

## EDL1 à coefficients constants

**Exercice 1** 1°) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

a)  $y' - 5y = 0$ ,

b)  $y' + 8y = 0$ ,

c)  $2y' = -5y$ .

2°) Déterminer la solution des équations différentielles suivantes sur  $\mathbb{R}$ , qui satisfont la condition initiale donnée :

a) 
$$\begin{cases} y' - 7y = 0 \\ \text{et} \\ y(1) = 2 \end{cases},$$

b) 
$$\begin{cases} y' = -6y \\ \text{et} \\ y(-1) = 2 \end{cases},$$

c) 
$$\begin{cases} 3y' + 5y = 0 \\ \text{et} \\ y(0) = -3 \end{cases}.$$

## EDL1 à coefficients quelconques

**Exercice 2** On considère l'équation différentielle (E) :  $xy' - 2y = 0$ , où  $y$  est une fonction dérivable de la variable  $x$ , que l'on suppose définie sur  $]0; +\infty[$ . On cherche à résoudre (E) sur cet intervalle.

1°) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a  $e^{2\ln x} = x^2$ .

2°) Donner la forme générale des solutions de l'équation (E) sur  $]0; +\infty[$ .

3°) Déterminer la solution  $y$  de (E) qui vérifie  $y(1) = 1$ .

**Exercice 3** On considère l'équation (E) :  $xy' + (x - 2)y = 0$ , où  $y$  est une fonction dérivable de la variable  $x$ , que l'on suppose définie sur  $]0; +\infty[$ . On cherche à résoudre (E) sur cet intervalle.

1°) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a  $\frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}$ , et en déduire une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x-2}{x}$ .

2°) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a  $e^{-x+2\ln x} = x^2 e^{-x}$ .

3°) Donner la forme générale des solutions de l'équation (E) sur  $]0; +\infty[$ .

4°) Déterminer la solution  $y$  de (E) qui vérifie  $y(1) = 1$ .

**Exercice 4** On considère l'équation différentielle (E) :  $y' - y = x^2 - x - 1$ , où  $y$  est une fonction dérivable de la variable  $x$ , que l'on suppose définie sur  $\mathbb{R}$ . On cherche à résoudre (E) sur cet intervalle.

a) Donner la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).

b) Vérifier que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -x^2 - x$  est une solution de (E).

c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

d) Déterminer la solution  $y$  de (E) qui vérifie  $y(0) = 1$ .

**Exercice 5** On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + xy = x^2 e^{-x}$ , où  $y$  est une fonction dérivable de la variable  $x$ , que l'on suppose définie sur  $\mathbb{R}$ . On cherche à résoudre (E) sur cet intervalle.

a) Résoudre l'équation différentielle (E<sub>0</sub>) :  $y' + xy = 0$ .

b) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = (ax + b)e^{-x}$  soit une solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

d) Déterminer la solution  $y$  de (E) qui vérifie  $y(0) = 2$ .

## Méthodes de recherche d'une solution particulières d'une EDL1 à coefficients quelconques

**Exercice 6** ("Méthode de variation de la constante")

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$ , où  $y$  est une fonction dérivable de la variable  $x$ , que l'on suppose définie sur  $\mathbb{R}$ . On cherche à résoudre (E) sur cet intervalle.

a) Résoudre l'équation différentielle (E<sub>0</sub>) :  $y' + y = 0$ .

b) Déterminer une fonction  $k$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = k(x)e^{-x}$  soit une solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

d) Déterminer la solution  $y$  de (E) qui vérifie  $y(0) = 1 + \ln 2$ .

**Exercice 7** ("Méthode de variation de la constante")

On considère l'équation différentielle  $(E) : (x+2)y' + y = \frac{1}{x+1}$ , où  $y$  est une fonction dérivable de la variable  $x$ , que l'on suppose définie sur  $]1; +\infty[$ . On cherche à résoudre  $(E)$  sur cet intervalle.

a) Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : (x+2)y' + y = 0$ .

b) Déterminer une fonction  $k$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{k(x)}{x+2}$  soit une solution de  $(E)$  sur  $]1; +\infty[$ .

c) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $]1; +\infty[$ .

d) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  qui vérifie  $f(0) = 0$ .

**Exercice 8** On considère l'équation différentielle  $(E) : x^2y' - y = x^3 - \frac{x}{2}$ , où  $y$  est une fonction dérivable de la variable  $x$ , que l'on suppose définie sur  $]0; +\infty[$ . On cherche à résoudre  $(E)$  sur cet intervalle.

a) Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : x^2y' - y = 0$ .

b) Déterminer une fonction polynôme du second degré qui soit une solution de  $(E)$  sur  $]0; +\infty[$ .

c) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $]0; +\infty[$ .

d) Déterminer la solution  $y$  de  $(E)$  qui vérifie  $y(1) = 0$ .

**EDL2 à coefficients constants**

**Exercice 9** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

a)  $y'' + 3y' + 2y = 0$ ,

b)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ,

c)  $y'' = 4y' - 3y$ ,

d)  $y'' + 2y' = -2y$ .

**Exercice 10** On considère l'équation différentielle  $(E) : y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$ , où  $y$  est une fonction deux fois dérivable de la variable  $x$ , que l'on suppose définie sur  $\mathbb{R}$ . On cherche à résoudre  $(E)$  sur cet intervalle.

a) Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : y'' + 2y' + y = 0$ .

b) Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x^2e^{-x}$  est une solution particulière de  $(E)$ .

c) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

d) Déterminer la solution  $y$  de  $(E)$  qui vérifie  $y(0) = 4$  et  $y'(0) = 1$ .

**Exercice 11** On considère l'équation différentielle  $(E) : y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$ , où  $y$  est une fonction deux fois dérivable de la variable  $x$ , que l'on suppose définie sur  $\mathbb{R}$ . On cherche à résoudre  $(E)$  sur cet intervalle.

a) Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : y'' - 3y' + 2y = 0$ .

b) Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = ax^2 + bx + c$  soit une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

d) Déterminer la solution  $y$  de  $(E)$  qui vérifie  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$ .

**Exercice 12** On considère l'équation différentielle  $(E) : y'' + 9y = 2\cos(\omega x)$ , où  $y$  est une fonction deux fois dérivable de la variable  $x$ , que l'on suppose définie sur  $\mathbb{R}$ , et où  $\omega \geq 0$ . On cherche à résoudre  $(E)$  sur cet intervalle.

a) Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : y'' + 9y = 0$ .

b) Dans le cas où  $\omega \neq 3$ , déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ , en cherchant une solution particulière définie sur  $\mathbb{R}$  de la forme  $y_1(x) = A\cos(\omega x)$ , et où  $A$  sera exprimé en fonction de  $\omega$ .

b) Dans le cas où  $\omega = 3$ , déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ , en cherchant une solution particulière définie sur  $\mathbb{R}$  de la forme  $y_2(x) = x(B\cos(3x) + C\sin(3x))$ , et où  $B$  et  $C$  sont deux réels à déterminer.