

TD 2 - CONVERGENCE EN LOI – THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Exercice 1

1600 usagers de la SNCF cherchent à prendre chaque jour le train Rennes–Paris de 6h35. Les portes du train s'ouvrent une demi-heure avant le départ. Parmi les usagers, 50 arrivent avant l'ouverture, 80 arrivent trop tard. La SNCF envisage de faire appel à un bureau d'études afin d'améliorer la qualité des prestations qu'elle fournit à ses clients.

1. En admettant que la distribution des temps d'arrivée est gaussienne, quelles sont les caractéristiques de la loi suivie par la variable aléatoire X "instant d'arrivée d'un usager par rapport à l'heure de départ du train" ?

Soit $P(X > 0)$, la probabilité qu'un usager manque le train (c'est-à-dire qu'il arrive après l'heure de départ du train).

Remarque 1 Afin de pouvoir utiliser la table de la loi Normale, il convient dans un premier temps d'écrire l'équivalence avec la loi Normale centrée réduite.

$$\text{Soit } P(X > 0) = P\left(U = \frac{X - \mu}{\sigma} > 0\right) = P\left(U > \frac{0 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{80}{1600} = 0.05.$$

De la même manière, la probabilité qu'un usager prenne le train (sachant que les portes s'ouvrent 30 minutes avant le départ) s'écrit : $P(X < -30) = P\left(U = \frac{X - \mu}{\sigma} < -30\right) = P\left(U < \frac{-30 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{50}{1600} = 0.03125$.

L'étape suivante consiste à rechercher les valeurs correspondantes dans la table de la loi Normale.

1.
 - Pour $P(X > 0)$, nous avons trouvé une probabilité 0.05. Nous retrouvons la situation $P(U > u_0) = 0.05$. Dans ce cas, nous avons vu qu'en raison de la symétrie de la fonction de densité de la loi gaussienne, nous pouvons écrire : $P(U > u_0) = 0.05 = 1 - P(U < u_0)$. Cela revient à chercher $P(U < u_0) = 0.95$. Une lecture directe de la table de la loi normale indique $u_0 = 1.65$.
 - Pour $P(X < -30)$, u_0 sera forcément négatif. En effet, nous pouvons écrire $P(U < -u_0) = P(U > u_0) = 0.03125$. Nous retrouvons la configuration précédente à savoir : $P(U > u_0) = 0.03125 = 1 - P(U < u_0)$. D'où : $P(U < u_0) = 0.96875$. La lecture de table pour $F(u_0) = 0.96875$ indique 1.86. Sachant que u_0 doit être négatif, nous avons -1.86 .

La première expression indique $P(X > 0) = P(U > 0) = 1.65$ alors que la seconde expression indique $P(X < -30) = P(U < -30) = -1.86$. La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues va nous permettre de déterminer les paramètres de la loi normale :

$$\begin{cases} \frac{0-\mu}{\sigma} = 1.65 \\ \frac{-30-\mu}{\sigma} = -1.86 \end{cases}$$

en posant $\mu = -1.65\sigma$, on obtient $\sigma = 8.547$ et $\mu = -14.10$.

2. A quelle heure les portes doivent-elles être ouvertes pour qu'il n'y ait pas plus de 1% d'usagers sur le quai ?

On cherche ici $P(X < x_0) = 0.01$. Avec les paramètres de la loi Normale trouvés précédemment, nous devons trouver $P(U < \frac{X+14.10}{8.547}) = 0.01$, soit $P(U < u_0) = 0.01$. N'ayant pas 0.01 dans la table, nous recherchons u_0 tel que $F(u_0) = F(1 - u_0)$, soit la valeur correspondant à $F(0.99)$. Nous obtenons $u_0 = 2.33$.

Attention : En cherchant la valeur correspondant à $F(1 - u_0)$, il ne faut pas oublier de changer le signe de la valeur u_0 obtenue ; par conséquent, $u_0 = -2.33$.

Par conséquent, avec $u_0 = -2.33$, nous pouvons écrire :

$$\frac{X + 14.10}{8.547} = -2.33 \Rightarrow X = (-2.33 \times 8.547) - 14.10 = -33.998$$

Si l'on désire qu'il n'y ait pas plus de 1% des usagers en attente sur le quai, il faut ouvrir les portes du train 34 minutes avant le départ soit à 6h01.

