la dérivation.

D'autre part, comme on l'a vu plus haut,

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^{n+1}(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1 + (n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2},$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n kx^{k-1} \right)' &= \frac{((n+1)(n+2)x^{n+1} - (n+1)(n+2)x^n)(1-x) + 2(1-x)(1 + (n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1})}{(1-x)^4} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)x^{n+1} - (n+1)(n+2)x^n + 2(1 + (n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1})}{(1-x)^3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)x^{n+1} - (n+1)(n+2)x^n + 2 + 2(n+1)x^{n+3} - 2(n+2)x^{n+2}}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Maintenant, lorsque $-1 < x < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)(n+2)x^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)(n+2)x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(n+1)x^{n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(n+2)x^{n+2} = 0,$$

donc

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n kx^{k-1} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

et ceci achève la preuve du point ii. ►

5 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Définition 7 Soit X une variable aléatoire sur un univers probabilisé. On appelle fonction de répartition de X la fonction

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) \end{array} .$$

Remarque 11 Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) = \mathbb{P}(X \in]-\infty; t])$.

Exemple 14 Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par

Valeurs de X	-4	-2	1	5
Probabilités associées	0,1	0,3	0,5	0,1

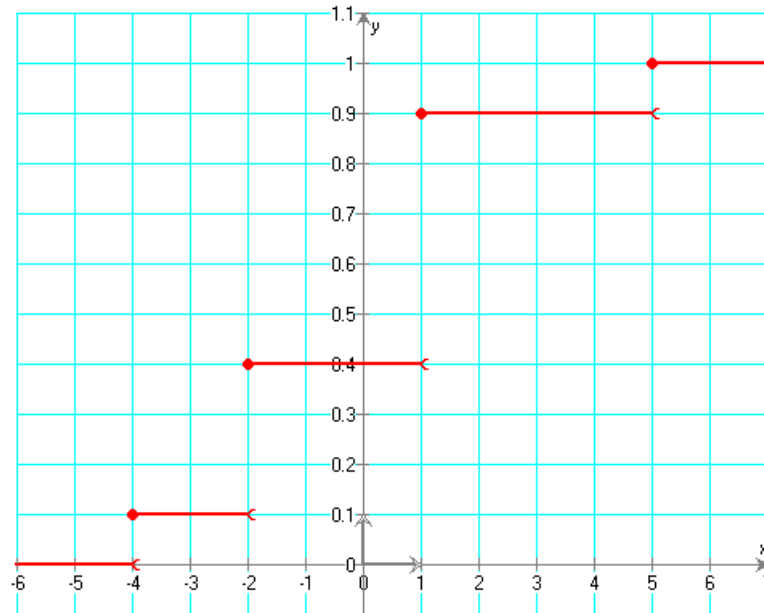


FIG. 1 – Fonction de répartition F_X de la variable aléatoire discrète X

La fonction de répartition F_X de X admet la représentation graphique ci-dessous.

Cette fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par la série de relations suivantes :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty; -4[\\ 0,1 & \text{si } t \in [-4; -2[\\ 0,4 & \text{si } t \in [-2; 1[\\ 0,9 & \text{si } t \in [1; 5[\\ 1 & \text{si } t \in [5; +\infty[\end{cases}.$$

Exercice 1 Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X qui est définie comme étant la valeur obtenue sur le dé.

Exercice 2 Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X qui est définie comme étant la somme des lancers de deux dés traditionnels à 6 faces et équilibrés.

Les principales propriétés d'une fonction de répartition sont les suivantes :

Proposition 3 La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire discrète X a les propriétés suivantes :

- i. F_X est définie sur $\mathbb{R}$;
- ii. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq F_X(t) \leq 1$;
- iii. F_X est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$;
- iv. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$;
- v. F_X est une fonction constante par morceaux sur $\mathbb{R}$ et sa représentation présente des sauts sur les valeurs de X , dont la hauteur traduit la loi de X .

Remarque 12 Il y a une analogie entre la courbe des fréquences cumulées croissantes d'une série statistique discrète et la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.

