Variables aléatoires réelles continues

1 Variables aléatoires continues : généralités

1.1 Nécessité de considérer des variables aléatoires continues

Les variables aléatoires discrètes sont malheureusement bien insuffisantes pour rendre compte de résultats dont les valeurs ne sont pas nécessairement entières. Intéressons-nous aux expériences aléatoires suivantes :

Exemple 1 *On choisit au hasard un point sur le segment* $[0; 2]$ *de la droite réelle. On note* X *la valeur obtenue. L'univers de cette expérience aléatoire est l'intervalle* $[0; 2]$*, et la variable aléatoire* X *est évidemment à valeurs dans* $[0; 2]$*.*
Ici, les valeurs de X *possibles sont trop proches les unes des autres (en fait, infiniment proche) et on ne peut donc pas parler de variables aléatoire discrète.*
On dit que X *est une variable aléatoire continue.*

Définition 1 *Une variable aléatoire continue est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un intervalle de* $\mathbb{R}$*.*

Remarque 1 *Ainsi, une variable aléatoire continue est une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont (au moins théoriquement) toutes infiniment proches les unes des autres, et dont aucune ne peut être séparée d'autres valeurs de la variable aléatoire (au moins en théorie).*

Exemple 2 *On mesure la longueurs de tiges métalliques immédiatement après leur production. On note* X *le résultat de l'expérience aléatoire qui consiste à faire correspondre à une tige choisie au hasard sa longueur. Il s'agit d'une variable aléatoire définie sur l'univers formé de l'ensemble des tiges, à valeurs dans* $[0; +\infty[$*, donc à valeurs réelles.*
Dans la mesure où les longueurs possibles peuvent être (au moins théoriquement) infiniment proches les unes des autres, la variable aléatoire X *est continue.*

1.2 Impossibilité de donner simplement la loi d'une variable aléatoire continue

Contrairement à ce qui se passait pour une variable aléatoire discrète, il n'est pas possible de donner le nombre $\mathbb{P}(X = r)$ pour toutes les valeurs de $r \in \mathbb{R}$. Par contre, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, il est possible de donner la valeur de $\mathbb{P}(I)$. Prenons un exemple :

Exemple 3 *On choisit au hasard un point sur le segment* $[0; 2]$ *de la droite réelle. On note* X *la valeur obtenue. On a déjà vu que* X *était une variable aléatoire continue.*
Cherchons à donner la loi de X*. Nous pouvons supposer que la situation est un cas d'équiprobabilité (il n'y a pas de raison de choisir un point particulier plutôt qu'un autre). Dans les cas d'équiprobabilité, on a vu en Probabilité que l'on a*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$$

pour tout événement A*.*
Considérons ici l'événement $A = \{r\}$*. Nous pouvons estimer que la probabilité de choisir un point* r *particulier de* $[0; 1]$ *est donnée par*

$$\mathbb{P}(r) = \frac{0}{+\infty},$$

en nous inspirant de la formule précédente. Mais les règles habituelles sur les limites conduisent à penser que la seule valeur raisonnable que l'on peut donner à ce quotient est 0*.*

Donc, pour tout $r \in [0;2]$, on a $\mathbb{P}(r) = 0$. Autrement dit, la probabilité de choisir 0 est nulle, celle de choisir 1 est nulle, tout comme celle de $\dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{1}{3}$, et de manière générale comme celle de choisir un réel r particulier de $[0;1]$.
En particulier, on peut, pour tout réel $t \in [0;1]$ estimer correctement $\mathbb{P}(X \in [0;t])$, qui vaut aussi $\mathbb{P}(X \leq t)$, puisque X ne peut pas prendre de valeurs négatives. On a ainsi, en décidant que la probabilité de choix d'un intervalle est proportionnel à sa longueur :

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \frac{t}{2} = \frac{1}{2}t.$$

Autrement dit, on est en mesure de donner l'expression de la fonction de répartition de la variable aléatoire X. Cette fonction est

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & F_X(t) \text{ avec } \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \frac{1}{2}t \text{ si } 0 \leq t \leq 2 \\ 1 \text{ si } 1 \leq t \end{cases} \end{array}.$$

Ainsi, dans le cas d'une variable aléatoire continue, on ne peut pas connaître la loi de la variable, mais on peut en connaître la fonction de répartition ... C'est donc sur elle que nous allons nous appuyer pour connaître la variable aléatoire X.

1.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

Dans l'exemple précédent, on a vu qu'on ne pouvait pas connaître la loi d'une variable aléatoire continue comme celle d'une variable. Par contre, on a montré qu'il était possible de calculer la probabilité $\mathbb{P}(I)$ de choisir un élément qui soit dans le sous-intervalle I de $[0;1]$. En particulier, il était possible de déterminer une fonction de répartition pour cette variable aléatoire, en reprenant la définition choisie pour une variable aléatoire discrète. Nous adopterons donc le point de vue suivant :

Définition 2 *Soit X une variable aléatoire continue sur un univers probabilisé. On appelle fonction de répartition de X la fonction*

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) \end{array}.$$

Remarque 2 *Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) = \mathbb{P}(X \in]-\infty;t])$.*

Les principales propriétés d'une fonction de répartition sont les mêmes que celles obtenues dans le cas discret. Rappelons-les pour mémoire :

Proposition 1 *La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire continue X a les propriétés suivantes :*

i. *F_X est définie sur $\mathbb{R}$;*

ii. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq F_X(t) \leq 1$;*

iii. *F_X est une fonction croissante et continue sur $\mathbb{R}$ (sa représentation graphique est sans "sauts") ;*

iv. $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ *et* $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

Remarque 3 *Il y a une analogie entre la courbe des fréquences cumulées croissantes d'une série statistique continue et la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue.*
Les propriétés de lune et de l'autre sont identiques (voir ci-dessus), ainsi que leurs formes, même si le rapport entre variables aléatoires et séries statistiques est encore à préciser.

Théorème 2 *Soit X une variable aléatoire continue sur un univers probabilisé. Soient a et b deux réels ($a < b$). Alors*

$$\mathbb{P}(X \in [a;b]) = \mathbb{P}(X \in]a;b[) = \mathbb{P}(X \in [a;b[) = \mathbb{P}(X \in [a;b[) = F_X(b) - F_X(a).$$

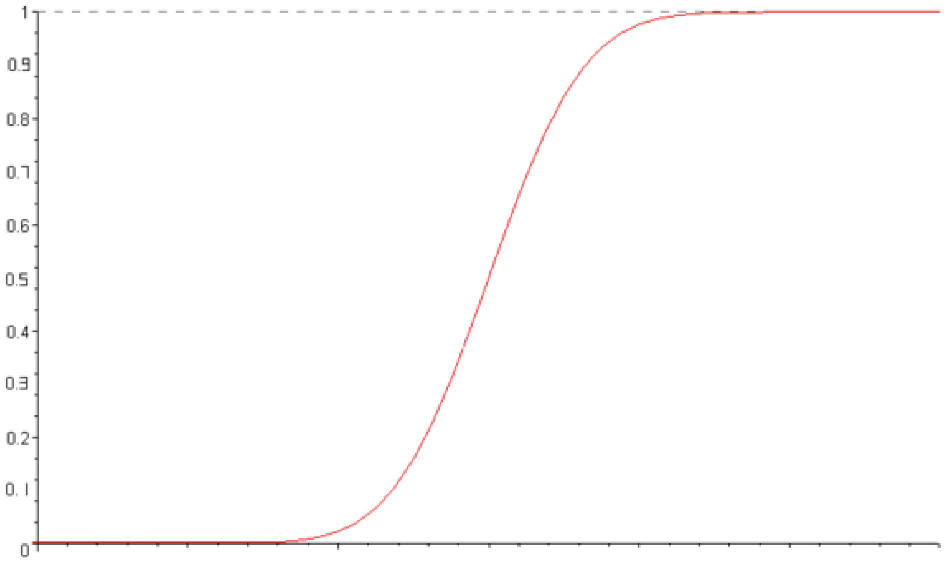

FIG. 1 – Allure générale d'une fonction de répartition

Preuve

◀ Les premières égalités sont basées sur le fait que X est une varaible aléatoire continue, donc que $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = 0$. La dernière égalité s'obtient quant à elle en remarquant d'abord que l'événement $(a \leq X \leq b)$ a pour contraire l'événement $(X > b) \cup (X < a)$, et que les événements $(X > b)$ et $(X < a)$ sont disjoints. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= 1 - \mathbb{P}((X > b) \cup (X < a)) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(X > b) + \mathbb{P}(X < a)) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > b) - \mathbb{P}(X < a) \\
&= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) \text{ car } X \text{ est continue} \\
&= F_X(b) - F_X(a).
\end{aligned}$$

