

Propriétés générales des lois de variables aléatoires continues

Exercice 1 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1°) Montrer que f est une densité de probabilité.

2°) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0; 1]$, de densité de probabilité f . Déterminer la fonction de répartition F_X de X .

Exercice 2 On considère les intégrales $I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ et $I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$.

On précise que, par convention,

$$\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A te^{-t} dt,$$

et que de même

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^2 e^{-t} dt.$$

1°) a) Calculer la valeur de I_1 .

b) Montrer que

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est la densité d'une certaine variable aléatoire réelle X_1 .

c) Calculer l'espérance de X_1 .

2°) a) Calculer la valeur de I_2 .

b) Montrer que

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est la densité d'une certaine variable aléatoire réelle X_2 .

c) Calculer l'espérance de X_2 .

3°) Calculer la variance et l'écart-type de X_1 en utilisant les valeurs de I_1 et de I_2 .

Remarque : Pour n appartenant à $\mathbb{N}$, on considère de manière plus générale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$, où, par convention,

$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^n e^{-t} dt$. On démontre alors que $I_n = n!$, et que

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^n e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est la densité d'une certaine variable aléatoire réelle X_n .

Exercice 3 a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ de façon que la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{a}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

soit la densité d'une certaine variable aléatoire réelle X .

b) Déterminer alors la fonction de répartition F_X de X .

Exercice 4 a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ de façon que la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} ax(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit la densité d'une certaine variable aléatoire réelle X .

b) Déterminer alors la fonction de répartition F_X de X .

Exercice 5 1°) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ de façon que

$$f : x \mapsto \begin{cases} 3e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit la densité d'une variable aléatoire X .

2°) Déterminer alors sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

Exercice 6 L'objectif de cet exercice est le calcul de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}} dx$. Pour cela, on considère l'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{y^2}{2}} dy.$$

1°) Montrer que $I = J$. En déduire l'expression de I^2 en fonction de I et J .

2°) Montrer que $IJ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$.

3°) On admet la formule suivante, dite de changement de variables en polaires :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x; y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho f(\rho \cos \theta; \rho \sin \theta) d\rho d\theta,$$

obtenue en posant $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$.

Montrer que $IJ = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{\frac{\rho^2}{2}} d\rho$, puis calculer la valeur exacte de IJ .

4°) En déduire la valeur exacte de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}} dx$.

Loi Exponentielle

Exercice 7 La durée de vie d'un appareil suit une loi exponentielle de paramètre 0,025, la durée étant exprimée en jours.

1°) Calculer la durée de vie moyenne de cet appareil.

2°) Déterminer la probabilité que cet appareil fonctionne correctement au moins 200 jours.

Exercice 8 La variable aléatoire qui, à un composant électronique donné, associe sa durée de vie exprimée en heures suit une loi exponentielle.

1°) Calculer le taux d'avarie, sachant que $\mathbb{P}(T > 450) = 0,8$.

2°) Calculer la MTBF de ce composant.

3°) Calculer la valeur t_0 pour laquelle $\mathbb{P}(T \leq t_0) = 0,5$.

Exercice 9 La durée de vie d'une ampoule admet pour fonction de fiabilité la fonction définie par $R(t) = e^{-0,00008t}$, dans laquelle les durées sont mesurées en heures.

1°) Calculer $\mathbb{P}(T > 1000)$.

2°) Calculer la MTBF d'une ampoule, et l'écart-type associé.

3°) Calculer la valeur t_0 pour laquelle $\mathbb{P}(T \leq t_0) = 0,5$.

Fiabilité

Exercice 10 Les résultats seront donnés arrondis à 10^{-3} près.

La fonction de fiabilité d'un panneau solaire de satellite C est donnée pour $t > 0$ par $R_C(t) = e^{-0,0125t}$, où t est exprimé en mois. On note X la durée de vie (aléatoire) du panneau solaire, exprimée en mois.

- 1°) Quel est le temps moyen de bon fonctionnement du panneau solaire C ?
- 2°) Quelle est la probabilité que le panneau solaire fonctionne encore après 5 ans dans l'espace ? et après 10 ans ?
- 3°) Au bout de combien de mois la fiabilité devient-elle inférieure à 10% ?
- 4°) Afin d'améliorer la fiabilité de l'alimentation électrique du satellite, celui-ci est doté de 2 panneaux solaires, montés en parallèle, et fonctionnant de manière indépendante. Dans ces conditions, la fonction de fiabilité de l'alimentation électrique est donnée, pour t exprimée en mois, $t > 0$, par $R(t) = 1 - [1 - R_C(t)]^2$.
- a) Quelle est la probabilité que le panneau solaire fonctionne encore après 5 ans dans l'espace ? et après 10 ans ?
- b) Le montage en parallèle de deux panneaux solaire améliore-t-il réellement la fiabilité de l'alimentation électrique du satellite ?

Exercice 11 Les résultats seront donnés arrondis à 10^{-3} près.

