

Vocabulaire

Exercice 1 Pour les expériences aléatoires suivantes, déterminer à chaque fois l'univers de l'expérience.

- On lance une pièce de monnaie, et on observe le côté "Pile", ou le côté "Face".
- On écrit au hasard un nombre à deux chiffres, en choisissant ces chiffres dans l'ensemble $\{1; 2; 3\}$.
- On lance un dé dont une face porte un 6, deux faces un 1 et trois faces un 2.
- Dans un tiroir, on a placé 2 paires de chaussettes rouges, et 3 paires de chaussettes bleues. Mal réveillé le matin, on choisit au hasard une paire de chaussettes.
- Dans un tiroir, on a placé 2 paires de chaussettes rouges, et 3 paires de chaussettes bleues. Toujours mal réveillé le matin, on choisit au hasard deux paires de chaussettes.
- Dans un tiroir, on a placé 2 paires de chaussettes rouges, 1 paire de chaussettes vertes et 3 paires de chaussettes bleues. Éternellement mal réveillé le matin, on choisit au hasard une paire de chaussettes.
- Dans un tiroir, on a placé 2 paires de chaussettes rouges, 1 paire de chaussettes vertes et 3 paires de chaussettes bleues. Encore et toujours mal réveillé le matin, on choisit au hasard deux paires de chaussettes.
- Dans un tiroir, on a placé 2 paires de chaussettes rouges, 1 paire de chaussettes vertes et 3 paires de chaussettes bleues. Comme d'habitude, on choisit au hasard trois paires de chaussettes.

Exercice 2 Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, on demande de citer :

- un événement élémentaire ;
 - un événement comportant plusieurs éventualités ;
 - un événement certain ;
 - un événement impossible.
- On choisit au hasard et simultanément deux stylos parmi quatre stylos de couleur rouge, verte, noire et bleue.
 - Un singe tape successivement sur deux touches de chiffres d'une calculatrice. On note le nombre ainsi obtenu.
 - Dans une urne, il y a 2 boules vertes et 3 boules rouges. On tire 3 boules sans remise.
 - Dans une urne, il y a 2 boules vertes et 3 boules rouges. On tire 3 boules, avec remise de la boule tirée après chaque tirage.

Exercice 3 On lance dix jetons numérotés de 1 à 10 dans un sac, et on tire au hasard un seul jeton. On appelle :

- A l'événement "le jeton tiré porte un nombre pair" ;
 - B l'événement "le jeton tiré porte un nombre multiple de 3".
- Peut-on affirmer que $A = \{2; 4; 8; 10\}$? Peut-on affirmer que $B = \{1; 3; 6; 9\}$?
 - Décrire A et B en énumérant leurs éléments.
 - Décrire $A \cap B$ et $A \cup B$.
 - Décrire $\bar{A}$ et $\bar{B}$, puis comparer $\bar{A} \cap \bar{B}$ et le contraire de l'événement $A \cup B$.

Exercice 4 On considère un jeu de 32 cartes. On tire au hasard une carte parmi les 32. On appelle :

- T l'événement "Tirer un trèfle" ;
 - K l'événement "Tirer un carreau" ;
 - C l'événement "Tirer un coeur" ;
 - P l'événement "Tirer un pique" ;
 - A l'événement "Tirer une tête" ;
 - R l'événement "Tirer un roi" ;
- Quelles sont les éventualités de T ? Combien A comporte-t-il d'éventualités ?
 - Traduire par une phrase l'événement $R \cap T$.
 - Traduire par une phrase l'événement $K \cap A$.
 - Traduire par une phrase l'événement $T \cup R$.
 - Traduire par une phrase l'événement $C \cup P$.
 - Traduire, en utilisant des intersections ($\cap$) ou réunion ($\cup$) les événements suivants :
 - La carte tirée est un carreau ou un pique ;
 - La carte tirée est le roi de pique ;
 - La carte tirée est une tête à coeur.
 - Traduire par une phrase les événements suivants :

$\bar{A}; \bar{K}; \bar{R} \cap C; \bar{A} \cap K; \bar{T} \cap \bar{C}.$

6°) A l'aide des événements A, R, T, K, C et P , exprimer mathématiquement les événements suivants :

- La carte tirée n'est pas un roi ;
- La carte tirée n'est pas un pique ;
- La carte tirée est un roi différent du roi de pique ;
- La carte tirée n'est ni un pique ni un roi.