▶

Cet important théorème indique comment la connaissance de la fonction de répartition permet de calculer toutes les probabilités des événements $X \in I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On retrouve ici le phénomène qui avait été observé au paragraphe précédent, dans lequel on montré que la connaissance de la loi d'une variable aléatoire continue était illusoire. Cependant, puisqu'il est possible de connaître toutes les probabilités $\mathbb{P}(X \in I)$, où I est un intervalle, connaître la loi de X revient en fait à connaître sa fonction de répartition F_X :

Théorème 3 *Soit X une variable aléatoire continue sur un univers probabilisé. Alors connaître la loi de X revient à connaître sa fonction de répartition F_X.*

1.4 Densité d'une variable aléatoire absolument continue

Définition 3 *Soit X une variable aléatoire continue sur un univers probabilisé, dont la fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ est notée F_X. On dit que X est absolument continue si F_X est une fonction dérivable.*

Définition 4 *Soit X une variable aléatoire absolument continue sur un univers probabilisé. On appelle densité de X la fonction F'_X sur $\mathbb{R}$.*

Expliquons à présent comment la connaissance de la densité d'une variable aléatoire X absolument continue permet de connaître la loi de X :

Théorème 4 *Soit X une variable aléatoire absolument continue sur un univers probabilisé. Soient a et b deux réels, avec $a < b$. On note F_X la fonction de répartition de X, et f_X sa densité. Alors on a :*

$$f_X = F'_X \text{ et}$$

$$\mathbb{P}(X \in [a;b]) = \mathbb{P}(X \in]a;b[) = \mathbb{P}(X \in [a;b[) = \mathbb{P}(X \in [a;b[) = \int_b^a f_X(x)dt;$$

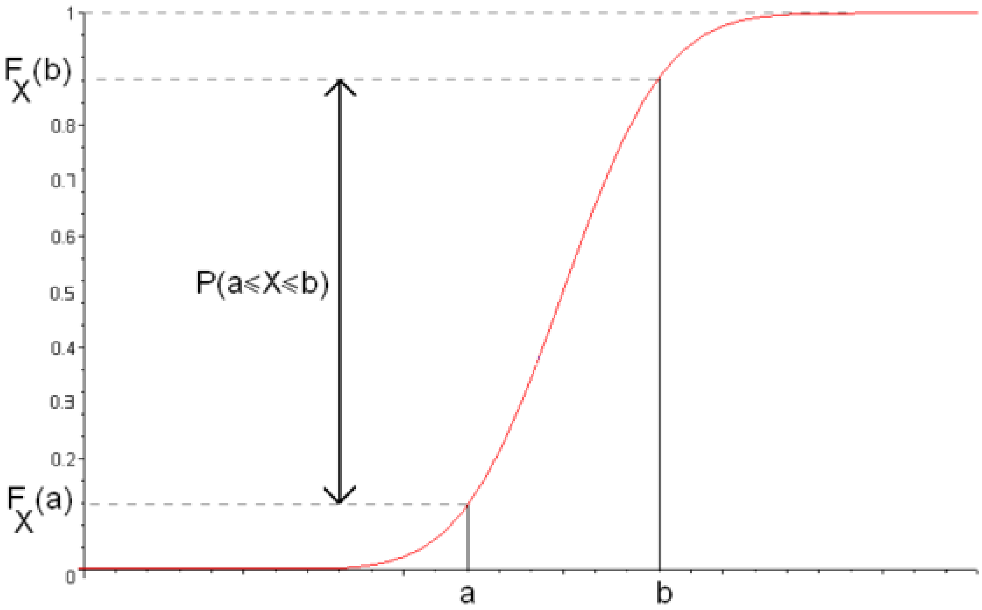

FIG. 2 – La fonction de répartition F_X de X détermine la loi de X

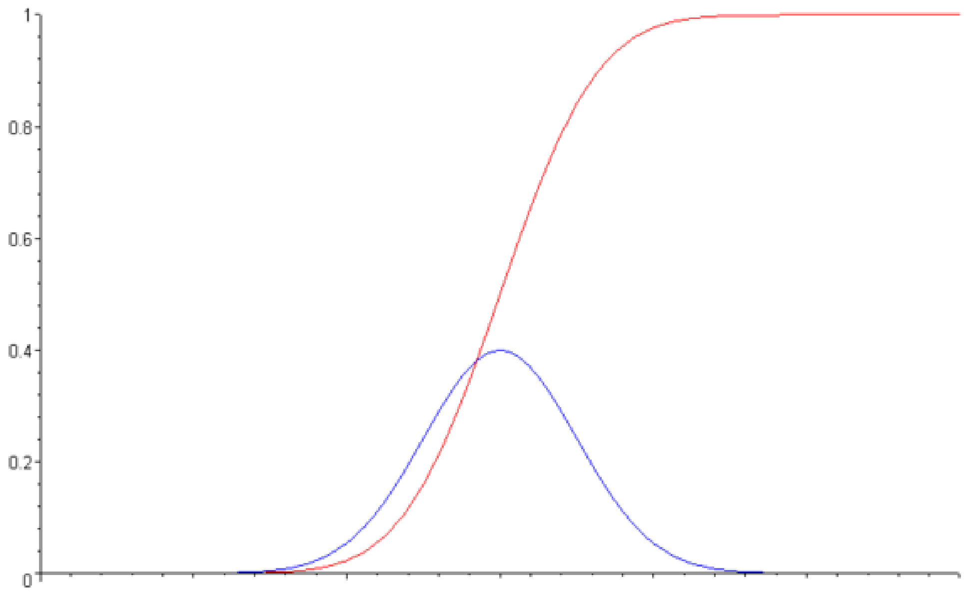

FIG. 3 – Lien entre fonction de répartition et densité

On en tire aussi le résultat suivant :

Corollaire 5 *Soit X une variable aléatoire absolument continue sur un univers probabilisé. Alors connaître la loi de X revient à connaître sa densité f_X.*

Des exemples de toutes ces notions seront vus plus tard, lors de l'étude des lois de certaines variables aléatoires continues classiques (Loi exponentielle, loi normale).

Remarque 4 *(Intégrale impropre) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction primitivable. On note*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ à la place de } \lim_{A\to-\infty} \lim_{B\to+\infty} \int_A^B f(x)dx,$$

si cette (double) limite existe.

