

Opérations sur des variables aléatoires réelles (discrètes ou continues)

1 Couples de variables aléatoires discrètes. Indépendance. Covariance

1.1 Couples de variables aléatoires discrètes

Certaines situations sont naturellement décrites par la donnée d'un couple de variables aléatoires. Par exemple, en météorologie, on peut s'intéresser au couple formé par la donnée de la température (T) et de la pression (P) atmosphériques. Chacun des paramètres peut être associé à la donnée d'une variable aléatoire : la pression, mesurée tous les jours au même instant, se comporte comme une fonction (aléatoire, c'est-à-dire dépendant du "hasard" des conditions météo). Il en est de même pour la température. On est ainsi amené à étudier les deux paramètres simultanément, donc à regarder le couple $(T; P)$, qui est un couple de variables aléatoires.

Exemple 1 On considère dans le plan repéré les points de coordonnées entières situés dans la zone B , définie par $B = \{(x; y) \text{ avec } x, y \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$. On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir l'un de ces points au hasard (tous les choix de points dans B sont supposés équiprobables). On définit la variable aléatoire discrète Z qui est formée du couple de coordonnées du point choisi.

1°) Détermination de la loi de Z :

On a

Valeurs de Z	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

car toutes les positions sont équiprobables.

L'abscisse du point choisi peut être regardé comme une variable aléatoire X , et l'ordonnée comme une variable aléatoire Y (X et Y sont ici évidemment discrètes).

La variable aléatoire Z est appelée couple des variables aléatoires X et Y . On peut présenter sa loi de manière à faire apparaître les rôles joués par X et Y plus clairement :

$X \ Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2°) Peut-on déterminer les lois de X et de Y à partir de la connaissance de celle de Z ?

La réponse est oui. Commençons par remarquer que $X \in \{1; 2\}$ et que $Y \in \{1; 2; 3\}$, et déterminons la loi de Y . Par exemple, pour $\mathbb{P}(Y = 1)$: puisque $(Y = 1) = [(X = 1) \cap (Y = 1)] \cup [(X = 2) \cap (Y = 1)] = [Z = (1; 1)] \cup Z = (1; 2)$, ces deux événements étant indépendants, on a

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Z = (1; 1)) + \mathbb{P}(Z = (1; 2)) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

En faisant les additions en ligne et en colonne, on peut déterminer les lois de X et de Y , qui sont

$$X : \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \text{ et } Y : \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

On dit que les lois de X et de Y sont les lois marginales de la loi de Z , tandis que la loi de Z est la loi du couple de variables aléatoires X et Y .

1.2 Variables aléatoires discrètes indépendantes

On ne s'intéresse ici qu'à des variables aléatoires discrètes. Cette notion existe aussi dans le cas de variables aléatoires continues, mais est plus délicate à appréhender.

Définition 1 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que X prend des valeurs $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, et que Y prend des valeurs $y_1; y_2; \dots; y_m$.

On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, pour toutes valeurs des indices i et j , avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$,

$$\mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

Exemple 2 On lance deux dés équilibrés à six faces (un rouge, et un bleu). On appelle X le numéro de la face amenée par le dé bleu, et Y le numéro de la face amenée par le dé rouge. On appelle S la somme des faces obtenues.

Alors X et Y sont indépendantes, et S et X ne le sont pas, pas plus que Y et S .

Exercice 1 On donne les deux variables aléatoires discrètes X et Y , dont les lois ont données ci-dessous :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$$

et on pose $Y = X^2$.

1°) Donner la loi de Y .

2°) Donner la loi du couple $(X; Y)$ sous la forme d'un tableau à double entrée. Que vaut $\mathbb{P}(X = 0; Y = 1)$?

3°) X et Y sont-elles indépendantes ? Était-ce prévisible ?

Exercice 2 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes indépendantes et de même loi, avec :

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{6} \qquad \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{1}{2}$$

Soient $S = X_1 + X_2$ et $P = X_1 X_2$.