Equiprobabilité et propriétés élémentaires des probabilités

Exercice 5 On considère un jeu de 32 cartes. On tire au hasard une carte parmi les 32 (on suppose tous les tirages équiprobables). On appelle :

- T l'événement "Tirer un trèfle" ;
- K l'événement "Tirer un carreau" ;
- C l'événement "Tirer un coeur" ;
- P l'événement "Tirer un pique" ;
- A l'événement "Tirer une tête" ;
- R l'événement "Tirer un roi" ;

1°) Calculer les probabilités de chacun de ces événements.

2°) Quelle est la probabilité de l'événement $T \cap R$ et celle de l'événement $K \cap A$?

3°) Quelle est la probabilité de l'événement $T \cup R$ et celle de l'événement $C \cup P$.

4°) Quelle est la probabilité des événements suivants :

- La carte tirée est un carreau ou un pique ;
- La carte tirée est le roi de pique ;
- La carte tirée est une tête à coeur ;
- $\bar{A}$;
- $\bar{K}$;
- $\bar{R} \cap C$;
- $\bar{A} \cap K$;
- $\bar{T} \cap \bar{C}$.
- La carte tirée n'est pas un roi ;
- La carte tirée n'est pas un pique ;
- La carte tirée est un roi différent du roi de pique ;
- La carte tirée n'est ni un pique ni un roi.

Exercice 6 Une expérience aléatoire conduit à l'observation de trois événements A, B et C . On sait que $\mathbb{P}(A) = 0,15$, que $\mathbb{P}(B) = 0,24$, que $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,03$, que $\mathbb{P}(A \cap C) = 0,4$ et que B et C sont incompatibles.

Calculer :

- 1°) $\mathbb{P}(A \cup B)$;
- 2°) $\mathbb{P}(A \cap \bar{C})$;
- 3°) $\mathbb{P}(\bar{A})$;
- 4°) $\mathbb{P}(B \cup C)$.

Probabilités et dénombrements élémentaires par tableaux

Exercice 7 Voici les résultats d'un sondage effectué au début de l'année 1998 auprès de 1 000 personnes, à propos d'Internet :

- 40% des personnes interrogées déclarent être intéressées par Internet ;
- 35% des personnes interrogées ont moins de 25 ans et, parmi celles-ci, 80% déclarent être intéressées par Internet ;
- 30% des personnes interrogées ont plus de 50 ans et, parmi celles-ci, 85% ne sont pas intéressées par Internet.

1°) Reproduire et compléter le tableau suivant :

	<i>Intéressés par Internet</i>	<i>Non intéressés par Internet</i>	<i>Total</i>
<i>Moins de 25 ans</i>		70	
<i>De 25 à 50 ans</i>			
<i>Plus de 50 ans</i>			
<i>Total</i>			1000

2°) On choisit au hasard une personne parmi les 1 000 interrogées. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :

A : "la personne interrogée est intéressée par Internet" ;

B : "la personne interrogée a moins de 25 ans".

a) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

b) Définir par une phrase l'événement contraire de B , puis calculer sa probabilité.

c) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$, puis calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$. En déduire $\mathbb{P}(A \cup B)$.

d) On sait maintenant que la personne interrogée n'est pas intéressée par Internet. Quelle est alors la probabilité qu'elle ait moins de 50 ans ?

Exercice 8 Une entreprise fabrique des pièces mécaniques en grande série ; 95% de ces pièces ne présentent pas de défaut. Cette entreprise dispose d'un appareil qui contrôle la qualité des pièces produites. Cet appareil accepte toutes les pièces sans défaut mais ne rejette que 80% de celles qui ont un défaut.

On considère un lot de 10000 pièces respectant ces pourcentages.

1°) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant qui est déjà partiellement rempli :

	<i>Nombre de pièces avec défaut</i>	<i>Nombre de pièces sans défaut</i>	<i>Total</i>
<i>Nombre de pièces acceptées après contrôle</i>			
<i>Nombre de pièces rejetées après contrôle</i>			
<i>Total</i>			

2°) On choisit une pièce au hasard parmi les 10 000 du lot précédent. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

a) Calculer la probabilité p_1 que cette pièce ait un défaut et ne soit pas rejetée par l'appareil de contrôle.

b) Calculer la probabilité p_2 que cette pièce soit rejetée par l'appareil de contrôle.

Exercice 9 Une entreprise fabrique des pièces métalliques, qui peuvent présenter deux types de défauts : un défaut de longueur L , et un défaut de surface S . On a estimé que dans un lot de pièces, la probabilité de choisir une pièce présentant le défaut L est estimée à 0,02, tandis que 8% des pièces présentent le défaut S . Enfin, 0,16% des pièces produites le sont avec les deux défauts.