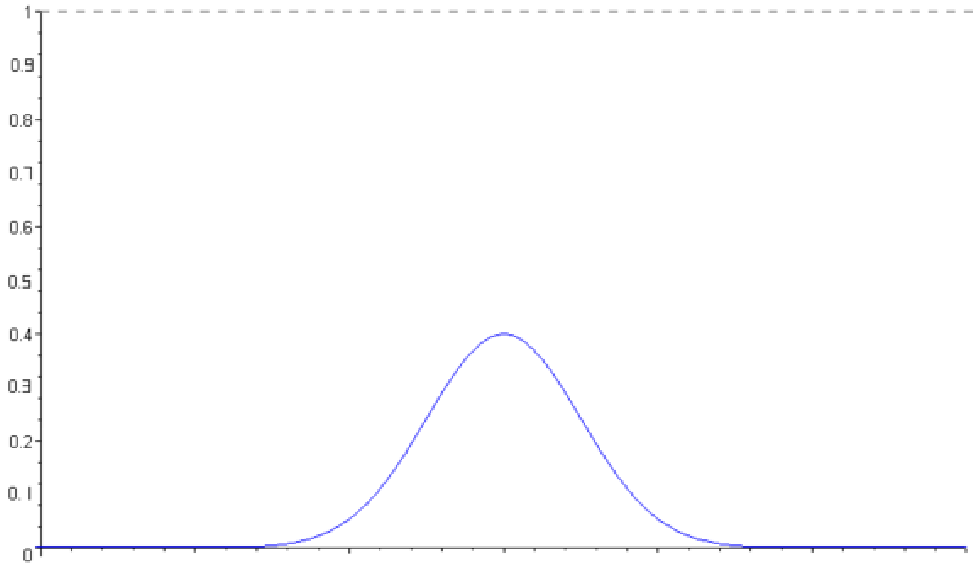

FIG. 4 – Allure d'une fonction de densité de probabilité

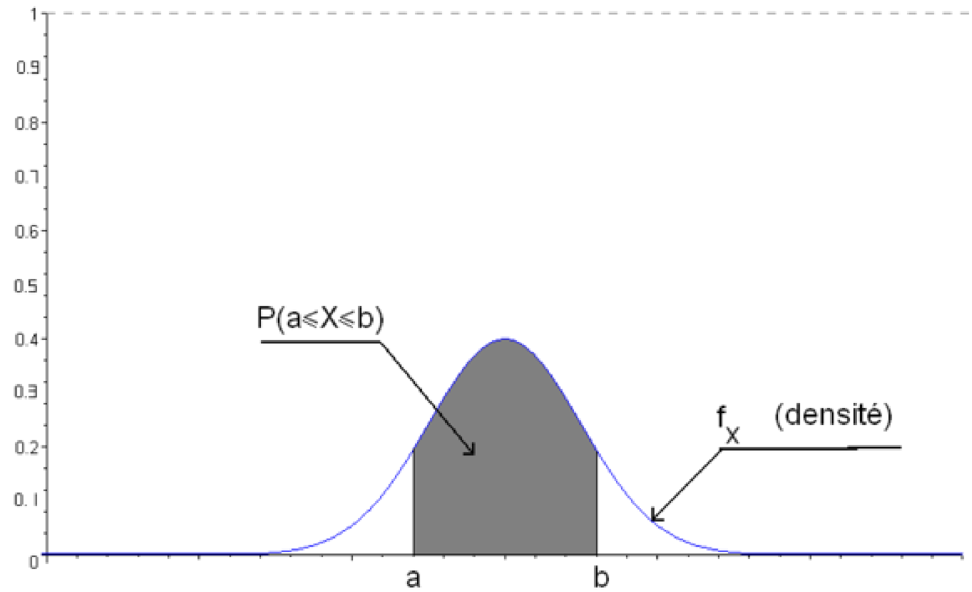

FIG. 5 – La fonction de densité f_X de X détermine la loi de X

Notons que cette limite n'est pas nécessairement un nombre réel fini, et que donc la précaution prise plus haut n'est pas seulement oratoire, comme le montre les deux exemples suivants.

Exemple 4 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par la relation* $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & si\ x \notin [-1;1] \\ 1 & si\ x \in [-1;1] \end{cases}$. *Soient* $A < -1$ *et* $B > 1$ *deux réels. Alors on a :*

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(x)dx &= \int_A^1 f(x)dx + \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^B f(x)dx &&= \int_A^1 \frac{1}{x^2}dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^B \frac{1}{x^2}dx \\
&= \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=A}^{x=-1} + [x]_{x=-1}^{x=1} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=B} &&= 1 + \frac{1}{A} + 2 + \frac{1}{B} + 1 \\
&= 4 + \frac{1}{A} + \frac{1}{B}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{A\to-\infty}\lim\limits_{B\to+\infty} 4+\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=0$, *on a donc* $\lim\limits_{A\to-\infty}\lim\limits_{B\to+\infty}\displaystyle\int_A^B f(x)dx = 4$, *et donc cette (double) limite existe et est finie. On peut donc écrire*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 4.$$

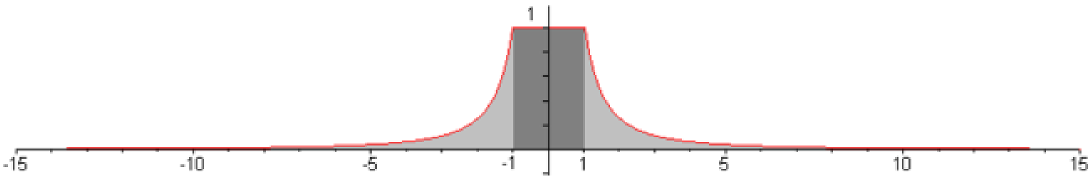

FIG. 6 – Courbe représentative de la fonction de l'exercice 4

Exemple 5 *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *la fonction définie par la relation* $f(x)=\begin{cases} 1/|x| & \text{si } x\notin[-1;1] \\ 1 & \text{si } x\in[-1;1]\end{cases}$. *Soient* $A<-1$ *et* $B>1$ *deux réels. Alors on a :*

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(x)dx &= \int_A^1 f(x)dx + \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^B f(x)dx &&= \int_A^1 -\frac{1}{x}dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^B \frac{1}{x}dx \\
&= [-\ln(-x)]_{x=A}^{x=-1} + [x]_{x=-1}^{x=1} + [\ln(x)]_{x=1}^{x=B} &&= \ln(-A)+2+\ln(B) \\
&= 2+\ln(-A)+\ln(B)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{A\to-\infty}\lim\limits_{B\to+\infty} 2+\ln(-A)+\ln(B)=+\infty$, *on a donc* $\lim\limits_{A\to-\infty}\lim\limits_{B\to+\infty}\displaystyle\int_A^B f(x)dx$ *qui est une quantité infinie, et qui donc n'est pas un réel fini. L'écriture* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *n'a donc pas de sens.*

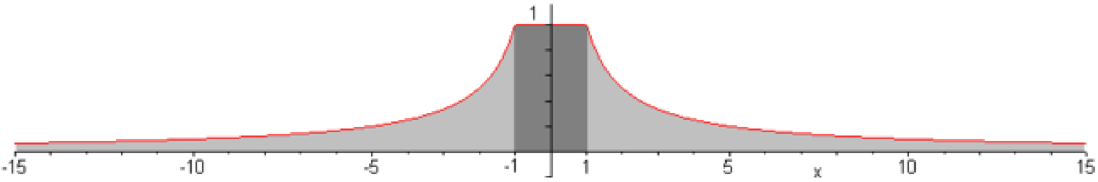

FIG. 7 – Courbe représentative de la fonction de l'exercice 5

Proposition 6 *Soit* X *une variable aléatoire absolument continue, de densité* f_X. *Alors les propriétés de* f_X *sont les suivantes :*

i. f_X *est définie sur* $\mathbb{R}$ *;*

ii. $f_X \geq 0$ *;*

iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$ *;*

1.5 Espérance d'une variable aléatoire continue

Définition 5 *Soit* X *une variable aléatoire absolument continue sur un univers probabilisé. Soit* f_X *la densité de* X. *On appelle* <u>*espérance*</u> *de* X *le réel, noté* $\mathbb{E}(X)$, *défini par la relation*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)dx,$$

si cette dernière quantité est finie.