1°) Déterminer la loi du couple (S, P) , en supposant que les variables X et Y prennent toujours des valeurs indépendantes.

2°) Déterminer les lois marginales du couple (S, P) .

Exercice 3 La loi conjointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires est donnée par :

$X \ Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{5}$	b	$\frac{1}{10}$

1°) Déterminer a et b de manière que X et Y soient indépendantes. Quelles serait alors la loi marginale de X ?

2°) On suppose $a = \frac{1}{5}$. Déterminer y tel que la covariance de X et Y soit égal à 0. X et Y sont-elles alors indépendantes ?

1.3 Covariance de deux variables aléatoires discrètes

Définition 2 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On appelle covariance de X et Y le réel, noté $\text{Cov}(X; Y)$, défini par la relation

$$\text{Cov}(X; Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))).$$

Remarque 1 Ceci est à rapprocher de la relation rencontrée pour les séries statistiques discrètes

$$\text{Cov}(X; Y) = \bar{X} \cdot \bar{Y} - \bar{X} \bar{Y},$$

la notion de moyenne d'une série statistique correspondant à celle d'espérance d'une variable aléatoire.

Remarque 2 On a en particulier dans ce cadre, $\text{Cov}(X; X) = \mathbb{V}(X)$.

Proposition 1 Si les séries statistiques X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X; Y) = 0$. La réciproque est fausse.

Exercice 4 On donne les deux variables aléatoires discrètes X et Y , dont les lois sont données ci-dessous :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$$

et on pose $Y = X^2$.

1°) Donner la loi de Y .

2°) Donner la loi du couple $(X; Y)$ sous la forme d'un tableau à double entrée. Que vaut $\mathbb{P}(X = 0; Y = 1)$?

3°) a) Calculer $\text{Cov}(X; X) = \mathbb{V}(X)$.

b) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 La loi conjointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires est donnée par :

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

2°) X et Y sont-elles indépendantes ?

3°) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(XY)$. Quelle remarque cela vous inspire-t-il ?

Exercice 6 Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes et de même loi, avec :

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{6} \qquad \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{1}{2}$$

Soient $S = X_1 + X_2$ et $P = X_1 X_2$.

1°) Déterminer la loi du couple (S, P) .

2°) Déterminer les lois marginales du couple (S, P) . S et P sont-elles indépendantes ?

3°) Calculer $\mathbb{E}(S)$, $\mathbb{E}(P)$, $\mathbb{V}(S)$, $\mathbb{V}(P)$, $\text{Cov}(S, P)$. S et P sont-elles indépendantes ?

2 Propriétés générales de l'espérance, de la variance, et de l'écart-type

Dans ce paragraphe, tous les résultats sont vrais pour des variables aléatoires discrètes ou continues admettant, suivant le cas, espérance ou variance.

2.1 Problématique

Ayant défini la variable aléatoire $X + Y$, on peut se demander s'il existe un rapport :

- entre $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(X + Y)$;
- entre $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(X + Y)$;
- entre σ_X , σ_Y et σ_{X+Y} .

De même, on peut s'interroger sur les liens qui existent entre :

- entre $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(aX + B)$;
- entre $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(aX + B)$;
- entre σ_X , et σ_{aX+B} .

Les réponses à ces questions sont devinées à partir des exemples suivants, puis énoncées et justifiées dans les paragraphes suivants.

2.1.1 Somme de deux variables aléatoires

Les exemples suivants ont pour but de définir concrètement la notation $X + Y$, pour des variables aléatoires X et Y , et d'étudier le comportement de l'espérance, de la variance et de l'écart-type par addition.