3. Combien de voyageurs manqueront le train malgré un départ retardé de 5 minutes ?

On cherche la proportion de passagers arrivant 5 minutes après le départ initialement prévu à 6h35. Mathématiquement, cela signifie que nous cherchons à résoudre :

$$P(X > 5) = P\left(U > \frac{5+14.10}{8.547}\right) = P(U > 2.235) = 1 - P(U < 2.235) = 1 - F(2.235) = 1 - 0.9871 = 0.0129$$

Sachant qu'il y a initialement 1600 usagers, 21 d'entre eux (1600×0.0129) manqueront le train Rennes – Paris de 6h35 malgré un départ retardé de 5 minutes.

Exercice 2

Théorème 1 Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$, une suite de n variables aléatoires

- indépendantes
- de même loi (et par conséquent de même espérance μ et de même écart-type σ ,
- alors : $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i - n\mu \xrightarrow{L} N(0;1)$ ou encore $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0;1)$ avec $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

Une compagnie aérienne fournit des réservations sur le vol d'un appareil de 500 places. La probabilité qu'un passager ayant effectué la réservation pour ce vol ne se présente pas est de 10%. Si la compagnie aérienne accorde 550 réservations sur ce vol, quel est le risque que certains passagers ne puissent pas prendre part dans l'avion en raison du manque de place ?

Nous faisons ici référence à la convergence en loi de la loi Binomiale vers la loi Normale. En effet,

Théorème 2 Si $X_1, \dots, X_n$ est une suite de n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernouilli $B(p)$ et si $S_n = X_1 + \dots + X_n$, alors S_n suit la loi Binomiale $\text{Bin}(n, p)$. Sous la loi Binomiale, la réalisation de i a une probabilité : $P(X = X_i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$, avec $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. En pratique, lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $np(1-p) > 5$, la loi Binomiale $\text{Bin}(n, p)$ peut être approximée par la loi Normale $(np; \sqrt{np(1-p)})$

Note 1 Une difficulté survient lors de l'approximation d'une loi discrète, telle que la loi Binomiale ou la loi de Poisson par une loi continue comme la loi Normale. On pallie à cette difficulté par une correction de continuité qui s'applique de la manière suivante :

$$P(a < X < b) = P(a + 0.5 < Y < b - 0.5)$$

$$P(a \leq X < b) = P(a - 0.5 < Y < b - 0.5)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a - 0.5 < Y < b + 0.5)$$

En supposant $U \equiv N(\mu, \sigma)$

Soit X_i la variable aléatoire de Bernouilli modélisant la présence $X_i = 1$ ou l'absence $X_i = 0$ d'un passager ayant effectué une réservation. Nous avons ici $n = 550$, puisque la compagnie aérienne a accordé 550 réservations. De la même manière, la probabilité que l'utilisateur se présente au vol, $p = 1 - 0.1 = 0.9$

Alors, par hypothèse, $X_i \equiv \text{Bernouilli}(1; 0.9)$.

En supposant que la présence d'un voyageur est indépendante de la présence des autres voyageurs, soit l'hypothèse d'indépendance des X_i , on a

$$\begin{aligned} E(X_i) &= p \\ V(X_i) &= p(1-p) \\ \sigma &= \sqrt{p(1-p)} \end{aligned}$$

Si nous notons X , la somme des X_i , soit $X_1 + \dots + X_{550}$, X représentant la variable aléatoire du nombre de passagers ayant réservés et se présentant effectivement à l'enregistrement, alors nous pouvons écrire:

$$X \equiv B(550; 0.9)$$

Afin de voir si la convergence vers la loi Normale peut s'appliquer ici, nous devons vérifier :

– $n \geq 30$, ce qui est le cas ici puisque $n = 550$

- $np \geq 5$, ce qui est le cas ici puisque $np = 495$
- $np(1 - p) > 5$, ce qui est le cas ici puisque $np(1 - p) = 49.5$.

Les trois conditions nécessaires pour la convergence vers la loi Normale étant satisfaites, nous allons pouvoir utiliser le théorème central limite, c'est-à-dire écrire que $X \equiv N(np; \sqrt{np(1 - p)}) = X \equiv N(495; 7.035)$.