Le stock de l'entreprise compte 10 000 pièces déjà produites.

1°) En résumant l'ensemble des informations sur la qualité des pièces produites et leur nombre :

- a) Déterminer le nombre de pièces ne présentant pas le défaut L .
 - b) Déterminer le nombre de pièces ne présentant pas le défaut S .
 - c) Déterminer le nombre de pièces ne présentant aucun défaut.
- 2°) On prélève au hasard une pièce dans le stock (on suppose tous les prélèvements équiprobables). Déterminer la probabilité des trois événements suivants :
- A : "la pièce choisie ne présente pas le défaut L ";
 - B : "la pièce choisie ne présente pas le défaut S ";
 - C : "la pièce est sans défaut".
- 3°) Après la vente d'un nombre inconnu de pièces, qui ne modifie pas la composition du stock, on y prélève au hasard une pièce (on suppose toujours les prélèvements équiprobables).
- a) Déterminer la probabilité des trois événements suivants :
 - A' : "la pièce choisie ne présente pas le défaut L ";
 - B' : "la pièce choisie ne présente pas le défaut S ";
 - C' : "la pièce est sans défaut".

Exercice 10 Une usine produit chaque jour des pièces du même modèle. Chacune des pièces peut présenter un défaut d'épaisseur, noté E , un défaut de longueur L , ou les deux à la fois.

On sait que 6% des pièces produites présentent le défaut E , 5% le défaut L , et parmi les pièces présentant le défaut E , 25% ont aussi le défaut L .

On tire au hasard une pièce dans la production du jour. Calculer la probabilité des événements suivants :

- 1°) A : la pièce présente les deux défauts ;
- 2°) B : La pièce n'a que le défaut L ;
- 3°) C : La pièce n'a que le défaut E ;
- 4°) D : La pièce présente au moins un défaut ;
- 5°) E : La pièce présente le défaut E ;
- 6°) F : La pièce est défectueuse.

Exercice 11 Le chef de rayon travaillant chez Bricolo'Discount réalise son approvisionnement en vis chez deux grossistes, installés respectivement à Marseille et à Lille. Les vis vendues peuvent être à tête cruciforme (VC), ou à tête plate (VP). Il sait que 80% des vis fournies par Marseille sont à tête plate, et que la probabilité qu'une vis provenant de Lille soit cruciforme est 0,1. Marseille fournit 20% des vis en rayon.

Un client achète au hasard une vis (on suppose tous les choix équiprobables).

- 1°) Calculer la probabilité des événements suivants :
- a) A : la vis est à tête cruciforme et provient de Lille ;
- b) B : la vis est à tête cruciforme et provient de Marseille ;
- c) C : la vis est à tête cruciforme ;
- d) D : la vis provient de Lille ;
- e) E : la vis est à tête plate et provient de Lille ;
- 2°) La vis achetée par le client est à tête plate. Déterminer la probabilité qu'elle provienne de Lille.

Probabilités et dénombrements élémentaires par arbres

Exercice 12 Benoît sait que le congélateur de la cuisine renferme cinq bâtons de crème glacée, de cinq parfums différents (vanille, chocolat, pistache, café, praliné).

Gourmand et insomniaque, il décide de se lever en pleine nuit, sans allumer la lumière, et de prendre, à tâtons et successivement, deux bâtons dans le congélateur.

Tous les choix sont équiprobables.

- 1°) À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de couples différents de bâtons qu'il peut ainsi obtenir.
- 2°) Ses parfums préférés sont vanille et café. Calculer les probabilités qu'il obtienne :
- a) le bâton à la vanille, puis le bâton au café ;
- b) les bâtons de ses parfums préférés dans un ordre quelconque ;
- c) un seul de ses parfums préférés ;
- d) aucun de ses parfums préférés.

Dénombrements directs

Exercice 13 (Avec ou sans ordre ...)

1°) Une course de PMU voit 5 chevaux engagés. Combien de tiercés dans l'ordre peut-on composer ? et dans le désordre ?

2°) Mêmes questions avec 15 chevaux.

Exercice 14 Calculer les nombre suivants (on pourra utiliser la calculatrice) :

1°) a) $3!$ b) $6!$ c) $8!$ d) $15!$

2°) Que penser du résultat donné par la calculatrice pour le nombre du d) ?