Exemple 3 On considère les variables aléatoires X et Y , de lois suivantes :

X :	<table><tr><th>Valeurs de X</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr><tr><td>$\mathbb{P}(X = x_i)$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr></table>	Valeurs de X	0	1	2	$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	et Y :	<table><tr><th>Valeurs de Y</th><th>0</th><th>1</th></tr><tr><td>$\mathbb{P}(Y = y_i)$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{3}{4}$</td></tr></table>	Valeurs de Y	0	1	$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
Valeurs de X	0	1	2														
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$														
Valeurs de Y	0	1															
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$															

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes : alors la loi de $X + Y$ est donnée par

$(X + Y) :$	<table> <tr> <th>Valeurs de $X + Y$</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> </tr> <tr> <th>$\mathbb{P}(X + Y = \dots)$</th> <td>$\frac{1}{12}$</td> <td>$\frac{4}{12}$</td> <td>$\frac{4}{12}$</td> <td>$\frac{3}{12}$</td> </tr> </table>	Valeurs de $X + Y$	0	1	2	3	$\mathbb{P}(X + Y = \dots)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$
Valeurs de $X + Y$	0	1	2	3							
$\mathbb{P}(X + Y = \dots)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$							

Notons que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{5}{4}, \mathbb{E}(Y) = \frac{3}{4}, \text{ et } \mathbb{E}(X+Y) = \frac{7}{4}; \\ \mathbb{V}(X) &= \frac{2}{3}, \mathbb{V}(Y) = \frac{3}{16}, \text{ et } \mathbb{V}(X+Y) = \frac{41}{48}; \\ \sigma_X &= \sqrt{\frac{2}{3}}, \sigma_Y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \sigma_{X+Y} = \sqrt{\frac{41}{48}}.\end{aligned}$$

On a donc, alors que X et Y sont indépendantes

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),$$

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y),$$

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}.$$

Exemple 4 On considère la variable aléatoire X de loi :

$$X : \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } X & -1 & 1 \\ \hline \mathbb{P}(X = x_i) & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

et on pose $Y = 1 - X$. La loi de la variable aléatoire Y est donnée par

$$Y : \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } Y & 0 & 2 \\ \hline \mathbb{P}(Y = y_i) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes ($Y = 1 - X$), et un calcul utilisant des probabilités conditionnelles conduit à la loi de $X + Y$:

$$(X+Y) : \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Valeurs de } X+Y & 1 \\ \hline \mathbb{P}(X+Y = \dots) & 1 \\ \hline \end{array},$$

puisque $X + Y = X + (1 - X) = 1$. Notons que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{3}, \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3}, \text{ et } \mathbb{E}(X+Y) = 1; \\ \mathbb{V}(X) &= \frac{8}{9}, \mathbb{V}(Y) = \frac{8}{9}, \text{ et } \mathbb{V}(X+Y) = 0; \\ \sigma_X &= \frac{2\sqrt{2}}{3}, \sigma_Y = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \sigma_{X+Y} = 0.\end{aligned}$$

On a donc, alors que X et Y ne sont pas indépendantes

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),$$

$$\mathbb{V}(X+Y) \neq \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y),$$

$$\sigma_{X+Y} \neq \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}.$$

Exemple 5 On considère la variable aléatoire X de loi :

$$X : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } X & -1 & 0 & 1 \\ \hline \mathbb{P}(X = x_i) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

et on pose $Y = X^2$. La loi de la variable aléatoire Y est donnée par

$$Y : \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } Y & 0 & 1 \\ \hline \mathbb{P}(Y = y_i) & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes ($Y = X^2$), et un calcul utilisant des probabilités conditionnelles conduit à la loi de $X + Y$:

$$(X+Y) : \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } X+Y & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbb{P}(X+Y = \dots) & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

Notons que :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3}, \text{ et } \mathbb{E}(X+Y) = \frac{2}{3};$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{2}{3}, \mathbb{V}(Y) = \frac{2}{9}, \text{ et } \mathbb{V}(X + Y) = \frac{8}{9};$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{2}{3}}, \sigma_Y = \frac{\sqrt{2}}{3}, \sigma_{X+Y} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

On a donc, alors que X et Y ne sont pas indépendantes

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),$$

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y),$$

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}.$$

2.1.2 Transformation affine d'une variable aléatoire

L'exemple suivant a pour but de définir concrètement la notation $aX + b$, pour une variable aléatoire X , et des réels a et b , et d'étudier le comportement de l'espérance, de la variance et de l'écart-type par transformation affine de X .