Néanmoins, nous savons à présent que tous les calculs doivent être effectués à l'aide de la loi Normale centrée réduite. Par conséquent, il convient de déterminer $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Soit ici :

$$U = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \equiv N(0; 1)$$

Il reste simplement à présent à calculer la probabilité telle qu'il y ait au maximum 500 passagers qui se présentent à l'embarquement, soit :

$$P(X \leq 500) = P\left(U \leq \frac{500 - E(X) + 0.5}{\sqrt{V(X)}}\right) = P(U \leq 0.7817)$$

Avec $E(X) = np = 495$ et $V(X) = np(1 - p) = 49.5$.

Une lecture directe de la table pour $u_0 = 0.78$, indique $P = 0.7823$. Il y a ainsi une probabilité de 78.23% qu'il n'y ait pas plus de 500 passagers qui se présentent à l'enregistrement ; soit la probabilité complémentaire 21.77% qu'il y ait plus de passagers que de places disponibles dans l'avion.

Exercice 3

Une compagnie d'assurance a constaté que sur 1200 clients, 60 ont envoyé au moins une déclaration de sinistre dans l'année. Si on prélève, au hasard, un échantillon de 60 assurés :

1. Par quelle loi peut être approximée la variable aléatoire : X "Le nombre annuel de déclarations" ? Justifiez votre réponse.

Théorème 3 Les probabilités d'une loi Binomiale $\text{Bin}(n, p)$ peuvent être approximées par les probabilités d'une loi de Poisson de paramètre np si les conditions suivantes sont réalisées : $n > 30$, $p < 0.1$ et $np < 10$.

Note 2 La loi de Poisson représente la loi des événements rares. Pour tout entier naturel k , on peut écrire :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{(-\lambda)}}{k!}$$

La loi de Poisson est caractérisée par l'égalité de ses deux premiers moments : $E(X) = V(X) = \lambda$

X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 1200$ et de probabilité $p = \frac{60}{1200} = 0.05$. Si un échantillon de 60 individus est prélevé, la loi Binomiale peut être approximée par une loi de Poisson puisque les trois conditions :

- $n > 30$
- $p < 10\%$
- $np < 10$

sont satisfaites. En effet, $n = 60, p = 5\%$ et $np = 3$.

2. Déterminez les paramètres de cette loi

On sait que les probabilités d'une loi Binomiale $Bin(n, p)$ sont approximées par les probabilités d'une loi de Poisson de paramètre np , soit ici

$$B(60, 0.05) \xrightarrow{L} P(3)$$

3. Calculez $P(X \geq 2)$ et vérifiez ce résultat à l'aide de la table appropriée.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - \sum_{k=0}^1 P(X = k) \\ P(X \geq 2) &= 1 - \left(\frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} \times 3^1}{1!} \right) \\ P(X \geq 2) &= 1 - (0.0497 + 0.1493) \\ P(X \geq 2) &= 0.801 \end{aligned}$$

4. Vérifiez que vous auriez obtenus les mêmes résultats pour $X = 2$ à l'aide de la loi initiale et ensuite celle vers laquelle vous avez convergé ?

La loi initiale étant la loi Binomiale, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= C_{60}^2 \times 0.05^2 \times 0.95^{58} \\ P(X = 2) &= \frac{8.32^{81}}{2 \times 2.35^{78}} \times 0.05^2 \times 0.95^{58} \\ P(X = 2) &= 1770 \times 0.05^2 \times 0.95^{58} \\ P(X = 2) &= 0.2258 \end{aligned}$$

La loi vers laquelle nous avons convergé étant la loi de Poisson, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \frac{e^{-3} \times 3^2}{2!} \\ P(X = 2) &= 0.2240 \end{aligned}$$

Exercice 4

Une usine fabrique des imprimantes dont la durée de vie X (exprimées en million de pages) est une variable aléatoire Normale de paramètres 2 et 0.3.

1. Ecrivez sous forme mathématique la loi suivie par X .

La loi Normale est caractérisée par ces deux premiers moments égaux à 2 et 0.3 respectivement. Nous pouvons donc écrire :

$$X \equiv N(2; 0.3)$$

2. Calculez la probabilité P que la durée de vie d'une imprimante tirée au hasard dans la production soit supérieure à 2,4 millions de pages. Dans la suite de l'exercice, vous arrondirez cette probabilité à 10^{-4} .