Les propriétés de l'une et de l'autre sont identiques (voir ci-dessus), ainsi que leurs formes, même si le rapport entre variables aléatoires et séries statistiques est encore à préciser.

Remarque 13 Pour une variable aléatoire discrète, il est équivalent de connaître sa loi, ou sa fonction de répartition : la proposition précédente explique comment obtenir l'une à partir de l'autre (les discontinuités de la fonction de répartition correspondant exactement à la loi de la variable aléatoire).

Exemple 15 Soit X la variable aléatoire dont la fonction de répartition F_X admet la représentation graphique ci-dessous Sa loi est donnée par :

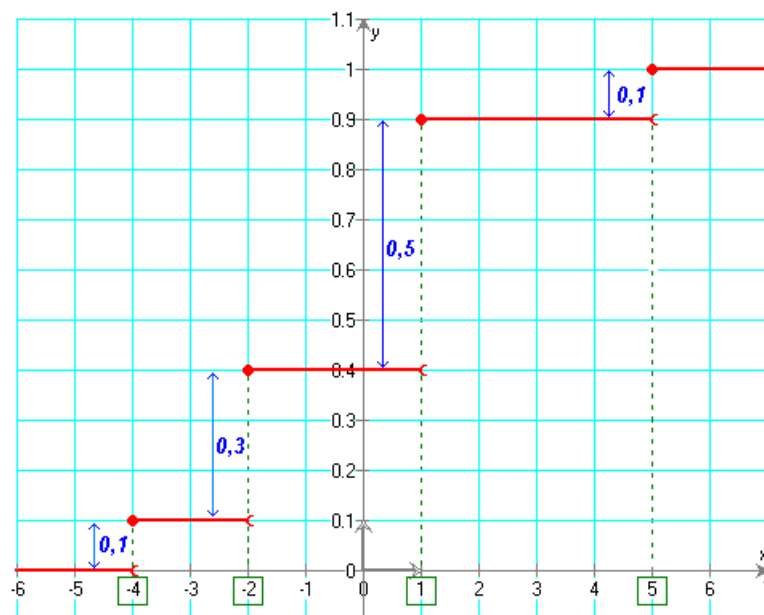


FIG. 2 – Lien entre fonction de répartition F_X de la variable aléatoire discrète X et sa loi

Valeurs de X	-4	-2	1	5
Probabilités associées	0,1	0,3	0,5	0,1

6 Quelques lois classiques et fondamentales

6.1 La loi de Bernoulli

6.1.1 Définition et cadre naturel d'apparition

Cette loi est celle qui traduit le résultat d'une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : échec ou réussite, au regard d'un certain critère. Ce résultat binaire est traduit par une variable aléatoire ne pouvant prendre que deux valeurs : 0 (échec) ou 1 (réussite).

Définition 8 On appelle loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$ la loi d'une variable aléatoire (discrète) X ne prenant que deux valeurs 0 et 1 avec $\mathbb{P}(X = 1) = p$; du coup, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, réel qui est noté q .

6.1.2 Espérance et variance

Théorème 4 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$. Alors on a :

i. La loi de S est donnée par :

Valeurs de X	0	1
Probabilités associées	$1 - p$	p

ii. L'espérance de S est donnée par $\mathbb{E}(S) = p$;

iii. la variance de S est donnée par $\mathbb{V}(S) = p(1 - p) = pq$, où $q = 1 - p$;

iv. L'écart-type de S est donné par $\sigma_S = \sqrt{p(1 - p)} = \sqrt{pq}$, où $q = 1 - p$.

6.1.3 Sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli

Théorème 5 Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p . On considère la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Alors :

- i. La loi de S est donnée par : pour tout $0 \leq k \leq n$, k entier, $\mathbb{P}(Z = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, où $q = 1 - p$;
- ii. L'espérance de S est donnée par $\mathbb{E}(S) = np$;
- iii. la variance de S est donnée par $\mathbb{V}(S) = npq$, où $q = 1 - p$;
- iv. L'écart-type de S est donné par $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{npq}$, où $q = 1 - p$.