Exemple 6 On considère la variable aléatoire X , de loi

$$X : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } X & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbb{P}(X = x_i) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

La loi de $X - 1$ est donnée par

$$(X - 1) : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } X - 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \mathbb{P}(X - 1 = \dots) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{5}{4} \text{ et } \mathbb{E}(X - 1) = \frac{1}{4};$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{11}{16} \text{ et } \mathbb{V}(X - 1) = \frac{11}{16};$$

$$\sigma_X = \frac{\sqrt{11}}{4} \text{ et } \sigma_{X-1} = \frac{\sqrt{11}}{4}.$$

On a donc dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X - 1) = \mathbb{E}(X) - 1,$$

$$\mathbb{V}(X - 1) = \mathbb{V}(X),$$

$$\sigma_{X-1} = \sigma_X.$$

Exemple 7 On considère la variable aléatoire X , de loi

$$X : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } X & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbb{P}(X = x_i) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

La loi de $2X$ est donnée par

$$(2X - 1) : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } 2X & 0 & 2 & 4 \\ \hline \mathbb{P}(2X = \dots) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{5}{4} \text{ et } \mathbb{E}(2X) = \frac{5}{2};$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{11}{16} \text{ et } \mathbb{V}(2X) = \frac{11}{4};$$

$$\sigma_X = \frac{\sqrt{11}}{4} \text{ et } \sigma_{2X} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

On a donc dans ce cas :

$$\mathbb{E}(2X) = 2\mathbb{E}(X),$$

$$\mathbb{V}(2X) = 2^2\mathbb{V}(X),$$

$$\sigma_{2X} = 2\sigma_X.$$

Exemple 8 On considère la variable aléatoire X , de loi

$$X : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } X & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbb{P}(X = x_i) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

La loi de $-3X$ est donnée par

$$(2X - 1) : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } -3X & 0 & -3 & -6 \\ \hline \mathbb{P}(-3 = \dots) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{5}{4} \text{ et } \mathbb{E}(2X) = -\frac{15}{4}; \\ \mathbb{V}(X) &= \frac{11}{16} \text{ et } \mathbb{V}(-3X) = \frac{99}{16}; \\ \sigma_X &= \frac{\sqrt{11}}{4} \text{ et } \sigma_{-3X} = \frac{\sqrt{99}}{4}. \end{aligned}$$

On a donc dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(-3X) &= -3\mathbb{E}(X), \\ \mathbb{V}(-3X) &= (-3)^2\mathbb{V}(X), \\ \sigma_{-3} &= 3\sigma_X. \end{aligned}$$

Exemple 9 On considère la variable aléatoire X , de loi

$$X : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } X & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbb{P}(X = x_i) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

La loi de $2X - 1$ est donnée par

$$(2X - 1) : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Valeurs de } 2X - 1 & -1 & 1 & 3 \\ \hline \mathbb{P}(2X - 1 = \dots) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}.$$

Notons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{5}{4} \text{ et } \mathbb{E}(2X - 1) = \frac{3}{2}; \\ \mathbb{V}(X) &= \frac{11}{16} \text{ et } \mathbb{V}(2X - 1) = \frac{11}{4}; \\ \sigma_X &= \frac{\sqrt{11}}{4} \text{ et } \sigma_{2X-1} = \frac{\sqrt{11}}{2}. \end{aligned}$$

2.2 Propriétés de l'espérance

Théorème 2 Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers probabilisé, admettant une espérance. Alors pour tous $a; b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une espérance, et on a

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Preuve

◀ Dans le cas où X serait absolument continue, on a, en notant f_X une densité de X :

$$\mathbb{E}(aX + b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (at + b)f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} taf_X(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} bf_X(t)dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt,$$

en utilisant la linéarité de l'intégrale et des limites. Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$ par propriété de la densité f_X de X , et comme par définition de l'espérance $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt = \mathbb{E}(X)$, il vient :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + B.$$

Dans le cas où X serait discrète, il existe deux suites de réels (éventuellement nulles à partir d'un certain rang si X est finie) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$.