Exercice 15 1°) Simplifier les expressions suivantes :

a) $\frac{15!}{13!}$ b) $\frac{7!}{5!2!}$ c) $\frac{100!}{98!3!}$ d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ e) $5! - 3!$ f) $5!3!$
g) $\frac{25!}{20!5!}$ h) $\frac{n!}{2!(n-2)!}$.

2°) Écrire, à l'aide de factorielles, les nombres suivants :

a) $1 \times 5 \times 3 \times 2 \times 4$ b) $4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$ c) $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10$
d) $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9$ e) $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-2) \times (2n)$ f) $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times (2n+1)$.

Exercice 16 Faire un emploi du temps d'une classe de BTS consiste (grossièrement) à placer 16 blocs de 2 heures, dans un planning hebdomadaire vierge, qui compte 16 créneaux de 2 heures. Déterminer le nombre d'emplois du temps différents que l'on peut constituer :

- de manière exacte ;

- en en donnant un ordre de grandeur.

Exercice 17 Calculer les nombres suivants :

a) C_5^0 b) C_5^1 c) C_5^2 d) C_5^3 e) C_5^4 f) C_5^5 .

Exercice 18 Vérifier que $C_8^3 + C_8^4 = C_9^4$

Exercice 19 Dans un avion embarquant 40 passagers, on propose à 4 personnes prises au hasard de répondre à un sondage sur le programme de fidélisation de la compagnie. De combien de manières différentes peut-on composer l'échantillon du sondage ?

Exercice 20 Un client compose son menu (une entrée, un plat, un dessert) dans un restaurant, qui propose au choix 4 entrées, 3 plats du jour, et 5 desserts. Combien de menus différents peut-on composer ?

Exercice 21 On lance deux dés cubiques bien équilibrés. Tous les résultats sont équiprobables. Quelle est la probabilité d'obtenir deux numéros identiques ?

Exercice 22 On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 32. Tous les tirages sont équiprobables. Quelle est la probabilité d'obtenir deux cartes de couleur rouge ?

Exercice 23 Afin de représenter les élèves d'une classe, on en élit 2 parmi les 18 qui la composent. Combien de manières y a-t-il de composer le duo de délégués ?

Exercice 24 On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32, pour constituer une main (sans tenir compte de l'ordre d'arrivée des cartes).

1°) Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?

2°) Combien y a-t-il de mains contenant exactement 3 rois ?

Exercice 25 On rappelle qu'un jeu de belote se compose de 32 cartes et de 4 couleurs. On rappelle qu'à ce jeu, il n'y a pas lieu de distinguer des mains identiquement composées, mais qui se présentent dans un ordre différent.

1°) Avec un jeu de belote, combien de mains (différemment composées) de 8 cartes peut-on former ?

2°) a) Combien de mains différentes ne contenant que des coeurs peut-on former ?

b) Combien de mains différentes contenant 4 coeurs et 4 piques peut-on former ?

c) Combien de mains différentes contenant exactement 4 dames peut-on former ?

3°) On distribue 8 cartes au hasard à un joueur en début de partie. On suppose que toutes les mains sont équiprobables.

a) Quelle est la probabilité qu'un joueur obtienne une main composée exclusivement de coeurs ?

b) Quelle est la probabilité qu'un joueur obtienne une main composée exactement de 4 coeurs et 4 piques ?

c) Quelle est la probabilité qu'un joueur obtienne une main comportant un carré de dames ?

Exercice 26 Dans un aquarium contenant des poissons, on prend au hasard un premier poisson, puis, sans le remettre, un second. On obtient ainsi un couple de poissons. Tous les couples sont supposés équiprobables.

1°) L'aquarium contient 4 poissons rouges, et 2 noirs.

- a) Combien de couples de poissons peut-on obtenir dans ce cas ?
- b) Quelle est la probabilité de l'événement A : "Obtenir 2 poissons rouges" ;
- c) Quelle est la probabilité de l'événement B : "Obtenir 2 poissons noirs" ;
- d) Quelle est la probabilité de l'événement C : "Obtenir 2 poissons de couleurs différentes".

2°) L'aquarium contient maintenant 4 poissons rouges, et n noirs (n entier, $n \geq 2$).

- a) Combien de couples de poissons peut-on obtenir dans ce cas ?
- b) Quelle est la probabilité de l'événement A : "Obtenir 2 poissons rouges" ;
- c) Quelle est la probabilité de l'événement B : "Obtenir 2 poissons noirs" ;
- d) Quelle est la probabilité de l'événement C : "Obtenir 2 poissons de couleurs différentes".