1.6 Variance et écart-type d'une variable aléatoire continue

Définition 6 *Soit X une variable aléatoire absolument continue sur un univers probabilisé. On appelle variance de X le réel, noté $\mathbb{V}(X)$, qui, s'il existe, est défini par la relation*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Remarque 5 *La variance d'une variable aléatoire X est donc l'espérance de la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$. Ceci est également valable pour des variables discrètes. Pour une variable aléatoire X continue, de densité f_X, on a :*

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x)dx.$$

Définition 7 *Soit X une variable aléatoire absolument continue sur un univers probabilisé, admettant une variance $\mathbb{V}(X)$. On appelle écart-type de X le réel, noté σ_X, défini par la relation*

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Les deux paragraphes qui suivent donnent l'exemple de deux familles de lois classiques et fondamentales de variables aléatoires continues que l'on rencontre dans les domaines industriels (étude de la fiabilité, et mise au point de contrôle de qualité).

2 La loi Exponentielle

2.1 Définition et cadre naturel d'apparition

Cette loi se rencontre lors de l'étude de problèmes liés à la fiabilité d'un équipement. Ce problème, éminemment concret, sera abordé (superficiellement) plus tard dans l'année. Nous nous contentons de donner ici les bases mathématiques nécessaires à cette étude.

Définition 8 *On appelle loi Exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ la loi d'une variable aléatoire continue X prenant toutes les valeurs réelles positives, de densité de probabilité la fonction*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}.$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

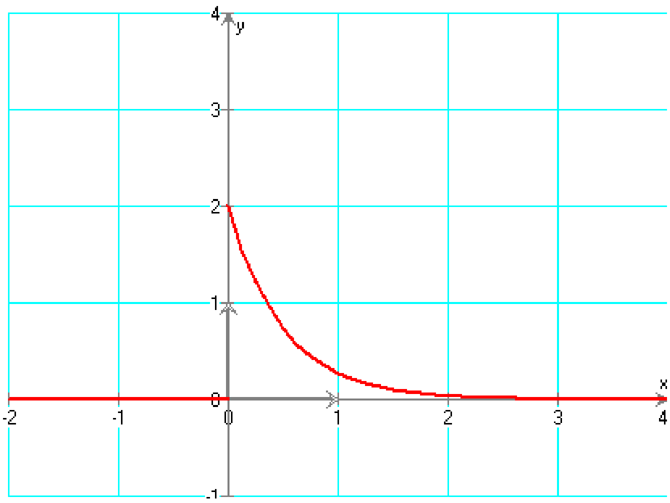

FIG. 8 – Fonction de densité de la loi $\mathcal{E}(2)$

Remarque 6 *On a donc en clair, pour tous $a \leq b$ réels,*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b 0.dx = 0 & si\ a \leq b < 0 \\ \displaystyle\int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda b} & si\ a \leq 0 \leq b \\ \displaystyle\int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} & si\ 0 < a \leq b. \end{cases}$$

La fonction de répartition associée à une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est donc la fonction

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Comme d'habitude, cette fonction de répartition permet, pour tous $a; b$ réels avec $a \leq b$, le calcul de $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$, par la relation

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a),$$

où l'expression de F_X est celle figurant ci-dessus.

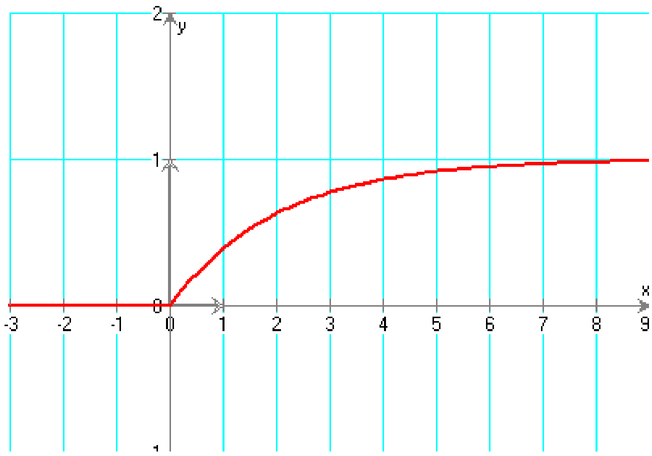

FIG. 9 – Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$

Remarque 7 *Attention à la confusion entre la loi Exponentielle et la loi de Poisson : la loi continue (Exponentielle) et la loi discrète (de Poisson) ont un rapport, mais il n'est pas complètement immédiat (à part le paramètre, et la présence d'une exponentielle) !*

2.2 Espérance et variance

Théorème 7 *Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi Exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors X admet une espérance, une variance et un écart-type, qui sont données par les relations*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}\ ,\ \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}\ et\ \sigma_X = \frac{1}{\lambda}.$$

Preuve

◀ Commençons par le calcul de l'espérance $\mathbb{E}(X) = \lim\limits_{a \to -\infty} \lim\limits_{b \to +\infty} \displaystyle\int_a^b t.f_X(t)dt = \lim\limits_{b \to +\infty} \displaystyle\int_0^b \lambda t e^{-\lambda t} dt$. Or, pour tout $b > 0$, et en intégrant par parties :

$$\int_0^b \lambda t e^{-\lambda t} dt = \left[-\lambda t \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^b + \lambda \int_0^b \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} dt = -be^{-\lambda b} + \int_0^b e^{-\lambda t} dt = be^{-\lambda b} + \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^b = -be^{-\lambda b} - \frac{e^{-\lambda b}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}.$$

or $\lim\limits_{b \to +\infty} \left(-be^{-\lambda b} - \dfrac{e^{-\lambda b}}{\lambda}\right) = 0$, donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Pour le calcul de la variance, nous utilisons le théorème de LEIBNIZ, soit la relation $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, ce qui suppose de commencer par le calcul de $\mathbb{E}(X^2) = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b t^2.f_X(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt$. Or, pour tout $b > 0$, et en intégrant par parties une première fois :

$$\begin{aligned}
\int_0^b \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt &= \left[-\lambda t^2 \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^b + 2\lambda \int_0^b t\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}dt = -b^2e^{-\lambda b} + 2\int_0^b te^{-\lambda t}dt = -b^2e^{-\lambda b} + \frac{2}{\lambda}\int_0^b \lambda te^{-\lambda t}dt \\
&= -b^2e^{-\lambda b} + \frac{2}{\lambda}\left(-be^{-\lambda b} - \frac{e^{-\lambda b}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) = -b^2e^{-\lambda b} + \frac{2}{\lambda}\left(-be^{-\lambda b} - \frac{e^{-\lambda b}}{\lambda}\right) + \frac{2}{\lambda^2} \\
&= e^{-\lambda b}\left(-b^2 - \frac{2}{\lambda}b - \frac{2}{\lambda^2}\right) + \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

or $\lim_{b\to+\infty} e^{-\lambda b}\left(-b^2 - \frac{2}{\lambda}b - \frac{2}{\lambda^2}\right) = 0$, donc $\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$. Il suit donc $\mathbb{V}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$, et comme $\lambda > 0$, $\sigma_X = \frac{1}{\lambda}$, ce qui achève la preuve. ▶

2.3 Lois exponentielles et études de fiabilité

2.3.1 Modélisation de la fiabilité d'un appareil

Considérons un appareil neuf, dont on va observer le comportement au cours du temps. Intuitivement, au début de la vie de l'appareil, la probabilité qu'il ne soit plus en état de marche est pratiquement nulle, puis elle augmente au cours du temps, pour finir par s'approcher de 1 (il est certain qu'au bout d'un temps infini de fonctionnement, l'appareil finira par ne plus fonctionner).

L'évolution de cette probabilité que l'appareil ne fonctionne plus au cours du temps est donc proche de

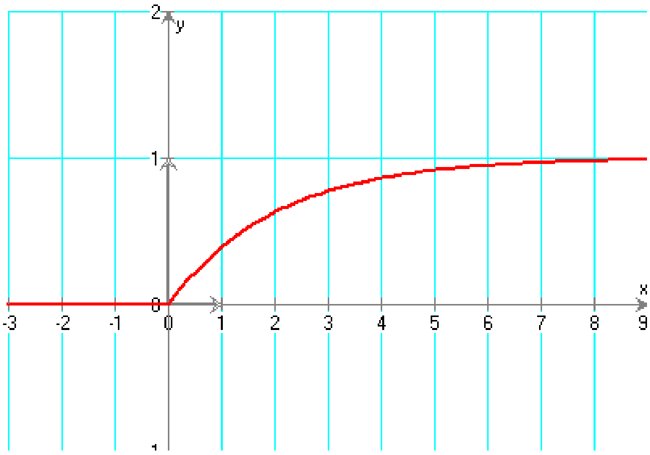

FIG. 10 – Probabilité de dysfonctionnement au cours du temps

la représentation graphique de la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Cette fonction de répartition fournit donc un premier modèle de l'évolution de la probabilité de dysfonctionnement de l'appareil.

