

Exercices : Variables aléatoires discrètes

Loi, espérance, variance et écart-type

Exercice 1 Une partie consiste à lancer trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. Un résultat possible est un triplet, par exemple : (pile, face, pile) que l'on peut noter (P, F, P) ou encore PFP .

1°) À l'aide d'un arbre que l'on fera figurer sur la copie, déterminer toutes les éventualités.

2°) Un joueur fait une partie. Pour chaque "Face", il gagne 3 Euros et pour chaque "Pile", il perd 1 Euro. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque triplet, associe la somme gagnée ou perdue. Par exemple, le résultat PFP lui fait gagner 1 Euro $(-1 + 3 - 1 = 1)$. Établir la loi de probabilité de X .

3°) Calculer la probabilité, notée $P(X \geq 1)$, d'obtenir un gain supérieur ou égal à 1.

4°) Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 2 Une entreprise fabrique des pièces mécaniques en grande série ; 95% de ces pièces ne présentent pas de défaut. Cette entreprise dispose d'un appareil qui contrôle la qualité des pièces produites. Cet appareil accepte toutes les pièces sans défaut mais ne rejette que 80% de celles qui ont un défaut.

Partie A

On considère un lot de 10000 pièces respectant ces pourcentages.

1°) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant qui est déjà partiellement rempli :

	Nombre de pièces avec défaut	Nombre de pièces sans défaut	Total
Nombre de pièces acceptées après contrôle	100		
Nombre de pièces rejetées après contrôle			
Total		9 500	10 000

2°) On choisit une pièce au hasard parmi les 10 000 du lot précédent. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

a) Calculer la probabilité p_1 que cette pièce ait un défaut et ne soit pas rejetée par l'appareil de contrôle.

b) Calculer la probabilité p_2 que cette pièce soit rejetée par l'appareil de contrôle.

Partie B

On admet qu'une pièce sans défaut rapporte 30 Euros à l'entreprise, une pièce rejetée coûte 15 Euros et une pièce ayant un défaut et non rejetée coûte 40 Euros (à cause des frais de remplacement).

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie au hasard dans le lot de 10 000, associe le gain (positif ou négatif) correspondant pour l'entreprise.

1°) Donner sous forme de tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

2°) Montrer que l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X est telle que $\mathbb{E}(X) = 27,5$; interpréter ce nombre.

Exercice 3 Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules jaunes et n boules noires. (n désigne un entier naturel strictement positif).

Un club sportif organise un jeu consistant, pour chaque joueur, à prélever dans le sac une boule au hasard. Si la boule tirée est rouge, le joueur reçoit 5 euros, si la boule est jaune, il reçoit 2 euros, et si la boule est noire, il reçoit 1 euro. Pour participer au jeu, le joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant 1,70 euro.

On note X_n la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur,

c'est à dire la somme reçue diminuée du prix du billet.

1°) Dans cette question seulement, on suppose $n = 6$.

- a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_6 ?
- b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_6 .
- c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_6 .

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que l'entier naturel n est quelconque.

2°) Étude de la variable aléatoire X_n .

- a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n .
- b) Déterminer en fonction de n l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n .
- c) Le club souhaite que l'espérance de X_n soit strictement négative. Quel doit être le nombre minimal de boules noires contenues dans le sac pour que cette condition soit remplie ?

Exercice 4 Une urne contient dix jetons indiscernables au toucher. Sur chacun de ces jetons est inscrit l'un des numéros 1, 2, 3 ou 4.

Un jeton porte le numéro 1, deux jetons le numéro 2, trois jetons le numéro 3 et 4 jetons le numéro 4.

Un jeu consiste à tirer au hasard et avec remise, deux jetons de cette urne ; les tirages sont supposés équiprobables. À l'issue de la partie, le joueur reçoit le nombre d'euros correspondant à la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés.

1°) On appelle X la variable aléatoire qui, à l'issue de chaque partie, associe le nombre d'euros reçus par le joueur.

- a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .
 - b) Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$, probabilité que la somme remise au joueur soit 2 euros.
 - c) Montrer que $\mathbb{P}(X = 6) = \frac{25}{100}$.
 - d) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X . On présentera les résultats dans un tableau.
 - e) Calculer l'espérance mathématique de X .
- 2°) Le joueur doit verser une "mise" m exprimée en euros, avant chaque partie. Quelle doit être la valeur minimale de cette mise, arrondie à l'euro, pour que l'organisateur du jeu ait l'espoir d'être bénéficiaire ?