Nous cherchons ici à résoudre $P(X > 2.4)$. Nous savons que nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$P(X > 2.4) = 1 - P(X \leq 2.4) = 1 - P(U \leq \frac{2.4 - E(X)}{\sigma} = \frac{2.4 - 2}{0.3} = 1.3333) = 1 - F(1.3333) = 1 - 0.9082 = 0.0918.$$

Il y a donc 9.18% de chance que la durée de vie d'une imprimante tirée au hasard dans la production soit supérieure à 2,4 millions de pages.

3. On teste 80 imprimantes tirées au hasard dans la production. Déterminez, en la justifiant, la loi de la variable Y "nombre d'imprimantes dont la durée de vie est supérieure à 2,4 millions de pages". Donnez, en la justifiant, une loi approchée de Y , en arrondissant le(s) paramètre(s) à l'entier inférieur.

A la i ème imprimante tirée au hasard, on associe une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre 0.0918. D'où :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si durée de vie} > 2,4 \text{ millions de pages} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Y représente la somme de 80 variables indépendantes de Bernoulli de même paramètre p (les X_i étant considérées comme indépendantes car les imprimantes ont été tirées au hasard dans une production supposée suffisamment grande). Par conséquent, Y suit une loi Binomiale de paramètres :

$$Y \equiv Bin(n, p) = Bin(80, 0.0918)$$

Dans l'exercice, les trois conditions pour une convergence en loi vers la loi de Poisson sont satisfaites ($n > 30; p < 0.1; np < 10$). Y converge donc en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 80 \times 0.0918 = 7.344$.

On retiendra une loi de Poisson $P(7)$.

4. Calculez dans un premier temps puis utilisez la table appropriée dans un second temps pour déterminer la probabilité que parmi les 80 imprimantes testées :

- Exactement 10% d'entre elles aient une durée de vie supérieure à 2,4 millions de pages

Nous cherchons ici la probabilité qu'il y ait exactement 8 imprimantes qui aient une durée de vie supérieure à 2,4 millions de pages.

Sachant que nous avons une loi de Poisson de paramètre λ , la probabilité se calcule de la manière suivante :

$$P(Y = x) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^x}{x!}$$

Ainsi, avec $\lambda = 7$ et $x = 8$, nous obtenons :

$$P(Y = 8) = \frac{e^{-7} \times 7^8}{8!} = 0.1303$$

Nous confirmons ce résultat en utilisant la table de Poisson, où l'on obtient :

$$P(Y = 8) = 0.401 - 0.271 = 0.13$$

- Au moins 5% d'entre elles aient une durée de vie supérieure à 2,4 millions de pages.

Nous cherchons ici la probabilité qu'il y ait au moins 4 imprimantes qui aient une durée de vie supérieure à 2,4 millions de pages.

Par le calcul, il convient de résoudre $1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3))$. Soit :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \frac{e^{-7} \times 7^0}{0!} = 0.0009118 \\ P(Y = 1) &= \frac{e^{-7} \times 7^1}{1!} = 0.00638 \\ P(Y = 2) &= \frac{e^{-7} \times 7^2}{2!} = 0.02234 \\ P(Y = 3) &= \frac{e^{-7} \times 7^3}{3!} = 0.05213 \end{aligned}$$

La probabilité qu'il y ait au moins 5% d'entre elles qui aient une durée de vie supérieure à 2,4 millions de pages est égale à :

$$\begin{aligned} P(Y \geq 4) &= 1 - (0.0009118 + 0.00638 + 0.02234 + 0.05213) \\ P(Y \geq 4) &= 0.918 \end{aligned}$$

En utilisant la table de Poisson, on obtient :

$$P(Y \geq 4) = 0.918;$$

Exercice 5

Les producteurs de champagne commercialisent leur produit en fonction de leur qualité : les champagnes "de luxe", vendus 40€ la bouteille et les champagnes "du terroir".

Malgré tout le soin qu'ils apportent à leur production ainsi qu'à la commercialisation, il subsiste des erreurs d'étiquetage, et on admet qu'un acheteur de champagne "grand cru" aura une probabilité de 0.15 d'avoir en fait acheter une bouteille de champagne "du terroir".

1. Un restaurateur achète 200 bouteilles "grand cru". Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bouteille de champagne "du terroir" parmi les 200 bouteilles achetées.

Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X ainsi que son espérance et sa variance. Donnez, en la justifiant, une approximation de la loi de X .