Autrement dit, on peut modéliser le phénomène d'usure au cours du temps en convenant que celle-ci vaut $F_T(t)$, définie par une fonction du type

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

qui est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire bien choisie, suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Cette fonction est appelée **fonction de défaillance** de l'appareil. Elle modélise la probabilité de d'une panne due au vieillissement de l'appareil, et dépend d'un paramètre $\lambda > 0$, qui caractérise ce vieillissement.

2.3.2 Interprétation du paramètre λ

La modélisation étant faite, il reste à comprendre ce que représente le paramètre λ !

Notons T la variable aléatoire qui mesure le temps de bon fonctionnement de l'appareil après l'achat (correspondant à la valeur $T = 0$). Si t est une date dans le temps (mesuré à partir de l'achat), alors le fait que l'appareille fonctionne jusqu'à l'instant t est l'événement $(T > t)$. Son contraire est l'événement $(T \leq t)$, qui peut être décrit par : "l'appareil ne fonctionne pas au delà de l'instant t".
Or la probabilité que ce dernier événement $(T \leq t)$ se réalise est, comme on l'a vu, modélisée par $F(t)$, ce qui revient à dire que T suit une loi exponentielle de paramètre λ ! Donc la fonction de répartition de T est donnée par F :

$$\mathbb{P}(T \leq t) = F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

T étant une variable aléatoire continue, elle admet une densité, qui est par définition $f_T(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{P}(T \leq t)$.
Dans notre cas, compte tenu de l'expression de F, on a

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

La connaissance de cette densité permet le calcul de l'espérance $\mathbb{E}(T)$ de T (valeur moyenne du temps de bon fonctionnement) :

$$\mathbb{E}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}dt = \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} t dt = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Donc $\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}(T)}$.

la conclusion de cette étude est la suivante :
le paramètre λ représente l'inverse du temps moyen de bon fonctionnement (MTBF).

Remarque 8 *En toute rigeur, MTBF signifie : "moyenne des temps de bon fonctionnement". Elle revient évidemment à approcher empiriquement le temps moyen de bon fonctionnement (voir le chapitre consacré à l'estimation).*

2.3.3 Généralisation

Un appareil ayant un temps moyen de bon fonctionnement noté MTBF, on peut étudier la fiabilité de cet appareil au moyen d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle. Plus précisément, si T est la variable aléatoire égale au temps de bon fonctionnement de cet appareil, mesuré depuis l'instant $T = 0$ de première mise en service, alors

$$\mathbb{P}(T \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases},$$

où $\lambda = \frac{1}{MTBF}$.
La fonction de répartition F_T de T est appelée **fonction de défaillance** de l'appareil, et caractérise l'usure de l'appareil. La **fonction de fiabilité** est définie par $1 - F_T(t)$. Le paramètre λ est appelé le **taux d'avarie** (dans ce modèle, il est supposé constant au cours du temps).

2.3.4 Fiabilité d'un ensemble de composants indépendants

Il nous suffit d'étudier la fiabilité d'un dispositif formé de deux composants fonctionnant de manière indépendante.
Précisons quelques notations :
• R_1 et R_2 désignent les fonction de fiabilité respective des composants C_1 et C_2 du dispositif ;
• T_1 et T_2 les variables aléatoires égales respectivement au temps de bon fonctionnement des composants C_1 et C_2 du dispositif ;
• R la fonction de fiabilité du dispositif complet ;
• T la variable aléatoire égale au temps de bon fonctionnement du dispositif complet.

Fiabilité d'un ensemble de composants montés en série le dispositif fonctionne à l'instant t ssi les deux composants sont encore en état de marche à l'instant t. Donc

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ , } \mathbb{P}(T \geq t) = \mathbb{P}((T_1 \geq t) \cap (T_2 \geq t)).$$

Autrement dit, en utilisant l'indépendance de T_1 et T_2 : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R(t) = R_1(t)R_2(t)$. Soit pour résumer

$$R = R_1 R_2.$$

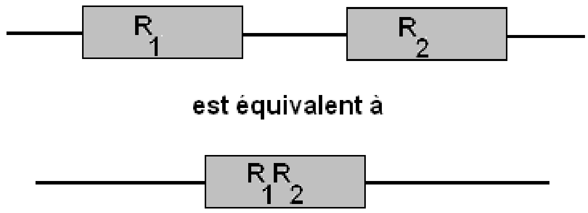

FIG. 11 – Fiabilité d'un dispositif monté en série

Fiabilité d'un ensemble de composants montés en parallèle le dispositif ne fonctionne plus l'instant t ssi les deux composants sont hors d'usage à l'instant t. Donc

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ , } \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}((T_1 \leq t) \cap (T_2 \leq t)).$$

Autrement dit, en utilisant l'indépendance de T_1 et T_2 : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 - R(t) = (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))$, ou encore $R(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))$. Finalement

$$R = 1 - (1 - R_1)(1 - R_2).$$

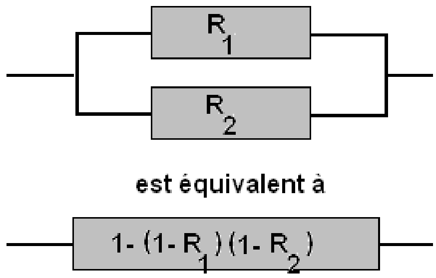

FIG. 12 – Fiabilité d'un dispositif monté parallèle

3 La loi Normale

3.1 Définition et cadre naturel d'apparition

Cette loi est celle qui rend compte de diverses mesures d'une grandeur donnée, opérées à diverses reprises, chaque mesure étant sujette à des erreurs.

Définition 9 *On appelle* <u>*loi Normale*</u> *de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ la loi d'une variable aléatoire continue X prenant toutes les valeurs réelles, de densité de probabilité la fonction définie par*

$$\textit{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ , } f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m; \sigma)$.

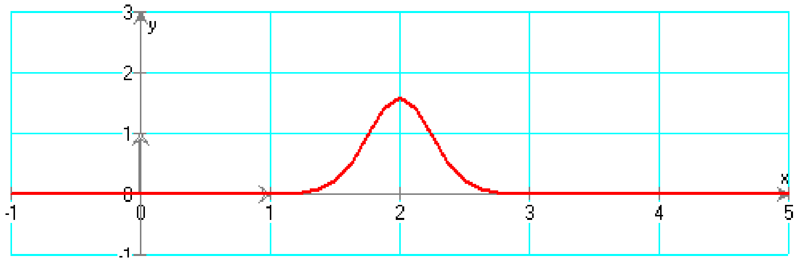

FIG. 13 – Fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(2; 0,25)$

Remarque 9 *On a donc en clair, pour tous $a \leq b$ réels, avec $a \leq b$,*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Définition 10 *La loi $\mathcal{N}(0; 1)$ est appelée loi Normale centrée et réduite. Sa densité est la focntion définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.*

Définition 11 *Si X est une variable aléatoire suivant une loi Normale, X est dite variable aléatoire gaussienne. Si la loi de X est en plus centrée et réduite, on dit que X est une variable aléatoire gaussienne, centrée et réduite.*