Preuve

◀ Ces deux derniers résultats découlent des propriétés de l'espérance et de la variance.

Pour le premier point : soit k entier, avec $0 \leq k \leq n$. L'événement $Z = k$ est réalisé par le fait que k variables X_i valent nécessairement 1 (ce qui laisse C_n^k choix de ces variables), chacune réalisant cet événement avec probabilité p , tandis que les $(n - k)$ restantes valent nécessairement 0 avec probabilité $q = 1 - p$. D'où $\mathbb{P}(Z = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. ▶

Remarque 14 Si les n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ codent les résultats (échec ou réussite) de la répétition n fois d'une même expérience aléatoire dans des conditions assurant l'indépendance de leurs résultats, S compte le nombre de succès constatés dans la série formée par la répétition de cette expérience.

6.2 La loi Binomiale

6.2.1 Définition et cadre naturel d'apparition

Cette loi est celle qui traduit le nombre total de réussites obtenues lors d'un nombre fini de processus aléatoires successifs et indépendants, ne comportant chacun que deux issues possibles à chaque répétition (0 ou 1, ou autrement dit échec ou réussite), chaque processus de la file étant régi par une loi de Bernoulli de paramètre constant au cours du temps.

La loi binomiale est donc obtenue comme loi de la somme de plusieurs variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli, ainsi que nous l'avons rencontré ci-dessus.

Définition 9 Soit $0 \leq p \leq 1$. On appelle loi Binomiale de paramètres n et p la loi, notée $\mathcal{B}(n; p)$ d'une variable aléatoire X discrète prenant les $n + 1$ valeurs entières de 0 à n , avec

$$\text{pour tout } k \text{ entier, } 0 \leq k \leq n, \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

où $q = 1 - p$.

6.2.2 Espérance et variance

Résumons ce que nous savons déjà, pour mémoire :

Théorème 6 Soit $0 \leq p \leq 1$, et $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p (On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p)$). Alors :

- i. L'espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = np$;
- ii. la variance de X est donnée par $\mathbb{V}(X) = np(1 - p) = npq$, où $q = 1 - p$;
- iii. L'écart-type de X est donné par $\sigma_X = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{npq}$, où $q = 1 - p$.

Preuve

◀ Ces résultats sont une reformulation des résultats du théorème précédent. ▶

6.2.3 Situations conduisant à l'étude de variables aléatoires suivant une loi Binomiale

L'exemple ci-dessous montre que cette approche peut être très utile dans la compréhension de phénomènes d'actualité fort concrets :

Exemple 16 *Le clan mafieux ("Canal Historique") de César Angéli avait la main sur le trafic de pastis frelaté, mais les descentes de police ont eu raison de la plupart de ses hommes, aujourd'hui emprisonnés sur le Continent. Charly Pasquali, le chef du clan rival ("Canal Pastaga") en a profité, et commence à concurrencer dangereusement les affaires de César Angéli.*

Décidé à ne pas perdre la face, ce dernier propose 10 "contrats" à Raoul Volfoni, alias "Raoul-la-Gachette", pour décimer le clan Pasquali (10 "contrats", un par mois, mais pas en été, car il fait trop chaud sur l'Île de Beauté).

Ce tueur à gages est surtout un tueur à la gomme, car, en homme d'honneur, il n'utilise pas les explosifs pour réaliser ses "contrats" : il préfère les méthodes traditionnelles d'embuscade dans le maquis. Mais, comme son chef César Angéli, Raoul a vieilli en même temps que ses méthodes, et aujourd'hui on estime à 0,2 sa probabilité de "descendre" une cible lors d'une tentative d'assassinat.

César Angéli a par ailleurs été formel : il ne doit pas y avoir plus d'une tentative d'assassinat sur chaque tête du clan Pasquali, car il faut pouvoir faire croire à des "accidents". Par ailleurs, les tentatives de Raoul-la-Gachette sont couronnées de succès ou non, mais toujours indépendamment les unes des autres.