Par définition $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x_n$, cette série étant convergente. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a p_n x_n$ est aussi convergente et comme $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, on a convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a p_n x_n + b$, et la relation :

$$\mathbb{E}(aX + b) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n (a x_n + b) = \sum_{n=0}^{+\infty} a p_n x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b p_n = a \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x_n + b \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = a \mathbb{E}(X) + b.$$

►

Théorème 3 *On considère deux variables aléatoires réelles X et Y sur un univers probabilisé. On suppose que X et Y sont de même nature (discrète ou continue) et admettent une espérance. Alors $X + Y$ admet une espérance, et on a*

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Preuve

► Dans le cas où X et Y seraient absolument continues, on a, en notant f_X (respectivement f_Y) une densité de X (respectivement de Y) :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_X(t) + f_Y(t)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) dt = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),$$

en utilisant la linéarité de l'intégrale et des limites.

Dans le cas où X et Y seraient discrète, il existe quatre suites de réels (éventuellement nulles à partir d'un certain rang si X est finie) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$ et $\mathbb{P}(Y = y_n) = q_n$.

Par définition $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x_n$ et $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n y_n$, ces séries étant convergentes. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (p_n x_n + q_n y_n)$ est aussi convergente et vérifie la relation :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p_n x_n + q_n y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} q_n y_n = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

►

Remarque 3 *Ces deux théorèmes traduisent la linéarité de l'espérance. Ils découlent principalement des propriétés de linéarité des intégrales, des sommes et séries, et des limites.*

Corollaire 4 *On considère deux variables aléatoires réelles X et Y sur un univers probabilisé. On suppose que X et Y sont de même nature (discrète ou continue) et admettent une espérance. Alors $X - Y$ admet une espérance, et on a*

$$\mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y).$$

Preuve

► On a

$$\mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X + (-Y)) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y).$$

►

2.3 Propriétés de la variance

Proposition 5 *La variance d'une variable aléatoire réelle X est un nombre réel positif ou nul.*

C'est une mesure de la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire par rapport à son espérance. Plus précisément, plus sa variance est grande, plus la variable aléatoire prend des valeurs dispersées par rapport à sa moyenne.

Corollaire 6 (de LEIBNIZ) Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers probabilisé, admettant une espérance et une variance. Alors on a aussi :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Preuve

◀ On a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2).$$

En appliquant la linéarité de l'espérance, il vient immédiatement :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(1) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2,$$

ce qui prouve le résultat. ▶

Théorème 7 Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers probabilisé, admettant une espérance, et une variance. Alors pour tous $a; b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une variance, et on a $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Preuve

◀ L'existence de l'espérance de $aX + b$ étant une conséquence des théorèmes sur la linéarité de l'espérance, on admet l'existence de la variance de $aX + b$, et pour la partie calculatoire et quantitative, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(aX) &= \mathbb{E}((aX - \mathbb{E}(aX))^2) = \mathbb{E}(a^2X^2 + \mathbb{E}(aX)^2 - 2aX\mathbb{E}(aX)) = \mathbb{E}(a^2X^2 + a^2\mathbb{E}(X)^2) - \mathbb{E}(a^2\mathbb{E}(X)X) \\ &= \mathbb{E}(a^2X^2) + a^2\mathbb{E}(X)^2 - a^2\mathbb{E}(X)^2 = a^2(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) = a^2\mathbb{V}(X), \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. ▶

Théorème 8 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un univers probabilisé, admettant chacune une espérance et une variance. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Alors $X + Y$ admet une variance, et on a

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Preuve

◀ En admettant l'existence de la variance de $X + Y$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X + Y) &= \mathbb{E}(((X + Y) - \mathbb{E}(X + Y))^2) = \mathbb{E}((X + Y - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y))^2) \\ &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X) + Y - \mathbb{E}(Y))^2) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2 + (Y - \mathbb{E}(Y))^2 + 2(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) + \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))^2) + 2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{Cov}(X; Y) \end{aligned}$$