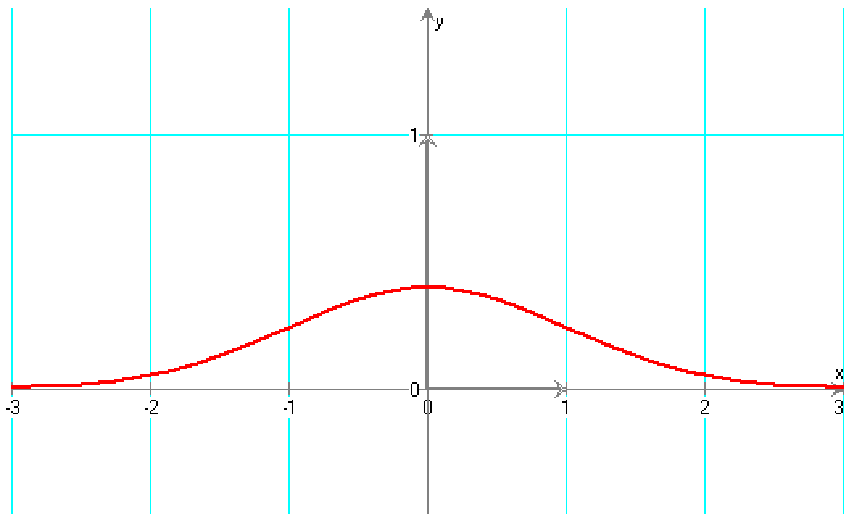

FIG. 14 – Fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$

3.2 Tables de la loi Normale

Seule la table des valeurs de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$, et pour être précis, celle de sa fonction de répartition Π sur laquelle nous allons revenir, est utile, ainsi que nous le verrons au cours de ce paragraphe.
Notons toutefois que, à la différence de la loi exponentielle que nous avons abordé au paragraphe précédent, une calculatrice ne permet pas de calculer simplement les valeurs prises par la fonction (de deux variables) $(a; b) \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$, ce qui explique qu'en pratique, on ne peut guère se dispenser de cette table (les ordinateurs actuels permettent de calculer les valeurs figurant dans cette table, avec une bonne précision ; mais les logiciels spécifiques sont tout de même encore difficiles d'accès ...)

Définition 12 *On note Π la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On a donc*

$$\textit{Pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ , } \Pi(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Remarque 10 *La fonction* Π *est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité : c'est donc une fonction croissante, avec* $\lim_{t\to-\infty}\Pi(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty}\Pi(t) = 1$.

Proposition 8 *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.

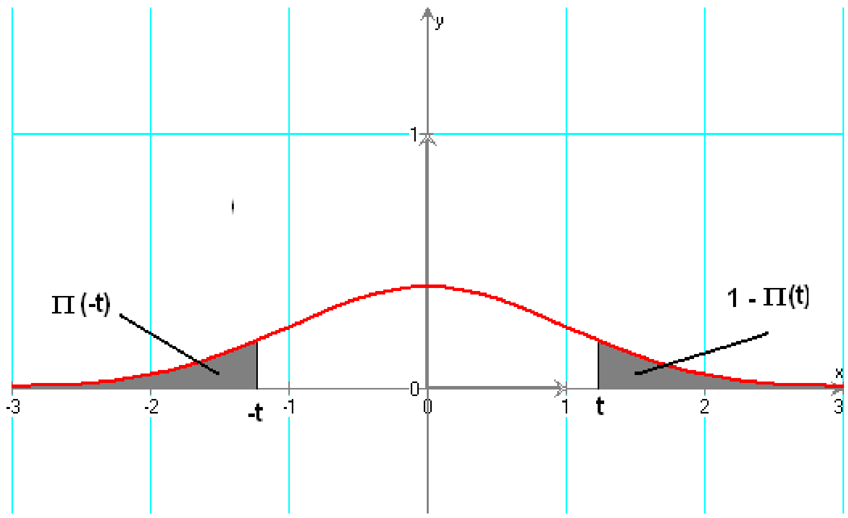

FIG. 15 – Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.

Preuve

◀ Cette propriété découle immédiate ment du fait que la densité associée à Π est une fonction paire, donc dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Cette symétrie entraîne l'égalité des aires de portions de plan située sous la courbe représentant la densité. ▶

Théorème 9 *Soit* X *une variable aléatoire gaussienne centré et réduite.*

i. Pour tous $a; b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, *on a* $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \Pi(b) - \Pi(a)$ *;*

ii. Pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(-t \leq X \leq t) = 2\Pi(t) - 1$ *;*

Preuve

◀ Le point $i.$ s'obtient en remarquant d'abord que l'événement $(a \leq X \leq b)$ a pour contraire l'événement $(X > b) \cup (X < a)$, et que les événements $(X > b)$ et $(X < a)$ sont disjoints. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= 1 - \mathbb{P}((X > b) \cup (X < a)) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(X > b) + \mathbb{P}(X < a)) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > b) - \mathbb{P}(X < a) \\
&= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) \text{ car } X \text{ est continue} \\
&= \Pi(b) - \Pi(a).
\end{aligned}$$

Le point $ii.$ découle de la proposition précédente : $t \geq 0$ étant fixé, on a

$$\mathbb{P}(-t \leq X \leq t) = \Pi(t) - \Pi(-t) = \Pi(t) - (1 - \Pi(t)) = 2\Pi(t) - 1.$$

▶

Dans tout ce qui précède, on a travaillé avec une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite, mais l'immense majorité des applications fait apparaître des variables aléatoires gaussiennes non centrées et/ou non réduites. Le dernier résultat de ce paragraphe explique comment on peut calculer des probabilités du type $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ ou encore $\mathbb{P}(-t \leq X \leq t)$ pour de telles variables aléatoires.

Théorème 10 *Soit* X *une variable aléatoire suivant une loi Normale* $\mathcal{N}(m; \sigma)$*. Alors, pour tous* $a; b \in \mathbb{R}$*, la variable aléatoire* $aX + b$ *suit une loi Normale* $\mathcal{N}(am + b; |a|\sigma)$.

Preuve

◀ Voir au chapitre suivant la démonstration de ce théorème. ▶

Corollaire 11 *Soit X une variable aléatoire suivant une loi Normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$. Alors la variable aléatoire $X^* := \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit une loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$.*

Preuve

◀ On pose donc $X^* = \dfrac{1}{\sigma}X - \dfrac{m}{\sigma}$. D'après le théorème précédent, X^* suit une loi normale $\mathcal{N}\big(\frac{1}{\sigma}m - \frac{m}{\sigma}; \frac{1}{\sigma}\sigma\big) = \mathcal{N}(0;1)$. ▶

Autrement dit, il n'est pas nécessaire de dresser des tables de toutes les lois Normales, la seule connaissance de la table de la loi Normale centrée et réduite permet d'en déduire tous les renseignement utiles à la connaissance d'une variable aléatoire gaussienne non-centrée et/ou non réduite. Voici quelques applications pratiques de ce très important théorème, illustrées sur des exemples.