On note X le nombre de "contrats" que Raoul sera en mesure d'honorer cette année pour le compte de César Angéli. Ce dernier, brutalement soucieux à l'heure de la sieste, ne parvient pas à trouver le sommeil, et convoque ses meilleurs amis, pour connaître :

1°) la probabilité de chacune des valeurs de X ;

2°) la rentabilité de Raoul, c'est-à-dire le nombre moyen de "contrats" qu'il sera en mesure d'honorer cette année ;

3°) la probabilité de réussir strictement moins de 2 assassinats, ce qui ridiculiserait le "Canal Historique" du vieux César Angéli aux yeux du "Canal Pastaga" de Charly Pasquali (qui préfère, lui, les explosifs ... et n'hésiterait pas à s'en servir si d'aventure le "Canal Historique" s'avérait très affaibli). Aidez-vous César Angéli à profiter enfin de sa sieste reconfortante ?

Réponses : *Pour répondre aux questions de César Angéli, notons X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si Raoul réussit sa i -ème tentative d'assassinat, et 0 sinon.*

Le nombre total de "contrats" remplis par Raoul est alors $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$. Chaque variable aléatoire X_i est une variable de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$, et les X_i sont supposées indépendantes entre elles. Donc X suit une loi Binomiale, de paramètres 10 et 0,2. On a donc $X \sim \mathcal{B}(10; 0,2)$, ce qui signifie que, pour tout $k = 0; 1; \dots; 10$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k} (0,2)^k (0,8)^{10-k}.$$

Nous pouvons donc présenter au chef du "Canal historique" les probabilités des diverses valeurs de X (arrondies à 10^{-3} près) :

Valeurs de X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilités	0,107	0,268	0,302	0,201	0,088	0,026	0,006	0,001	0	0	0

Le nombre moyen de contrats assurés par Raoul est $\mathbb{E}(X) = 10 \times 0,2 = 2$. Enfin, la probabilité pour le "Canal Historique" de César Angéli de se ridiculiser en assurant strictement moins de 2 assassinats est

$$\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}((X = 0) \cup (X = 1)) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \simeq 0,375$$

car les événements $(X = 0)$ et $(X = 1)$ sont incompatibles. César Angéli peut être légitimement inquiet, mais son rival Charly Pasquali n'a pas encore la main sur le marché du pastis corse de contrebande !

6.3 La loi de Poisson

6.3.1 Définition et cadre naturel d'apparition

Cette loi est la loi des processus assimilables à l'étude des temps d'attente (dans une file, ou à une caisse de supermarché par exemple). Elle modélise aussi les situations de panne d'un appareil (temps d'attente avant la panne ...)

Définition 10 *Soit $\lambda > 0$. On appelle loi de Poisson de paramètre λ la loi, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ d'une variable aléatoire X discrète prenant toutes les valeurs entières naturelles (0, 1, 2, 3, ... etc.), avec*

$$\text{pour tout } k \text{ entier, } \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

6.3.2 Tables de la loi de Poisson

Les valeurs des probabilités d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson présentaient des difficultés de calculs pratiques, avant que les calculatrices et les ordinateurs ne fassent leur apparition. On avait donc calculé les valeurs de ces probabilités pour diverses valeurs de k et λ , et regroupé les résultats dans des tables. Elles sont (en partie) reprises dans les formulaires d'examens, ainsi que dans la plupart des ouvrages sur le sujet.

6.3.3 Espérance et variance

Théorème 7 Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ (On note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$). Alors :

- i. L'espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \lambda$;
- ii. la variance de X est donnée par $\mathbb{V}(X) = \lambda$;
- iii. L'écart-type de X est donné par $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$.

6.3.4 La loi de Poisson comme loi limite

Une des applications de la loi de Poisson est de fournir une approximation de certaines lois binomiales.

Exemple 17 Dans une entreprise, on estime que la probabilité pour un article fabriqué d'être défectueux est de $p = 0,05$ (Cette valeur a été obtenue en accumulant une grande série de tests). On prélève dans un stock de 80000 pièces 120 articles. On s'intéresse au nombre d'articles défectueux dans l'échantillon prélevé.

