

Équations différentielles

1 Généralités : définitions et exemples

Définition 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle équation différentielle d'ordre n une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction n fois dérivable, et dans laquelle figure la dérivée d'ordre n de la fonction, et, éventuellement, la fonction elle-même ou ses dérivées jusqu'à l'ordre $(n - 1)$, et/ou sa variable.

Les solutions d'une telle équation sont des fonctions n fois dérivables, qui satisfont l'équation.

Exemple 1 Le premier exemple d'équation différentielle est fourni par l'étude des primitives : en effet, chercher la primitive d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ revient à chercher une fonction (notée $y(x)$, ou encore y) telle que

$$y'(x) = f(x).$$

Ici, la fonction f est connue, par exemple par la relation $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. On cherche alors à résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(x) = x^2.$$

Cette équation se note en raccourci $y' = x^2$, et il s'agit de déterminer la fonction y qui vérifie cette relation. On trouve ici

$$y = \frac{1}{3}x^3 + K \text{ où } K \in \mathbb{R}.$$

Cet exemple, très simple, illustre un premier phénomène que l'on retrouvera systématiquement dans la résolution des équations différentielles : il n'y a, en général, pas une unique solution, mais une famille de solutions, dépendant d'une ou de plusieurs constantes réelles indéterminées.

Notons aussi que si l'on impose que les solutions de l'équation différentielle vérifient une contrainte du type $y(0) = 1$ (condition initiale), alors il n'y a plus qu'une valeur de K qui convienne dans l'expression des solutions : il n'y a plus qu'une unique solution.

Exemple 2 Le second exemple d'équation différentielle est encore fourni par l'étude de primitives : cherchons à résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y''(x) = x^2.$$

Cette équation se note en raccourci $y' = x^2$, et il s'agit de déterminer la fonction y qui vérifie cette relation. On trouve ici

$$y' = \frac{1}{3}x^3 + K_1 \text{ où } K_1 \in \mathbb{R},$$

ce qui impose finalement

$$y' = \frac{1}{12}x^4 + K_1x + K_2 \text{ où } K_1; K_2 \in \mathbb{R},$$

Cet exemple, très simple, illustre encore un phénomène que l'on retrouvera systématiquement dans la résolution des équations différentielles : il n'y a, en général, pas une unique solution, mais une famille de solutions, dépendant d'une ou de plusieurs constantes réelles indéterminées. Dans ce cas, il y a même une "double infinité" de solutions.

Notons aussi que si l'on impose que les solutions de l'équation différentielle vérifient deux contraintes du type $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ (conditions initiales), alors il n'y a plus qu'une valeur de K_1 et une valeur de K_2 qui conviennent dans l'expression des solutions : il n'y a plus qu'une unique solution.

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle (ouvert) de $\mathbb{R}$.
On s'intéresse à une équation différentielle de la forme

$$y' + a(x)y = b(x),$$

où $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables sur I .

(Notons que ce paragraphe décrit aussi la résolution des équations différentielles de la forme $C(x)y' + A(x)y = B(x)$, où $A : I \rightarrow \mathbb{R}$, $B : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $C : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont trois fonctions dérivables sur I , et où C est sans annulation sur I : il suffit de poser $a(x) = \frac{A(x)}{C(x)}$, et $b(x) = \frac{B(x)}{C(x)}$, qui sont des fonctions dérivables sur I).

Pour **résoudre** une telle équation différentielle, nous procédons en **trois étapes** :

- i. résolution de l'équation homogène associée $y' + a(x)y = 0$ (dite aussi par abus de langage équation "sans second membre") ;
- ii. recherche d'une solution particulière de l'équation complète $y' + a(x)y = b(x)$;
- iii. obtention de toutes les solutions.

Ceci étant fait, nous donnons un théorème garantissant l'unicité de la solution de l'équation différentielle sous deux conditions initiales.

2.1 Solution générale de l'équation homogène associée

Théorème 1 Soit I un intervalle (ouvert) de $\mathbb{R}$. Soit $y' + a(x)y = 0$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I .

Alors il existe des solutions y de cette équation différentielle ; ce sont les fonctions y définies sur I par

$$y = Ke^{-A(x)},$$

où $K \in \mathbb{R}$ et où $A(x)$ est une primitive de la fonction a sur I .

Exemple 3 On a vu en Terminale que les solutions de l'équation linéaire, à coefficients constants, et homogène, du type $y' + ay = 0$, où $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme

$$y = Ke^{-ax}, \text{ où } K \in \mathbb{R}.$$

On retrouve ainsi ce cas particulier en application de ce théorème, puisque la fonction $A : x \mapsto ax$ est bien une primitive de la fonction (constante, donc dérivable) $a : x \mapsto a$ sur $I (= \mathbb{R} \text{ dans ce cas})$.

2.2 Solution particulière d'une équation linéaire du premier ordre

Définition 2 On appelle solution particulière de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ toute fonction y vérifiant cette équation.