Exemple 6 *La production de poutres métalliques de longueur théorique 2 mètres ne se fait pas toujours de manière exacte ; un certain nombre de défaut de production sont susceptibles d'influer sur la longueur réellement obtenue en fin d'usinage de la pièce. Ainsi, si on note X la variable aléatoire qui, à chaque poutre produite, associe sa longueur réelle, on peut admettre que X suit une loi Normale de paramètres $(2; 0,01)$.*
Ceci signifie concrètement que, lors d'études statistiques, l'observation d'un grand nombre de pièces produites a conduit à un moyenne observée de 2 mètres, avec un écart-type de 0,01 mètre. On voudrait déterminer la probabilité d'avoir $X \in [1,98; 2,02]$.
On commence par centrer et réduire la variable aléatoire X, et on considère la variable aléatoire $X^* := \dfrac{X-m}{\sigma}$, dont on sait qu'elle suit une loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$.
On a alors

$$(1,98 \leq X \leq 2,02) = \left(\frac{1,98-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{2,02-m}{\sigma}\right) = (-2 \leq X^* \leq 2),$$

car $m = 2$, et $\sigma = 0,01$. On a donc $\mathbb{P}(X \in [1,98; 2,02]) = \mathbb{P}(1,98 \leq X \leq 2,02) = \mathbb{P}(-2 \leq X^* \leq 2)$. Mais comme $X^* \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$, on a

$$\mathbb{P}(X \in [1,98; 2,02]) = \mathbb{P}(-2 \leq X^* \leq 2) = 2\Pi(2) - 1 \simeq 2 \times 0,9772 - 1 \simeq 0,9544.$$

Exemple 7 *On voudrait estimer, sous les mêmes hyptohèses, la probabilité que $X \in [1,99; 2,01]$. On applique la même méthode, et on commence par centrer et réduire la variable aléatoire X : on considère la variable aléatoire $X^* := \dfrac{X-m}{\sigma}$, dont on sait qu'elle suit une loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$.*
On a alors

$$(1,99 \leq X \leq 2,01) = \left(\frac{1,99-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{2,01-m}{\sigma}\right) = (-2 \leq X^* \leq 2),$$

car $m = 2$, et $\sigma = 0,01$. On a donc $\mathbb{P}(X \in [1,99; 2,01]) = \mathbb{P}(1,99 \leq X \leq 2,01) = \mathbb{P}(-1 \leq X^* \leq 1)$. Mais comme $X^* \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$, on a

$$\mathbb{P}(X \in [1,99; 2,01]) = \mathbb{P}(-1 \leq X^* \leq 1) = 2\Pi(1) - 1 \simeq 2 \times 0,8413 - 1 \simeq 0,6826.$$

Exemple 8 *On voudrait estimer, sous les mêmes hyptohèses, la probabilité que $X \in [1,97; 2,03]$. On applique la même méthode, et on commence par centrer et réduire la variable aléatoire X : on considère la variable aléatoire $X^* := \dfrac{X-m}{\sigma}$, dont on sait qu'elle suit une loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$.*
On a alors

$$(1,97 \leq X \leq 2,03) = \left(\frac{1,97-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{2,03-m}{\sigma}\right) = (-2 \leq X^* \leq 2),$$

car $m = 2$, et $\sigma = 0,01$. On a donc $\mathbb{P}(X \in [1,97; 2,03]) = \mathbb{P}(1,97 \leq X \leq 2,03) = \mathbb{P}(-3 \leq X^* \leq 2)$. Mais comme $X^* \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$, on a

$$\mathbb{P}(X \in [1,97; 2,03]) = \mathbb{P}(-3 \leq X^* \leq 3) = 2\Pi(3) - 1 \simeq 2 \times 0,99865 - 1 \simeq 0,9973.$$

Exemple 9 *On voudrait estimer, sous les mêmes hyptohèses, la probabilité que $X \in [1,99; 2,03]$. On applique la même méthode, et on commence par centrer et réduire la variable aléatoire X : on considère la variable aléatoire $X^* := \dfrac{X-m}{\sigma}$, dont on sait qu'elle suit une loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$.*
On a alors

$$(1,99 \leq X \leq 2,03) = \left(\frac{1,99-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{2,03-m}{\sigma}\right) = (-2 \leq X^* \leq 2),$$

car $m = 2$, *et* $\sigma = 0,01$. *On a donc* $\mathbb{P}(X \in [1,99; 2,03]) = \mathbb{P}(1,99 \leq X \leq 2,03) = \mathbb{P}(-1 \leq X^* \leq 2)$. *Mais comme* $X^* \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$, *on a*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X \in [1,99; 2,03]) & = & \mathbb{P}(-1 \leq X^* \leq 3) = \Pi(3) - \Pi(-1) \\ & = & \Pi(3) - (1 - \Pi(1)) = \Pi(3) + \Pi(1) - 1 \\ & \simeq & 0,99865 + 0,8413 - 1 \simeq 0,83995. \end{array}$$

3.3 Espérance et variance

Théorème 12 *Soit* X *une variable aléatoire gaussienne suivant une loi Normale* $\mathcal{N}(m;\sigma)$. *Alors*

$$\mathbb{E}(X) = m \ , \ \mathbb{V}(X) = \sigma^2 \ \textit{et} \ \sigma_X = \sigma.$$

Preuve

◀ Ce théorème se démontre par un calcul intégral :

Calcul de l'espérance : par définition de l'espérance d'une variable aléatoire X de densité f_X,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \int_A^B x.f_X(x)dx.$$

Soient $A; B \in \mathbb{R}$, avec $A \leq B$. Si X suit une loi Normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$,

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_A^B x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx.$$

En posant $t = \dfrac{x-m}{\sigma}$, il vient $dx = \sigma dt$, et donc $\displaystyle\int_A^B x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma \int_{\frac{A-m}{\sigma}}^{\frac{B-m}{\sigma}} (m + \sigma t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Or lorsque $A \to -\infty$, on a $\dfrac{A-m}{\sigma} \to -\infty$, et lorsque $B \to +\infty$, on a $\dfrac{B-m}{\sigma} \to +\infty$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_A^B (m + \sigma t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} m \int_A^B e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right).$$

Or, d'une part, $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} m \int_A^B e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = m$ car $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = 1$ (la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ étant une densité de probabilité). D'autre part, une primitive de $te^{-\frac{t^2}{2}}$ est $-e^{-\frac{t^2}{2}}$, donc $\displaystyle\int_A^B t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_A^B = -e^{-\frac{B^2}{2}} + e^{-\frac{A^2}{2}}$. Comme $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \left(-e^{-\frac{B^2}{2}} + e^{-\frac{A^2}{2}} \right) = 0$, on a donc finalement

$$\mathbb{E}(X) = m.$$

Calcul de la variance : on commence par calculer $\mathbb{E}(X^2)$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f_X(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \int_A^B x^2.f_X(x)dx.$$

Soient $A; B \in \mathbb{R}$, avec $A \leq B$. Si X suit une loi Normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$,

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_A^B x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx.$$

En posant $t = \dfrac{x-m}{\sigma}$, il vient $dx = \sigma dt$, et donc $\displaystyle\int_A^B x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma \int_{\frac{A-m}{\sigma}}^{\frac{B-m}{\sigma}} (m + \sigma t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Or lorsque $A \to -\infty$, on a $\dfrac{A-m}{\sigma} \to -\infty$, et lorsque $B \to +\infty$, on a $\dfrac{B-m}{\sigma} \to +\infty$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X) & = & \lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_A^B (m + \sigma t)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ & = & \lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} m^2 \int_A^B e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} m\sigma \int_A^B t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ & = & m^2 + \lim_{A \to -\infty} \lim_{B \to +\infty} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \end{array}$$

en utilisant les résultats établis plus haut : $\lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$, et $\lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B te^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0$.
Maintenant, A et B étant fixés, $\int_A^B t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_A^B + \int_A^B e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, et donc

$$\lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to+\infty}\int_A^B e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1,$$

ce qui conduit finalement à

$$\mathbb{E}(X^2) = m^2 + \sigma^2.$$

Pour conclure, on utilise le théorème de LEIBNIZ : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = m^2 + \sigma^2 - m^2 = +\sigma^2$.
Calcul de l'écart-type : comme $\sigma > 0$, $\sigma_X = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$, ce qui achève la preuve. ▶
Une application de ce résultat est la démonstration du théorème 10 :
Preuve
◀ En admettant le point délicat de ce théorème (le fait que la transformation affine d'une variable gaussienne soit encore une gaussienne), nous pouvons utiliser les résultats généraux, démontrés plus haut, sur l'espérance et la variance (ou l'écart-type) d'une variable aléatoire :
- d'une part, $m_{aX+b} = \mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b = am + b$;
- d'autre part, $\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$. ▶

3.4 La loi Normale comme loi limite de lois Binomiales

Il est parfois intéressant d'utiliser, dans un but de simplification, les lois Normales, comme des lois limites de variables aléatoires suivant une loi Binomiale. L'étude de ces approximations fait l'objet du théorème suivants, suivi de remarques intuitivement assez évidentes, qui ne constituent nullement des preuves de cet important résultat, dont la démonstration supposerait de définir clairement des outils nouveaux, permettant l'étude de la notion de convergences de suites de variables aléatoires. Notons qu'un problème apparaît dans la mise en œuvre de ces approximations, que l'on expose dans l'important exemple final.