On a étudié en banc d'essai la durée de vie d'un grand nombre de tube fluorescents. La moyenne relevée au cours des essais des temps de bon fonctionnement de l'un de ces tubes est de 670 h. On admet que la variable aléatoire X qui, à un tube, fait correspondre sa durée de vie (exprimée en heures) suit une loi exponentielle. On désigne par R la fonction de fiabilité correspondante.

- 1°) a) Déterminer, à 10^{-4} le paramètre de la loi de X .
- b) Donner la fonction de fiabilité correspondante.
- c) Calculer $\mathbb{P}(X \leq 500)$, puis $\mathbb{P}(X > 1000)$. Traduire ces résultats par une phrase.
- 2°) On prélève au hasard un tube fluorescent similaire aux tubes étudiés, et on considère les événements :
 - A : "le tube n'a pas de défaillance au cours des 600 premières heures de fonctionnement";
 - B : "le tube n'a pas de défaillance au cours des 900 premières heures de fonctionnement".
- a) Quelle est la probabilité des événements A , B et $A \cap B$?
- b) Calculer la probabilité que le tube n'ait pas de défaillance au cours des 900 premières heures de fonctionnement, sachant qu'il n'a pas eu de défaillance au cours des 600 premières heures de fonctionnement.

Exercice 12 Des pièces métalliques de forme parallélépipédique sont fabriquées par des machines pour lesquelles l'étude des temps de bon fonctionnement, exprimés en mois, conduit à la fonction de fiabilité R telle que :

$$\text{Pour tout } t > 0, R(t) = (0,05t + 1)e^{-0,1t}.$$

- 1°) Calculer, pour tout $t > 0$, $R'(t)$ et vérifier ainsi que la fonction R est bien strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
- 2°) Déterminer l'expression de la fonction de fiabilité F du système.
- 3°) Calculer à 10^{-2} près :
 - la probabilité qu'une machine fonctionne plus de 10 mois ;
 - la probabilité qu'une machine tombe en panne au cours de la première année.
- 4°) Calculer la MTBF, à l'aide d'intégrations par parties.

Exercice 13 : La fiabilité des remontées mécaniques

Partie A : Questions de cours

T désigne une variable aléatoire continue de loi exponentielle, de paramètre $\lambda > 0$.

- 1°) Donner la densité de T .
- 2°) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire T .
- 3°) Exprimer, en fonction du réel x , la probabilité $\mathbb{P}(T > x)$.

Partie B : Étude de remontées mécaniques placées en parallèle

Une station de ski a installé deux téléskis jumeaux (donc identiques en termes de fiabilité) au bas des pistes, pour les débutants. On estime que le temps de bon fonctionnement quotidien T_1 et T_2 de chacune des deux remontées mécaniques, exprimé en heures, suit une même loi exponentielle que T .

On désigne par U la variable aléatoire égale au temps d'utilisation possible de l'une des deux remontées mécaniques par les skieurs (on ne tient aucun compte de la formation possible d'une file d'attente des skieurs).

On supposera que les téléskis fonctionnent de manière indépendantes, ce qui revient à supposer que les variables aléatoires T_1 et T_2 prennent leurs valeurs indépendamment.

- 1°) a) Justifier que : pour tout t réel, $(U < t) = (T_1 < t) \cap (T_2 < t)$.
- b) En déduire, pour tout x réel, $\mathbb{P}(U > t)$ en fonction de $\mathbb{P}(T > t)$.

- c) Déterminer la fonction de répartition F_U de U en fonction de F , puis l'expression de $F_U(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
d) Comment obtenir la densité de probabilité f_U de la variable aléatoire U ? Déterminer l'expression de l'expression de $f_U(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
2°) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(U)$ de U en fonction de λ .
3°) On suppose que le temps moyen de bon fonctionnement de chacun des téléskis pris isolément est de 3 heures.
a) Déterminer la valeur de λ .
b) Estimer le temps moyen d'utilisation possible de l'une des deux remontées mécaniques.

Partie C : Étude de remontées mécaniques placées en série

Cette même station de ski a également installé deux téléskis identiques en termes de fiabilité, mais placés dans le prolongement l'un de l'autre, de manière à desservir le haut de la station, avec un niveau intermédiaire d'arrêt possible. On estime que le temps de bon fonctionnement quotidien T_1 et T_2 de chacune des deux remontées mécaniques, exprimé en heures, suit une même loi exponentielle que T .

On désigne par H la variable aléatoire égale au temps d'accès possible du haut de la station pour les skieurs (on ne tient aucun compte de la formation possible d'une file d'attente des skieurs).

On supposera que les téléskis fonctionnent de manière indépendantes, ce qui revient à supposer que les variables aléatoires T_1 et T_2 prennent leurs valeurs indépendamment.

- 1°) a) Justifier que : pour tout t réel, $(H > t) = (T_1 > t) \cap (T_2 > t)$.
b) En déduire, pour tout x réel, $\mathbb{P}(H > t)$ en fonction de $\mathbb{P}(T > t)$.
c) Déterminer la fonction de répartition F_H de H en fonction de F , puis l'expression de $F_H(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
d) Comment obtenir la densité de probabilité f_H de la variable aléatoire U ? Déterminer l'expression de l'expression de $f_H(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
2°) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(H)$ de H en fonction de λ .
3°) On suppose que le temps moyen de bon fonctionnement de chacun des téléskis pris isolément est de 30 minutes.
a) Déterminer la valeur de λ .
b) Estimer le temps moyen d'accès possible au haut des pistes.