Fonction de répartition

Exercice 5 Dans un jeu de 32 cartes, constitué de 4 "As", 4 "Rois", 4 "Dames", 4 "Valets", 4 "dix", 4 "neuf", 4 "huit" et 4 "sept", on associe à chaque carte une valeur (en euros) suivant le tableau ci-dessous :

Carte	"As"	"Roi"	"Dame"	"Valet"	"dix"	"neuf"	"huit"	"sept"
Valeur (en euros)	13	11	11	5	5	5	3	1

Un joueur mise 5 Euros, tire une carte au hasard parmi les 32 cartes du jeu et reçoit la valeur (en euros) associée à cette carte. Chaque carte a la même probabilité d'être tirée. Si le joueur reçoit une somme supérieure à sa mise, son gain est positif ; s'il reçoit une somme strictement inférieure à sa mise, son gain est strictement négatif, ce qui correspond à une perte d'argent.

- 1°) a) Calculer le nombre de cas où le gain de ce joueur est nul.
 - b) Calculer la probabilité p qu'il perde de l'argent.
- 2°) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le gain du joueur.
- a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b) Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X .
 - c) Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$.
- 3°) Représenter graphiquement sur papier millimétré la fonction de répartition de F_X de la variable aléatoire X en faisant les choix suivants : sur l'axe des abscisses : 1 cm pour l'unité ; sur l'axe des ordonnées : 8 cm pour l'unité.
- (Rappel : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t)$ désigne la probabilité de l'événement $(X \leq t)$).

Exercice 6 On considère une variable aléatoire discrète Z , dont la fonction de répartition F_Z est donnée par la série de relations suivantes :

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty; -5[\\ \frac{1}{5} & \text{si } t \in [-5; -1[\\ \frac{2}{5} & \text{si } t \in [-1; 1[\\ \frac{3}{5} & \text{si } t \in [1; 3[\\ \frac{4}{5} & \text{si } t \in [3; 6[\\ 1 & \text{si } t \in [6; +\infty[\end{cases}.$$

- 1°) Représenter graphiquement F_Z , et déterminer la loi de Z .
- 2°) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ de Z et son écart-type σ_Z .
- 3°) Calculer $\mathbb{P}(-8 \leq Z \leq 3)$, $\mathbb{P}(-10 \leq Z \leq 0)$, $\mathbb{P}(0 \leq Z \leq 5)$ et $\mathbb{P}(-5 \leq Z \leq 3)$ à l'aide de F_Z .

Variables aléatoires discrètes de lois usuelles

Exercice 7 Un test consiste à répondre à cinq questions par oui ou par non. Chaque réponse juste est notée 4 points et chaque réponse fausse est notée -2 points.

Un candidat répond au hasard à chacune de ces questions, c'est-à-dire que la réponse "oui" et la réponse "non" ont la même probabilité. On suppose que le candidat répond à chaque question indépendamment des réponses fournies aux autres questions. Soient X et Y les variables aléatoires suivantes :

X : nombre de réponses exactes ;

Y : note obtenue, c'est-à-dire le plus grand des deux nombres 0 et S , S désignant la somme des cinq notes obtenues par le candidat à chaque question.

1°) a) Donner la loi de probabilité de X . Calculer son espérance mathématique et sa variance.

b) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 4)$.

2°) Donner les valeurs prises par Y et déterminer sa loi de probabilité. Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 8 On dispose d'un dé parfait dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On lance le dé cinq fois de suite, et on suppose que les lancers sont indépendants. On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de sorties du numéro 6 dans la série de 5 lancers.

1°) Déterminer en justifiant la loi de probabilité de X .

2°) Calculer la probabilité d'avoir au moins une fois le numéro 6 (donner les résultats sous forme de fractions irréductibles).

3°) Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 9 Le loto sportif se joue sur 13 matchs avec trois réponses possibles (1 ou N ou 2) pour chaque match. Un joueur décide de faire ses pronostiques au hasard (de manière équiprobable), et de façon indépendante pour chacun d'entre eux. Il réalise ainsi 13 pronostiques.

1°) Quelle est la probabilité que le joueur trouve 13 pronostiques exacts ?

2°) Quelle est la probabilité que le joueur trouve 12 pronostiques exacts ?

3°) Pour gagner un joueur doit avoir 11, 12 ou 13 pronostiques exacts. Quelle est la probabilité pour un joueur pronostiquant au hasard de gagner ? (Tous les résultats seront donnés à 10^{-7} près).

Exercice 10 Une automobile rencontre sur son trajet cinq feux tricolores de circulation. Pour chacun de ces feux, le rouge dure 15 secondes, le jaune 5 secondes et le vert 40 secondes. Les cinq feux ne sont pas synchronisés et l'on suppose que les aléas de la circulation sont tels que l'état d'un feu devant lequel se présente l'automobile

ne dépend pas de l'état des autres feux rencontrés.

1°) L'automobile se présente devant un feu. Quelle est la probabilité pour que ce feu soit vert ?

2°) On considère la variable aléatoire X qui a pour valeur le nombre de feux verts rencontrés lors d'un trajet. Définir la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X . Déterminer la probabilité pour que l'automobile, sur l'ensemble de son trajet, ait exactement trois fois le feu vert sur les cinq feux rencontrés.