Théorème 13 *Soit $0 \leq p \leq 1$, et $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Si np et $n(1-p)$ sont "assez grands", et si p est "assez proche de $\frac{1}{2}$", alors on peut raisonnablement considérer que X suit une loi Normale $\mathcal{N}\Big(np; \sqrt{np(1-p)}\Big)$.*

Remarque 11 *Conditions usuelles d'application du théorème sur les valeurs de n et p : pour que ce théorème soit applicable, autrement dit pour réaliser une assez bonne approximation de $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n;p)$ par $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\Big(np; \sqrt{np(1-p}\Big)$, on doit se trouver dans les cas :*

	p	np	$n(1-p)$
Situation 1	$0,3 \leq p \leq 0,7$	$np \geq 15$	$n(1-p) \geq 15$
Situation 2	$0,3 \leq p \leq 0,7$	$np \geq 20$	$n(1-p) \geq 20$

Remarque 12 *On notera que si X suit une $\mathcal{B}(n;p)$, on a $\mathbb{E}(X) = np$, et que $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.
Si l'on réalise une approximation de X par Y suivant une loi Normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$, il faut - au moins - faire en sorte que cette dernière variable aléatoire ait une espérance et un écart-type proches de ceux de X. Comme par ailleurs $\mathbb{E}(Y) = m$, et que $\sigma_Y = \sigma$, on choisit $m = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) = np$, et $\sigma_Y = \sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.*

Remarque 13 *L'hypothèse "p est assez proche de $\frac{1}{2}$" se justifie aussi assez bien sur le plan intuitif. En effet, la loi Normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ admet, pour toutes valeurs de m et σ, une fonction de répartition parfaitement symétrique ; elle ne peut approcher correctement la fonction de répartition d'une loi Binomiale que si celle-ci est elle-même relativement symétrique. Cette dernière condition impose une valeur de p la plus proche possible de $\frac{1}{2}$.*

Ainsi qu'on l'a annoncé plus haut, la mise en œuvre concrète des approximations énoncées ci-dessus pose quelques difficultés, que nous signalons par l'étude de deux exemples éclairants. Elles sont dues au fait qu'il s'agit de réaliser l'approximation d'une loi discrète par une loi continue (au contraire de l'approximation d'une loi Binomiale par une loi de Poisson, qui constituait l'approximation d'une loi discrète par une loi discrète).
L'exemple suivant cerne le coeur de la difficulté et montre clairement l'erreur à ne pas commettre lorsque l'on approche une loi discrète par une loi continue. Cet exemple devra être constamment gardé à l'esprit.

Exemple 10 *Soit X une variable aléatoire discrète, suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}\left(50; \frac{1}{2}\right)$. Les conditions d'approximations de la loi de X par une loi Normale sont remplies, et l'on peut donc raisonnablement considérer que X suit la loi Normale $\mathcal{N}\left(25; \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$.*
Évaluons maintenant la probabilité limite $\mathbb{P}(X = 25)$ de deux manières différentes :
- de manière exacte, $\mathbb{P}(X = 25) = C_{50}^{25}\frac{1}{2^{25}}\frac{1}{2^{25}} = C_{50}^{25}\frac{1}{2^{50}} \simeq 0,1122$;
- en utilisant l'approximation en loi Normale de X, $\mathbb{P}(X = 25) = 0$ (la loi Normale associée est continue !).
Il apparaît donc un immense décalage entre les calculs réalisés. Pour retrouver des résultats cohérents, nous remarquons que $\mathbb{P}(X = 25) = \mathbb{P}(24,5 \leq X \leq 25,5)$ (en loi exacte discrète), et utiliser l'approximation en loi Normale de X,

$$\mathbb{P}(24,5 \leq X \leq 25,5) = \mathbb{P}\left(\sqrt{2}\frac{24,5-25}{5} \leq \sqrt{2}\frac{X-25}{5} \leq \sqrt{2}\frac{25,5-25}{5}\right) = 2\Pi\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) - 1 \simeq 0,1125.$$

Cette fois-ci, les évaluations exactes et approchées par une loi normale correctement employée de $\mathbb{P}(X = 25)$ coïncident avec une erreur maximale de l'ordre de 3.10^{-4} (erreur relative de l'ordre de $0,3\%$).

Le dernier exemple montre la bonne manière de procéder pour réaliser correctement l'approximation d'une loi Binomiale par une loi normale, en illustrant la notion de "correction de continuité".

Exemple 11 *Soit X une variable aléatoire discrète, suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}\left(50; \frac{1}{2}\right)$. Les conditions d'approximations de la loi de X par une loi Normale sont remplies, et l'on peut donc raisonnablement considérer que X suit la loi Normale $\mathcal{N}\left(25; \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$.*
Évaluons maintenant $\mathbb{P}(24 \leq X \leq 26)$ de deux manières différentes :
- de manière exacte,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(24 \leq X \leq 26) &= \mathbb{P}(X = 24) + \mathbb{P}(X = 25) + \mathbb{P}(X = 26) = C_{50}^{24}\frac{1}{2^{24}}\frac{1}{2^{26}} + C_{50}^{25}\frac{1}{2^{25}}\frac{1}{2^{25}} + C_{50}^{26}\frac{1}{2^{26}}\frac{1}{2^{24}} \\
&= \frac{1}{2^{50}}(C_{50}^{24} + C_{50}^{25} + C_{50}^{26}) = \frac{1}{2^{50}}\left(\frac{50!}{24!26!} + \frac{50!}{25!25!} + \frac{50!}{26!24!}\right) = \frac{50!}{2^{50}}\left(\frac{1}{25!25!} + \frac{2}{24!26!}\right) \\
&= \frac{50!}{2^{50}}\left(\frac{26}{25!26!} + \frac{50}{25!26!}\right) = \frac{50!}{2^{50}}\left(\frac{76}{25!26!}\right) \simeq 0,3282.
\end{aligned}$$

- en utilisant l'approximation de la loi de X par une $\mathcal{N}\left(25; \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, et le fait que $\sqrt{2}\frac{X-25}{5}$ suit une loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (car centrée et réduite),

$$\mathbb{P}(24 \leq X \leq 26) = \mathbb{P}\left(\sqrt{2}\frac{24-25}{5} \leq \sqrt{2}\frac{X-25}{5} \leq \sqrt{2}\frac{26-25}{5}\right) = 2\Pi\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) - 1 \simeq 0,2227.$$

Il apparaît donc un important décalage entre les calculs réalisés (erreur relative de l'ordre de 33%). Pour retrouver des résultats cohérents, nous remarquons que $\mathbb{P}(24 \leq X \leq 26) = \mathbb{P}(23,5 \leq X \leq 26,5)$ (en loi exacte discrète), et utilisons l'approximation en loi Normale de X suivant une $\mathcal{N}\left(25; \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, et le fait que $\sqrt{2}\frac{X-25}{5}$ suit une loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (car centrée et réduite),

$$\mathbb{P}(23,5 \leq X \leq 26,5) = \mathbb{P}\left(\sqrt{2}\frac{23,5-25}{5} \leq \sqrt{2}\frac{X-25}{5} \leq \sqrt{2}\frac{26,5-25}{5}\right) = 2\Pi\left(\frac{1,5\sqrt{2}}{5}\right) - 1 \simeq 0,3286.$$

Cette fois-ci, les évaluations exactes et approchées par une loi normale correctement employée de $\mathbb{P}(24 \leq X \leq 26)$ coïncident autour de $0,328$, avec une erreur de l'ordre de 4.10^{-4} (erreur relative de l'ordre de $0,2\%$).

Table des matières