Loi Normale

Exercice 14 Une machine fabrique en grande quantité des écrous. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque écrou pris au hasard dans la production, associe son diamètre intérieur exprimé en millimètres. On admet que cette variable aléatoire suit la loi normale de moyenne $m = 10$ et d'écart-type $\sigma = 0,05$.

- a) Calculer la probabilité que X soit inférieur à 9,9 mm.
b) Calculer la probabilité que X soit supérieur à 10,01 mm.
c) Déterminer le réel a tel que $\mathbb{P}(10 - a \leq X \leq 10 + a) = 0,9974$.

Exercice 15 Une machine produit des pièces cylindriques destinées à faire des axes de moteurs. On étudie le diamètre, exprimé en millimètres, des pièces issues de cette fabrication.

On admet que la variable aléatoire X , qui, à toute pièce choisie au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre, suit la loi normale de moyenne $m = 16,5$ et d'écart type $\sigma = 0,1$.

- a) Déterminer la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[16,4; 16,6]$;
b) Déterminer le nombre réel positif h , tel que la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[16,5 - h; 16,5 + h]$ soit égale à 0,95.

Exercice 16 Le but de cet exercice est d'analyser la qualité de la production d'une entreprise fabriquant des poutres IPE 200 (pour chaque probabilité demandée on donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 10^{-3} près).

- 1°) Soit H la variable aléatoire qui, à chaque poutre, associe sa hauteur en mm. On suppose que H suit une loi normale de moyenne $m_1 = 199,8$ et d'écart-type $\sigma_1 = 1,5$. Déterminer la probabilité qu'une poutre ait une hauteur non comprise dans l'intervalle $[197; 203]$.
2°) Soit L la variable aléatoire qui, à chaque poutre, associe sa largeur en mm. On suppose que L suit une loi normale de moyenne $m_2 = 100$. Déterminer l'écart-type σ_2 pour que 98% des poutres aient une largeur appartenant à l'intervalle $[97; 103]$.

Exercice 17 Une machine produit des pièces en série. Ces pièces sont classées en premier choix ou en deuxième choix. On sait que cette machine produit 20% de pièces de premier choix.

1°) On prélève un échantillon de 10 pièces dans un stock très important (ce qui peut être assimilé à des tirages successifs indépendants avec remise), et on appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces de premier choix se trouvant dans l'échantillon.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

b) Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$.

2°) On prélève un échantillon de 400 pièces (ce qui peut être assimilé à des tirages successifs indépendants avec remise), et on appelle Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces de premier choix se trouvant dans l'échantillon. On admettra que l'on peut utiliser pour Y une approximation par une loi normale.

a) Préciser les paramètres de cette loi normale.

b) Calculer alors $\mathbb{P}(Y < 100)$ puis $\mathbb{P}(Y > 72)$.

Exercice 18 On désigne par x , y et z les dimensions, exprimées en centimètres, de pièces métalliques fabriquées par usinage sur des machines. On suppose que :

- les variables aléatoires X et Y qui à chaque pièce associent respectivement leurs dimensions x et y suivent la loi normale de moyenne 10 et d'écart-type 0,05 ;

- la variable aléatoire Z qui à chaque pièce associe sa dimension z suit la loi normale de moyenne 7 et d'écart-type 0,02.

1°) Une pièce étant tirée au hasard, calculer les probabilités :

$$p_1 = \mathbb{P}(9,9 < X < 10,1) \quad ; \quad p_2 = \mathbb{P}(9,9 < Y < 10,1) \quad ; \quad p_3 = \mathbb{P}(6,95 < Z < 7,05).$$

b) Une pièce est acceptable si ses dimensions sont telles que :

$$\begin{cases} 9,9 < x < 10,1 \\ 9,9 < y < 10,1 \\ 6,95 < z < 7,05 \end{cases}.$$

X , Y et Z étant supposées indépendantes, calculer la probabilité qu'une pièce soit acceptée.

Exercice 19 Une machine fabrique des tiges en grande série.

1°) L'intervalle de tolérance pour la longueur, exprimée en cm, de ces tiges est $[24,50; 25,50]$. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tige associe sa longueur.

Après un réglage, X suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart-type s inconnu. Quel doit être cet écart-type s pour que la proportion de pièces acceptables soit de 90% ?

2°) Pour effectuer un contrôle, on tire au hasard 10 tiges de la production. On désigne par Y la variable aléatoire qui à chaque tirage de 10 tiges associe le nombre de tiges acceptables.

a) Montrer que Y suit une loi binômiale dont on déterminera les paramètres. Donner son espérance mathématique.

b) Quelle est la probabilité que dans un échantillon de 10 tiges prélevées au hasard dans la production, toutes les tiges de cet échantillon soient acceptables ?