Exercice 11 Un sac contient 100 billes : 36 sont rouges, les autres sont bleues. Une épreuve aléatoire consiste à tirer 50 fois de suite une bille au hasard, à constater sa couleur et à la remettre dans l'urne avant de le tirage de la bille suivante. Soit X la variable aléatoire associant à chaque épreuve le nombre de billes rouges tirées.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance mathématique et sa variance.

2°) Calculer la probabilité que $X = 2$.

Exercice 12 Une usine fabrique des pièces en grande série, en 2 phases indépendantes. La première phase est susceptible de faire apparaître un défaut A et la seconde un défaut B. L'expérience montre qu'une pièce peut présenter le défaut A dans 2% des cas et le défaut B dans 10% des cas.

1°) Calculer les probabilités qu'une même pièce tirée au hasard :

a) présente les deux défauts ;

b) ne présente aucun défaut ;

c) présente un et un seul défaut.

2°) On prélève $n = 300$ pièces dans le stock (on assimilera ce prélèvement à un tirage avec remise).

a) On s'intéresse à la variable aléatoire X donnant le nombre de pièces présentant le défaut A. Donner la loi de probabilité de X ; en déterminer l'espérance et l'écart-type.

b) On admet que X suit une loi de Poisson. Justifier cet ajustement. Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ? Quelle est la probabilité que, sur 300 pièces, il y en ait 10 qui présentent le défaut A ?

Exercice 13 Toutes les probabilités seront calculées à 10^{-3} près.

Une machine produit des pièces cylindriques destinées à faire des axes de moteurs. On étudie le diamètre, exprimé en millimètres, des pièces issues de cette fabrication. La probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est $p = 0,05$. On prélève au hasard 60 pièces. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 pièces. On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 60 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses.

a) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer $\mathbb{P}(Y < 2)$.

c) On approche la loi binomiale de la question précédente par une loi de Poisson. Préciser le paramètre de cette loi. En utilisant cette loi de Poisson, déterminer la probabilité qu'un échantillon de 60 pièces contienne au plus deux pièces défectueuses.

Exercice 14 On étudie la maintenance d'une installation de chauffage dans un immeuble de bureaux. Une étude statistique montre que la probabilité de l'événement "une intervention au moins est nécessaire sur l'installation au cours d'un mois donné" est 0,125. On admet que la nécessité d'intervenir au cours d'un mois ne dépend pas du mois considéré. On note X la variable aléatoire qui, à chaque année, associe le nombre de mois où il a fallu intervenir sur l'installation.

1°) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et donner les paramètres n et p de cette loi.

2°) Calculer la probabilité des événements suivants :

a) on n'est pas intervenu dans l'année ;

b) on est intervenu un seul mois dans l'année ;

c) on est intervenu au moins deux mois dans l'année.

3°) On se propose d'approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. En utilisant cette loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des événements définis aux questions 2°)a) , 2°)b) et 2°)c).

Les valeurs trouvées sont-elles bien compatibles avec les résultats du 2°) ?

Exercice 15 Un atelier est constitué de 30 postes de travail identiques. On appelle X la variable aléatoire qui, un jour tiré au hasard, associe aux 30 postes, le nombre de postes de travail en panne. Les 30 postes fonctionnent de manière indépendante. On admet que la probabilité qu'un poste soit en panne est 0,124.

- a) Déterminer en justifiant la loi de probabilité de X .
- b) Calculer la probabilité que, parmi 30 postes, il y en ait 4 exactement qui soient en panne.
- c) Calculer la probabilité que, parmi 30 postes, il y en ait au moins 2 qui soient en panne.
- d) On approche la loi de X par une loi de Poisson. Préciser les paramètres de cette loi de Poisson. Refaire les calculs des questions b) et c) à l'aide de cette loi de Poisson, et comparer les résultats obtenus.

Exercice 16 Les tuiles rectangulaires vendues dans un magasin proviennent de deux usines, notées A et B . L'usine A en fournit 60% et 95% de ses tuiles sont de première qualité, l'usine B en fournit 40% et 98% de ses tuiles sont de première qualité. Toutes les autres tuiles sont classées en deuxième qualité.

- 1°) a) Quelle est la probabilité qu'une tuile tirée au hasard dans le stock du magasin soit de première qualité ?
b) On prend une tuile au hasard dans le stock et on constate qu'elle est de première qualité. Quelle est alors la probabilité qu'elle provienne de l'usine A ?
- 2°) On admet que la probabilité qu'une tuile soit de deuxième qualité est 0,04. On considère un lot de n tuiles prises au hasard dans le stock. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de tuiles de deuxième qualité dans ce lot.
a) On suppose $n = 10$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Calculer alors la probabilité d'avoir au plus une tuile de deuxième qualité dans ce lot. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de ce résultat.
b) On suppose maintenant que $n = 100$ et que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi ? Donner la valeur de $\mathbb{P}(X = 3)$ à 10^{-3} près.