Comme X et Y sont indépendantes, $\text{Cov}(X; Y) = 0$, ce qui prouve le résultat annoncé. ▶

Remarque 4 En toute généralité, si on ne fait pas l'hypothèse d'indépendance de X et Y , on a donc montré que

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{Cov}(X; Y).$$

Corollaire 9 On considère deux variables aléatoires réelles X et Y sur un univers probabilisé. On suppose que X et Y admettent chacune une espérance et une variance. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Alors $X - Y$ admet une variance, et on a

$$\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Preuve

◀ On a

$$\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X + (-Y)) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(-Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y),$$

l'indépendance de X et de Y entraînant celle de X et de $-Y$. ▶

2.4 Propriétés de l'écart-type

Proposition 10 *L'écart-type d'une variable aléatoire réelle X est un nombre réel positif ou nul.*

C'est une mesure de la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire par rapport à son espérance. Plus précisément, plus son écart-type est grand, plus la variable aléatoire prend des valeurs dispersées par rapport à sa moyenne.

Théorème 11 *Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers probabilisé, admettant une espérance, et un écart-type. Alors pour tous $a; b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet un écart-type, et on a $\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$.*

Preuve

◀ Ce résultat découle de la définition de l'écart-type, et des propriétés de la variance. ▶

Théorème 12 *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un univers probabilisé, admettant chacune une espérance et un écart-type. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Alors $X + Y$ admet un écart-type, et on a*

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}.$$

Preuve

◀ Ce résultat découle de la définition de l'écart-type, et des propriétés de la variance. ▶

3 Opérations sur les variables aléatoires suivant une loi normale

3.1 Transformation affine

Théorème 13 *Si X est une variable aléatoire, suivant une loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma)$, et si $a; b \in \mathbb{R}$ sont des réels ($a \neq 0$), alors la variable aléatoire $aX + b$ suit une loi normale $\mathcal{N}(am + b; |a|\sigma)$.*

Preuve

◀ ▶

Corollaire 14 *Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma)$. Alors la variable aléatoire $X^* := \frac{X - m}{\sigma}$ suit une loi Normale $\mathcal{N}(0; 1)$.*

Preuve

◀ On pose donc $X^* = \frac{1}{\sigma}X - \frac{m}{\sigma}$. D'après le théorème précédent, X^* suit une loi normale $\mathcal{N}(\frac{1}{\sigma}m - \frac{m}{\sigma}; \frac{1}{\sigma}\sigma) = \mathcal{N}(0; 1)$. ▶

3.2 Sommes de variables aléatoires suivant une loi normale

Théorème 15 *Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes, suivant des lois Normales $\mathcal{N}(m_1; \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2; \sigma_2)$, alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.*

Preuve

◀ En admettant le point délicat de ce théorème (le fait que la somme de deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes soit encore une gaussienne), nous pouvons utiliser les résultats généraux, démontrés plus haut, sur l'espérance et la variance (ou l'écart-type) de la somme de deux variables aléatoires :

- d'une part, $m_{X_1+X_2} = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = m_1 + m_2$;

- d'autre part, $\sigma_{X_1+X_2} = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. ▶

Table des matières

1	Couples de variables aléatoires discrètes. Indépendance. Covariance	1
1.1	Couples de variables aléatoires discrètes	1
1.2	Variables aléatoires discrètes indépendantes	2
1.3	Covariance de deux variables aléatoires discrètes	2
2	Propriétés générales de l'espérance, de la variance, et de l'écart-type	3
2.1	Problématique	3
2.1.1	Somme de deux variables aléatoires	3
2.1.2	Transformation affine d'une variable aléatoire	5
2.2	Propriétés de l'espérance	6
2.3	Propriétés de la variance	7
2.4	Propriétés de l'écart-type	9
3	Opérations sur les variables aléatoires suivant une loi normale	9
3.1	Transformation affine	9
3.2	Sommes de variables aléatoires suivant une loi normale	9