Exercice 27 À la foire aux célibataires de Plougastel, il n'y a cette année que 9 hommes et 9 femmes. Pour être certain que tous les hommes danseront une valse avec chaque femme, on jouera autant de valses qu'il faudra. Le Gentil Organisateur, n'étant pas très fort en maths, décide d'aligner les hommes avant chaque valse (toujours dans le même ordre), et forme les couples de toutes les manières possibles en plaçant une femme avec chaque homme. La procédure prend 1 minute, à laquelle il faut rajouter les 3 minutes de la valse.

Combien de temps va durer la fête des célibataires de Plougastel ?

(Aux dernières nouvelles, le Conseil Municipal n'organisera plus jamais de foire aux célibataires).

Exercice 28 Un code barre est composé d'une suite de 5 barres, qui peuvent être épaisses ou fines.

1°) Combien de codes barres est-il ainsi possible de former ?

2°) Combien de codes barres est-il possible de composer avec exactement une barre épaisse ?

3°) Combien de codes barres est-il possible de composer avec exactement 3 barres épaisses ?

4°) Combien de codes barres est-il possible de composer avec exactement 4 barres épaisses ?

Exemple de schéma de Bernoulli

Exercice 29 On lance une pièce à pile ou face, et on suppose que la pièce est bien équilibrée (et qu'elle ne tombe jamais sur la tranche).

On réalise une série de n lancers successifs ($n \in \mathbb{N}$), et on note à la suite F ou P sur une feuille de papier, suivant les résultats de la série de piles ou faces obtenue en n lancers. On compose ainsi des "mots" de n lettres, du type (si $n = 5$) : $FFFPP$ ou $PPFFP$, etc.

On fait l'hypothèse que, lors d'un lancer, la pièce n'a pas conscience de la face obtenue lors des lancers précédents.

On s'intéresse aux événements $F_{i,n}$: "Obtenir i fois Face, au cours d'une série de n lancers".

Étude du cas $n = 1$

On ne réalise qu'un lancer de la pièce.

1°) Combien de "mots" d'une lettre peut-on former avec les deux symboles P et F ?

2°) Quelle est la probabilité des événements $F_{0,1}$ et $F_{1,1}$?

Étude d'une série de 2 lancers successifs (cas $n = 2$)

On réalise successivement 2 lancers de la pièce.

3°) Combien de "mots" de 2 lettres peut-on former avec les deux symboles P et F ?

4°) Combien y a-t-il de mots de 2 lettres composés d'aucun symbole P ? d'un seul symbole P ? de deux symboles P ?

5°) Quelle est la probabilité des événements $F_{0,2}$, $F_{1,2}$ et $F_{2,2}$?

Étude d'une série de 3 lancers successifs (cas $n = 3$)

On réalise successivement 3 lancers de la pièce.

6°) Combien de "mots" de 3 lettres peut-on former avec les deux symboles P et F ?

7°) Combien y a-t-il de mots de 3 lettres composés d'aucun symbole P ? d'un seul symbole P ? de deux symboles P ? de 3 symboles P ?

8°) Quelle est la probabilité des événements $F_{0;3}$, $F_{1;3}$, $F_{2;3}$ et $F_{3;3}$?

Étude d'une série de 5 lancers successifs (cas $n = 5$)

On réalise successivement 5 lancers de la pièce.

6°) Combien de "mots" de 5 lettres peut-on former avec les deux symboles P et F ?

7°) Combien y a-t-il de mots de 5 lettres composés d'aucun symbole P ? d'un seul symbole P ? de deux symboles P ? de 3 symboles P ? de 4 symboles P ? de 5 symboles P ?

8°) Quelle est la probabilité des événements $F_{0;5}$, $F_{1;5}$, $F_{2;5}$, $F_{3;5}$, $F_{4;5}$ et $F_{5;5}$?

Étude d'une série de n lancers successifs (cas n entier non nul)

On réalise successivement n lancers de la pièce.

6°) Combien de "mots" de n lettres peut-on former avec les deux symboles P et F ?

7°) Combien y a-t-il de mots de n lettres composés de k symboles P ($0 \leq k \leq n$) ?

8°) Quelle est la probabilité des événements $F_{k;n}$, pour k entier, $0 \leq k \leq n$.

Probabilités conditionnelles

Exercice 30 On considère les résultats d'une enquête réalisée au Lycée, et qui croise les informations relatives au sexe des élèves avec celles relatives au tabagisme :

	Garçons	Filles	Totaux
Fumeurs	36	44	80
Non-fumeurs	9	11	20
Totaux	45	55	100

On choisit au hasard un élève de ce lycée, et on l'interroge.