A la i ème bouteille "grand cru" achetée, on associe une variable aléatoire de Bernouilli X_i de paramètre 0.15. D'où :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si la } i\text{ème bouteille achetée est "du terroir", } p = 0.15 \\ 0 & \text{Sinon et } q = 1 - p = 0.85 \end{cases} \quad i = 1, \dots, 200$$

Le nombre total de bouteilles de champagne dites "du terroir" X , parmi les 200 bouteilles achetées est égal à la somme des 200 variables de Bernouilli :

$$X = \sum_{i=1}^{200} X_i$$

Les 200 bouteilles étant supposées tirées au hasard dans l'ensemble des bouteilles de type "grand cru", la variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètres $Bin(200, 0.15)$.

L'espérance de la variable aléatoire X est : $E(X) = n \times p = 30$

La variance de la variable aléatoire X est : $V(X) = n \times p \times q = 25.5$

Afin de voir si la convergence vers la loi Normale peut s'appliquer ici, nous devons vérifier :

- $n \geq 30$, ce qui est le cas ici puisque $n = 200$
- $np \geq 5$, ce qui est le cas ici puisque $np = 30$
- $np(1 - p) > 5$, ce qui est le cas ici puisque $np(1 - p) = 25.5$.

Cf. Théorème 2.

Les trois conditions nécessaires pour la convergence vers la loi Normale étant satisfaites, nous allons pouvoir utiliser le théorème central limite, c'est-à-dire écrire que $X \equiv N(np; \sqrt{np(1 - p)}) = X \equiv N(30; 5.05)$.

2. Calculez $P(X > 20)$ et $P(20 < X < 35)$.

Remarque 2 Comme on approxime une loi discrète par la loi normale, on fait la correction de continuité qui revient à rajouter ou soustraire 0.5 au numérateur dans ce qui suit.

$$\begin{aligned} - P(X > 20) &= P(Y > 20.5) = 1 - P(Y < 20.5) = 1 - P\left(U < \frac{20+0.5-E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) = 1 - P\left(U \leq \frac{20.5-30}{5.05} = -1.8812\right) = \\ &= 1 - F(-1.8812) = 1 - (1 - F(1.8812)) = F(1.8812) = 0.9699 \end{aligned}$$

$$- P(20 < X < 35) = P(20+0.5 < Y < 35-0.5) = P(20.5 < Y < 34.5) = P\left(\frac{20.5-E(X)}{\sqrt{V(X)}} < U < \frac{34.5-E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) = \\ P(-1.88 < U < 0.89) = P(U < 0.89) - P(U < -1.88)$$

avec $P(Y < 0.89) = F(0.89) = 0.8133$ et $P(Y < -1.88) = F(-1.88) = 1 - F(1.88) = 1 - 0.9699 = 0.0301$

D'où $P(-1.88 < U < 0.89) = P(U < 0.89) - P(U < -1.88) = 0.8133 - 0.0301 = 0.7832$

3. Au fur et à mesure de la consommation des 200 bouteilles, le restaurateur a pu détecter chacune des bouteilles dites "du terroir". Il décide alors de ne payer que les bouteilles de qualité "grand cru" et de refuser de payer les bouteilles "du terroir".

Calculez, sous cette hypothèse, la probabilité d'un bénéfice néanmoins positif pour le producteur sachant que chaque bouteille de champagne "du terroir" lui revient 12€ et que chaque bouteille de type "grand cru" lui revient 30€.

Les bouteilles de type "du terroir", en nombre X occasionnent une perte unitaire de 12€. A l'inverse, les bouteilles réellement "grand cru", en nombre $(200 - X)$, créent un bénéfice unitaire de 10€ (vendu 40€ et prix de revient 30€).

Le bénéfice total s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Bénéfice} &= 10 \times (200 - X) - 12X \\ &= 2000 - 22X \end{aligned}$$

La probabilité pour que le bénéfice soit positif s'écrit :

$$\begin{aligned} P(\pi > 0) &= P(2000 - 22X > 0) \\ P(\pi > 0) &= P(X < 90.91) \\ P(\pi > 0) &= P\left(U < \frac{90.91 - 0.5 - 30}{5.05}\right) \\ P(\pi > 0) &= P(U < 11.96) \end{aligned}$$

Il est quasiment certain qu'en dépit de l'existence d'erreur lors de la livraison et le non paiement des bouteilles "du terroir", le profit du producteur soit positif.