Il existe diverses techniques pour rechercher une solution particulière d'une telle équation différentielle. Les énoncés d'examen doivent, au niveau d'un BTS, donner toutes les indications pour la recherche de celle-ci. La méthode la plus usuelle est la technique dite de la "variation de la constante", que nous décrivons en quelques mots, mais qui n'est pas à connaître par cœur :

Méthode de "variation de la constante". Nous cherchons une solution particulière de l'équation différentielle (avec second membre) $y' + a(x)y = b(x)$. On sait que la solution générale de l'équation différentielle homogène associée $y' + a(x)y = 0$ s'écrit sous la forme

$$y = Ke^{-A(x)}, \text{ où } K \in \mathbb{R} \text{ et } A(x) \text{ est une primitive de la fonction } a \text{ sur } I.$$

On cherche alors une solution particulière sous la forme $y(x) = K(x)e^{-A(x)}$. La dérivée de cette solution particulière est donc $y' = (K'(x) - K(x)a(x))e^{-A(x)}$. On reporte cette solution y et sa dérivée y' dans l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, ce qui donne comme nouvelle équation différentielle à résoudre

$$K'(x) = b(x)e^{A(x)}.$$

Donc $K(x)$ est une primitive sur I de la fonction $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$, que l'on peut par exemple obtenir par intégration par parties ...

2.3 Ensemble des solutions d'une équation linéaire du premier ordre

Théorème 2 (*Structure de l'ensemble des solutions.*)

Soit l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions dérivables sur un intervalle (ouvert) I de $\mathbb{R}$.

Alors les solutions de cette équation sont de la forme

$$y = y_0 + y_{\text{part}},$$

où y_0 est une solution de l'équation homogène associée, et y_{part} une solution particulière de l'équation complète.

Nous pouvons préciser ce théorème, en utilisant la remarque portant sur la méthode de "variation de la constante" :

Corollaire 3 Soit l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors les solutions de cette équation sont les fonctions y définies sur I par

$$y = Ke^{-A(x)} + H(x) \text{ où } \begin{cases} K \in \mathbb{R}, \\ A(x) \text{ est une primitive de la fonction } a \text{ sur } I \\ H(x) \text{ est une primitive de la fonction } b(x)e^{A(x)} \text{ sur } I \end{cases}.$$

2.4 Unicité de la solution sous condition initiale

Théorème 4 Soit $y' + a(x)y = b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle (ouvert) I de $\mathbb{R}$.

Soient $x_0 \in I$ une valeur de la variable, et B un réel donné.

Alors il existe une unique solution y de cette équation différentielle, définie sur I , et qui vérifie :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ \text{et} \\ y(x_0) = B \text{ (Condition initiale).} \end{cases}$$

3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On se limite en BTS au cas des équations différentielles du second ordre à coefficients constants, avec ou sans second membre (ou plus exactement avec second membre nul ou pas).

Dans ce paragraphe, on s'intéresse donc à une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = d(x),$$

où $a; b; c$ sont trois réels, et où $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour **résoudre** cette équation différentielle, nous procédons encore une fois en **trois étapes** :

- i. résolution de l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$ (dite aussi par abus de langage équation "sans second membre") ;
- ii. recherche d'une solution particulière de l'équation complète $ay'' + by' + cy = d(x)$;

iii. obtention de toutes les solutions.

Ceci étant fait, nous donnons un théorème garantissant l'unicité de la solution de l'équation différentielle sous condition initiale.

3.1 Solution générale de l'équation homogène associée

Théorème 5 Soit $ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $a; b; c \in \mathbb{R}$.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

Alors, pour toutes les valeurs de Δ , il existe des solutions y de cette équation différentielle, dont la forme dépend de la valeur de Δ :

i. Si $\Delta > 0$, les solutions sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x},$$

où $K_1; K_2 \in \mathbb{R}$, et où $r_1; r_2$ sont les solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

ii. Si $\Delta = 0$, les solutions sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y = (K_1 x + K_2) e^{r_0 x},$$

où $K_1; K_2 \in \mathbb{R}$, et où r_0 est la solution réelle (double) de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$;

iii. Si $\Delta < 0$, les solutions sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y = (K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x) e^{\alpha x},$$

où $K_1; K_2 \in \mathbb{R}$, et où $\alpha \pm i\beta$ sont les solutions complexes non réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Remarque 1 Dans le cas où $\Delta < 0$, $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

3.2 Solution particulière d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants

Définition 3 On appelle solution particulière de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$ toute fonction y vérifiant cette équation.

Il existe diverses techniques pour rechercher une solution particulière d'une telle équation différentielle. Les énoncés d'examen doivent, au niveau d'un BTS, donner toutes les indications pour la recherche de celle-ci.

3.3 Ensemble des solutions d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants

Théorème 6 (Structure de l'ensemble des solutions.)

Soit l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$, où $a; b; c \in \mathbb{R}$ et où d est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors les solutions de cette équation sont de la forme

$$y = y_0 + y_{part},$$

où y_0 est une solution de l'équation homogène associée, et y_{part} une solution particulière de l'équation complète.

3.4 Unicité de la solution sous conditions initiales

Théorème 7 Soit l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$, où $a; b; c \in \mathbb{R}$ et où d est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et soient $A; B$ deux réels donnés.

Alors il existe une unique solution y de cette équation différentielle qui vérifie :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(x) \\ \text{et} \\ y(x_0) = A \text{ et } y'(x_0) = B \text{ (Conditions initiales).} \end{cases}$$