1°) Déterminer la probabilité des événements suivants :

- G : "L'élève interrogé est un garçon".

- F : "L'élève interrogé est une fille".

- C : "L'élève est un fumeur".

- D : "L'élève n'est pas un fumeur".

2°) a) Évaluer directement (sans utiliser de probabilités conditionnelles) la probabilité de l'événement : "Sachant que l'on interroge un non-fumeur, c'est une fille".

b) Utiliser la définition des probabilités conditionnelles pour retrouver ce résultat.

3°) a) Évaluer directement (sans utiliser de probabilités conditionnelles) la probabilité de l'événement : "Sachant que l'on interroge un garçon, c'est un fumeur".

b) Utiliser la définition des probabilités conditionnelles pour retrouver ce résultat.

Exercice 31 On estime que 1 avion sur 40 dans le monde est mal entretenu. A Roissy ce matin, 200 avions sont prévus au décollage. La DGAC procède comme chaque jour à des contrôles de sécurité portant sur 10% des appareils, ce qui conduit à l'observation suivante : 5% des avions inspectés sont mal entretenus, et devront donc rester au sol en raison de ce défaut d'entretien.

1°) Dresser un tableau permettant de calculer le nombre d'avions se trouvant dans toutes les situations possibles compte tenu des éléments ci-dessus.

2°) On s'intéresse à un avion prévu au décollage ce matin à Roissy. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- A : "cet avion est mal entretenu et est inspecté".

- B : "cet avion, dont on sait qu'il est contrôlé, est mal entretenu".

- C : "cet avion n'est pas contrôlé ou est mal entretenu".

3°) Calculer la probabilité que l'avion ne soit pas contrôlé, sachant que il est mal entretenu.

Exercice 32 Un sous-traitant fabrique des écrous de précision pour l'aéronautique. Il teste toute sa production, dont il sait que 98% est conforme aux prescriptions du cahier des charges. Le processus de test est fiable dans une certaine mesure :

- d'une part, 90% des pièces réellement conformes sont déclarées conformes par le test ;
- d'autre part, 99% des pièces réellement non conformes sont déclarées comme telles par le test.

On considère les événements suivants :

A : "Un écrou est réellement conforme" et B : "Un écrou est déclaré non conforme".

1°) Déterminer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}_A(\bar{A})$, et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$.

2°) Déterminer $\mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ puis $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.

3°) Déterminer la probabilité qu'un écrou soit déclaré non conforme.

4°) Déterminer la probabilité qu'un écrou soit conforme, sachant qu'il est déclaré non conforme par le test.

Exercice 33 Un cadenas est composé de 4 barillets, portant chacun les 10 chiffres de 0 à 9.

1°) Combien de codes différents à 4 chiffres peut-on choisir sur le cadenas ?

2°) On admet que tous les codes ont la même probabilité d'être choisis. Donner la probabilité des événements suivants :

a) A : " Tous les chiffres du code sont différents" ;

b) B : "Le chiffre 1 ne figure pas dans le code" ;

c) C : "Le chiffre 1 figure une seule fois dans le code" ;

d) D : "Le chiffre 1 figure au moins deux fois dans le code" ;

e) E : "Il n'y a que des chiffres impairs dans le code".

3°) Calculer la probabilité que tous les chiffres du code soient différents, ou que 1 ne figure pas dans le code.

4°) Sachant qu'il n'y a que des chiffres impairs dans le code, quelle est la probabilité que tous les chiffres du code soient différents ?

Exercice 34 Nicolas, ministre très médiatique, dispose toujours dans chacune de ses poches d'un carnet, rempli d'une liste de "petites phrases" toutes prêtes, griffonnées par ses conseillers. Lorsqu'il est sur le terrain, entouré par les médias, il doit faire une déclaration sur tout ce qu'il voit, afin d'avoir le dernier mot. Dans la précipitation, il choisit au hasard une poche, en tire le carnet, et y sélectionne au hasard une "petite phrase".

Son équipe "Médias" est très compétente, mais toutes les "petites phrases" ne sont pas adaptées à la situation qu'on lui présente : ainsi, les "petites phrases" du carnet de droite sont adaptées à la situation avec une probabilité (remarquable) de 0,914, celles du carnet de gauche le sont avec une probabilité de 0,879.

On a relevé que 6 fois sur 10, le ministre choisit de consulter le carnet situé dans la poche droite, plus accessible à un droitier.

Un jour, on amène le Ministre dans un lycée, et on suppose qu'il procède toujours à son habitude pour faire sa déclaration : au hasard (on suppose donc que toutes les "petites phrases" ont la même probabilité d'être choisies).