Hypothèses Bien que le choix des articles prélevés se fasse sans remise, on considère que le stock contient suffisamment d'articles pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

Ceci revient à formuler l'hypothèse que le prélèvement de 120 articles sur les 80000 ne modifie pratiquement pas la composition globale du stock.

Modélisation Sous les hypothèses précédentes, tout se passe comme si l'on procédait à l'expérience suivante : On retire du stock un article, on le teste, on relève s'il est conforme ou non, et on le remet dans le stock. On prélève alors une autre pièce, on la teste, et on la remet, etc. L'expérience est donc une série d'épreuves de Bernoulli indépendantes, et on s'intéresse au nombre d'échecs relevés dans la série.

Ainsi, si X est la variable aléatoire égale au nombre d'articles défectueux sur la série de 120 prélèvements, on peut affirmer que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 120$, et $p = 0,05$. De plus, $\mathbb{E}(X) = np = 120 \times 0,05 = 6$.

Loi binomiale, ou loi de Poisson ? Observons les probabilités approchées des diverses valeurs de X (suivant une binomiale $\mathcal{B}(120; 0,05)$), et Y (suivant une Poisson $\mathcal{P}(6)$) :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	0,002	0,013	0,041	0,087	0,134	0,163	0,165	0,141	0,105	0,069	0,040	0,021	0,010
$\mathbb{P}(Y = k)$	0,002	0,015	0,045	0,089	0,134	0,161	0,161	0,138	0,103	0,069	0,041	0,023	0,011

On constate que les lois de X et de Y sont finalement assez proches.

On peut donc considérer que X et Y suivent pratiquement la même loi, et donc que l'on peut estimer que X suit pratiquement une loi de Poisson de paramètre 6.

Théorème 8 Soit $0 \leq p \leq 1$, et $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Si n est "assez grand", si p est "assez petit" et si np n'est "pas trop grand", alors on peut raisonnablement considérer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \mathbb{E}(X) = np$.

Remarque 15 Conditions usuelles d'application du théorème sur les valeurs de n et p : pour que ce théorème soit applicable, autrement dit pour réaliser une assez bonne approximation de $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p)$ par $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(np)$, on doit se trouver dans les cas :

	n	p	np
Situation 1	$n \geq 30$	$p \leq 0,1$	$np \leq 15$
Situation 2	$n \geq 50$	$p \leq 0,1$	$np \leq 10$

Remarque 16 On notera que si X suit une $\mathcal{B}(n; p)$, on a $\mathbb{E}(X) = np$, et que $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$.

Si l'on réalise une approximation de X par Y suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, il faut - au moins - faire en sorte que cette dernière variable aléatoire ait une espérance et une variance proches de celles de X . Comme par ailleurs $\mathbb{E}(Y) = \lambda$, et que $\mathbb{V}(Y) = \lambda$, on choisit $\lambda = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) = np$. On constate alors que $\mathbb{V}(Y) = \lambda = np \simeq np(1 - p)$ si l'on formule l'hypothèse que p est proche de 0.

Table des matières

1	Notion de variable aléatoire discrète	1
1.1	Définitions. Exemples	1
1.2	Variables aléatoires discrètes	2
2	Loi d'une variable aléatoire discrète	2
3	Espérance d'une variable aléatoire discrète	3
4	Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète	4
5	Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète	6
6	Quelques lois classiques et fondamentales	8
6.1	La loi de Bernoulli	8
6.1.1	Définition et cadre naturel d'apparition	8
6.1.2	Espérance et variance	8
6.1.3	Sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli	9
6.2	La loi Binomiale	9
6.2.1	Définition et cadre naturel d'apparition	9
6.2.2	Espérance et variance	9
6.2.3	Situations conduisant à l'étude de variables aléatoires suivant une loi Binomiale	10
6.3	La loi de Poisson	10
6.3.1	Définition et cadre naturel d'apparition	10
6.3.2	Tables de la loi de Poisson	11
6.3.3	Espérance et variance	11
6.3.4	La loi de Poisson comme loi limite	11