On considère les événements suivants :

D : "le carnet choisi est celui de la poche droite" ;

G : "le carnet choisi est celui de la poche gauche" ;

A : "la petite phrase prononcée est adaptée à la situation sur le terrain".

1°) Quelle est la probabilité que la "petite phrase" soit extraite du carnet de la poche droite ? de la poche gauche ?

2°) Que vaut $\mathbb{P}_D(A)$? et $\mathbb{P}_G(A)$?

2°) Montrer que $A = (A \cap D) \cup (A \cap G)$.

3°) Calculer $\mathbb{P}(A \cap D)$ et $\mathbb{P}(A \cap G)$. En déduire la probabilité de l'événement A .

4°) Quelle est la probabilité que le Ministre dise une énormité ?

5°) Quelle est la probabilité, le Ministre ayant eu l'air de s'y connaître, que la phrase prononcée provienne du carnet de gauche ?

Exercice 35 Jacques est un peu dur d'oreille, et ne comprend clairement que deux questions sur trois. Il est aujourd'hui en déplacement au Salon de l'Agriculture, Porte de Versailles.

Pour éviter de faire répéter son interlocuteur, il répond au hasard des banalités. Mais comme c'est un expert des champs de foire agricoles, il lui arrive, bien qu'il n'ait rien entendu, de répondre 2 fois sur 3 ce que son interlocuteur souhaite lui voir dire. De plus, même lorsqu'il entend bien, il ne prend pas le temps de la réflexion, mais trouve une réponse qui satisfait son interlocuteur 9 fois sur 10.

On considère en outre les événements suivants :

M : "Jacques a mal entendu la question" ;

B : "Jacques a bien entendu la question" ;

S : "L'interlocuteur de Jacques est satisfait de la réponse à sa question".

1°) Que valent $\mathbb{P}(M)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}_M(S)$? et $\mathbb{P}_B(S)$?

2°) Jacques n'ayant rien entendu, quelle est la probabilité que son interlocuteur n'apprécie pas sa réponse ?

- 3°) Jacques ayant bien entendu, quelle est la probabilité que son interlocuteur n'apprécie pas sa réponse ?
 4°) Calculer $\mathbb{P}(S \cap B)$ et $\mathbb{P}(S \cap M)$. En déduire la probabilité de l'événement S .
 5°) Sachant que Jacques a mal répondu à son interlocuteur (parti en hurlant), quelle est la probabilité qu'il n'ait rien entendu ?

Exercice 36 Une usine de montage utilise des roulements à billes provenant de deux entreprises de mécanique de précision, l'une située à Reims, l'autre à Nancy. Son stock provient à 40% de l'usine de Reims, le reste provenant de Nancy. De l'usine de Reims, il sait que 4,5% de la livraison est inutilisable, car défectueuse. Quant à Nancy, qui utilise un contrôle de qualité plus sérieux, 2% des pièces en provenant sont défectueuses. Enfin, 4/5 des roulements sont peints en rouge dans la production de Reims, ce qui ne les empêche pas d'être défectueux dans les mêmes proportions que les autres provenant cette ville.
 On prélève un roulement au hasard dans le stock.

- 1°) Déterminer la probabilité qu'il soit peint, sachant qu'il provient de Nancy.
 2°) Déterminer la probabilité qu'il soit peint.
 3°) Déterminer la probabilité qu'il soit conforme, sachant qu'il provient de Nancy.
 4°) Déterminer la probabilité qu'il soit conforme, sachant qu'il provient de Reims.
 5°) Déterminer la probabilité qu'il soit non conforme.

Exercice 37 Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 découpent des pièces métalliques identiques. M_1 fournit 60% de la production (parmi lesquelles 6,3% sont défectueuses, le reste étant fourni par M_2 (dont 4% de la production est défectueuse).

La production du jour est constituée des pièces produites par les deux machines, et on en tire en fin de soirée une pièce au hasard (tous les prélèvements sont supposés équiprobables).

A. Utilisation des formules des probabilités conditionnelles

- a) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?
 b) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?
 c) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?

B. Utilisation d'un tableau

- 1°) On suppose maintenant que la production est composée de x pièces. Reproduire et compléter le tableau suivant qui décrit la production du jour :

	Nombre de pièces produites par M_1	Nombre de pièces produites par M_2	Total
Nombre de pièces défectueuses			
Nombre de pièces conformes			
Total			

- a) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?
 b) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?
 c) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?
 3°) Quelle conclusion tirer des parties A et B ?

C. Utilisation d'un arbre des probabilités conditionnelles

- 1°) Dresser un arbre des probabilités conditionnelles relatif à la situation proposée.
 2°) a) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?
 b) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?
 c) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?
 3°) Quelle conclusion tirer des parties A, B et C ?

Événements indépendants

Exercice 38 En fin de chaîne de montage, une voiture peut présenter un défaut de forme de carrosserie C , ou un défaut de peinture P . La probabilité d'avoir un défaut du type C est 0,01, et celle d'un défaut de type P est 0,005. On suppose que les deux défauts apparaissent indépendamment l'un de l'autre. Quelle est la probabilité d'avoir un défaut sur la voiture ?

Exercice 39 En fin de chaîne de montage, une voiture peut présenter un défaut de forme de carrosserie C , ou un défaut de peinture P . La probabilité d'avoir un défaut de type C est 0,01, et celle d'un défaut de type P est 0,005 si le défaut C n'est pas déjà présent, et de 0,2 dans le cas contraire.

- 1°) Peut-on considérer que les deux défauts apparaissent indépendamment l'un de l'autre ?
- 2°) Quelle est la probabilité d'avoir le défaut P ?
- 3°) Quelle est la probabilité d'avoir un défaut sur la voiture ?

Exercice 40 La commande d'un portail de jardin tombe en panne à chaque fois qu'il pleut. Par ailleurs, chaque fois qu'un caillou se coince sous l'un des deux battants, le portail est bloqué. Le propriétaire a remarqué que les jours de beau temps sont deux fois plus nombreux que les jours de pluie, tandis que les cailloux viennent se glisser sous le battant un jour par semaine. On suppose que ceci se produit indépendamment du temps qu'il fait.

- 1°) Quelle est la probabilité que le portail soit bloqué ?
- 2°) Quelle est la probabilité qu'un caillou bloque le portail sachant qu'il pleut ?
- 3°) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau, sachant qu'aucun caillou ne bloque le portail ?

Exercice 41 Dans un atelier, 2% des pièces produites sont defectueuses. On décide donc de procéder à un contrôle de qualité de la production, qui est tel que :

- si la pièce produite est bonne, elle est acceptée avec probabilité 0,96 ;
 - si la pièce est defectueuse, elle est rejetée avec probabilité 0,98.
- Enfin, on considère qu'il y a erreur de contrôle si l'une (au moins) des deux situations précédentes se produit.

On prélève au hasard une pièce dans la production, et on considère les événements :

- D : "la pièce est defectueuse" ;
- C : "la pièce est conforme" ;
- A : "la pièce est acceptée" ;
- R : "la pièce est refusée" ;
- E_1 : "la pièce est defectueuse et est acceptée" ;
- E_2 : "la pièce est conforme et est refusée" ;
- E : "il y a erreur de contrôle sur cette pièce".

- 1°) a) Exprimer E_1 et E_2 à l'aide des événements A , R , D , C , puis E à l'aide de E_1 et E_2 .
- b) Montrer que les événements E_1 et E_2 sont incompatibles.
- c) Calculer la probabilité des événements E_1 et E_2 .
- d) En déduire la probabilité de l'événement E .
- 2°) a) Calculer la probabilité que la pièce soit conforme sachant qu'elle a été refusée au contrôle.
- b) Calculer la probabilité que la pièce soit conforme sachant qu'elle a été acceptée au contrôle.
- 3°) a) Calculer, après l'avoir décrit, la probabilité de l'événement $A \cap C$.
- b) Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Exercice 42 Un laboratoire pharmaceutique vend des comprimés pour le mal de tête, et les teste avant de les mettre sur la marché. Il sait que 98% des comprimés fabriqués sont conformes, et il sait que le test est tel qu'un comprimé conforme est accepté au moment du test avec une probabilité de 0,98, tandis qu'un comprimé non conforme est refusé dans 99% des cas. On prélève un comprimé dans l'ensemble de la production, et on souhaite étudier les événements suivants :

- A : "le comprimé est conforme" ;
- B : "le comprimé est refusé".

- 1°) Déterminer la probabilité qu'un comprimé soit refusé, alors qu'on sait qu'il est conforme.
- 2°) Déterminer la probabilité qu'un comprimé soit refusé et qu'il soit conforme.
- 3°) Déterminer la probabilité qu'un comprimé soit refusé.
- 4°) Déterminer la probabilité qu'un comprimé soit conforme, alors qu'on sait qu'il n'est pas refusé (arrondir le résultat à 10^{-4}).