Exercice 6

A l'Université, le taux de blocage de mâchoires provoqué par un bâillement profond est de 1 personne pour 1000 et par mois. On suppose qu'un étudiant a au plus un blocage de mâchoires par mois et que les blocages de mâchoires sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité qu'en un mois de l'année universitaire 2008-2009 il y ait 3 blocages de mâchoires ou plus parmi les étudiants de l'Université ? Calculez cette probabilité dans un

premier temps puis vérifiez votre résultat à l'aide de la table appropriée. Nous supposons que l'Université compte 4000 étudiants.

Soit la variable aléatoire X : "Nombre de blocage de mâchoires par mois".

La variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 4000$ et $p = 0.001$. Puisque ici $n > 30$, $p < 0.1$ et $np < 10$, on l'approxime par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p = 0.001 \times 4000 = 4$.

A partir de la loi de Poisson, la probabilité qu'il y ait au moins 3 blocages de mâchoires en 1 mois est :

$$P(X \geq 3) = 1 - \sum_{k=0}^2 P(X = k) = 1 - \sum_{k=0}^2 e^{-4} \frac{4^k}{k!}$$

avec :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \frac{e^{-4} \times 4^0}{0!} = 0.018 \\ P(Y = 1) &= \frac{e^{-4} \times 4^1}{1!} = 0.073 \\ P(Y = 2) &= \frac{e^{-4} \times 4^2}{2!} = 0.146 \end{aligned}$$

Soit $P(X \geq 3) = 1 - (0.018 + 0.073 + 0.146) = 0.763$

2. Quelle est la probabilité qu'au cours de l'année universitaire 2008-2009, le nombre de mois comptant 3 blocages de mâchoires ou plus soit supérieur ou égal à 4 ? Nous supposons que l'année universitaire comporte 8 mois.

Soit la variable aléatoire Y : "Nombre de mois comptant 3 blocages de mâchoires ou plus".

Y suit une loi Binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0.763$.

Ainsi, $P(Y \geq 4) = 1 - P(Y < 4) = 1 - \sum_{k=0}^3 C_8^k p^k (1-p)^{8-k}$

Rappelons que $C_8^k = \frac{8!}{k!(8-k)!}$

Il convient donc de calculer chacune des combinaisons pour $k = 0, \dots, 3$

$$\begin{aligned} k = 0 : C_8^0 \times 0.76^0 (0.24)^8 &= 0.000011 \times 1 \\ k = 1 : C_8^1 \times 0.76^1 (0.24)^7 &= 0.0000348 \times \frac{40320}{5040} \\ k = 2 : C_8^2 \times 0.76^2 (0.24)^6 &= 0.00011 \times \frac{40320}{1440} \\ k = 3 : C_8^3 \times 0.76^3 (0.24)^5 &= 0.00035 \times \frac{40320}{720} \end{aligned}$$

D'où $\sum_{k=0}^3 C_8^k p^k (1-p)^{8-k} = 0.0296$ et $P(Y \geq 4) = 0.9704$.

3. Si l'on considère à présent la population universitaire du grand Ouest, soit 30000 étudiants, et en gardant constante la probabilité de blocage de mâchoires, par quelle loi peut-on approximer X ? Calculez la probabilité que le nombre de blocage de mâchoires par mois soit inférieur à 40.

Théorème 4 Les probabilités d'une loi de Poisson $P(\lambda)$ peuvent être approximées par la loi Normale de paramètres λ et $\sqrt{\lambda}$ si $\lambda > 20$.

Si maintenant $n = 30000$, alors $\lambda = n \times p = 30000 \times 0.01 = 30$. Puisque $\lambda > 20$, alors la loi de Poisson peut être approximée par la loi Normale de paramètre $(30, \sqrt{30})$.

$$\text{Soit } P(X < 40) = P\left(U = \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{40-30}{\sqrt{30}}\right) = P\left(U < \frac{10}{\sqrt{30}}\right) = P(U < 1.73) = 0.9582$$

Exercice 7

Dans un grand magasin, des observations sur un grand nombre de jours ouvrables au rayon informatique ont conduit à faire l'hypothèse selon laquelle le nombre d'ordinateurs portables vendus au cours d'un jour ouvrable quelconque suit une loi de Poisson de paramètre 5. Les ventes sont supposées indépendantes.

1. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

Soit X la variable aléatoire "le nombre d'ordinateurs portables vendus au cours d'un jour ouvrable",
 $X \equiv P(5)$

- La vente journalière d'ordinateurs portables est au plus égale à 2

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^2 e^{-5} \frac{5^k}{k!} = 0.1247$$

$$\text{avec } e^{-5} \frac{5^0}{0!} = 0.0067; e^{-5} \frac{5^1}{1!} = 0.0337; e^{-5} \frac{5^2}{2!} = 0.0842.$$

- La vente journalière d'ordinateurs portables est au plus égale à 2 ou au moins égale à 6

Remarque 3 Lorsque l'on a deux événements incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(X \leq 2) \cup P(X \geq 6) = P(X \leq 2) + P(X \geq 6) = 0.1247 + (1 - P(X < 6)) = 0.125 + (1 - 0.6163) = 0.5087$$

$$\text{Avec } P(X < 6) = \sum_{k=0}^5 e^{-5} \frac{5^k}{k!} = 0.0067 + 0.0337 + 0.0842 + 0.1404 + 0.1755 + 0.1754$$

- La vente journalière d'ordinateurs portables est au plus égale à 6 sachant qu'elle est au moins égale à 2;

Remarque 4 Lorsque l'on a des probabilités conditionnelles : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(X \leq 6) / P(X \geq 2) = \frac{P(2 \leq X \leq 6)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X \leq 6) - P(X < 2)}{1 - P(X < 2)} = \frac{0.7625 - 0.0408}{1 - 0.0408} = 0.7524.$$

$$\text{Avec } P(X \leq 6) = P(X < 6) + P(X = 6) = 0.6163 + e^{-5} \frac{5^6}{6!} = 0.6163 + 0.1462 = 0.7625$$

$$\text{et } P(X < 2) = P(X \leq 2) - P(X = 2) = 0.125 - 0.0842 = 0.0408.$$

2. Donnez, en la justifiant, la loi de la somme des ventes de deux jours consécutifs. Calculez la probabilité que la somme des ventes des deux jours consécutifs soit égale à 10

Théorème 5 Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson respectivement de paramètres λ_1 et λ_2 , alors $Y = X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Note 3 La propriété d'additivité s'applique également à la loi Binomiale. Si $X \equiv \text{Bin}(n, p)$ et $Y \equiv \text{Bin}(m, p)$, alors $S = X + Y \equiv \text{Bin}(n + m, p)$

Nous avons ici une loi de Poisson de paramètre 10.

$$P(Y = 10) = e^{-10} \frac{10^{10}}{10!} = 0.125.$$

Il y a 12.5% de chance que la somme des ventes des deux jours consécutifs soit égale à 10.

Exercice 8

Le nombre de pannes mensuelles sur une machine suit une loi de Poisson de paramètre 2.5. L'entreprise dispose de 10 machines qui fonctionnent en parfaite indépendance. En un mois, quelle est la probabilité de constater entre 25 et 30 pannes ?

Soit la variable aléatoire X : "Le nombre de pannes mensuelles constatées dans l'entreprise".

Sachant que le nombre de pannes constatées prend en considération les 10 machines en service, la variable aléatoire X est égale à la somme des variables X_i , chacune de paramètres $\lambda = 2.5$.

Nous connaissons la propriété d'additivité des variables aléatoires qui suivent une loi de Poisson, par conséquent, X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2.5 \times 10 = 25$.

Puisque $\lambda > 20$, nous pouvons approximer la loi de Poisson par la loi Normale :

$$\begin{aligned} X &\equiv N(\lambda; \sqrt{\lambda}) \\ X &\equiv N(25; \sqrt{25}) \end{aligned}$$

La probabilité qu'il y ait entre 25 et 30 pannes est :

$$\begin{aligned} P(25 < X < 30) &= P(25 + 0.5 < Y < 30 - 0.5) \\ P(25 < X < 30) &= P\left(\frac{25 - 25 + 0.5}{\sqrt{25}} < U < \frac{30 - 25 - 0.5}{\sqrt{25}}\right) \\ P(25 < X < 30) &= P(0.1 < U < 0.9) \\ P(25 < X < 30) &= P(U < 0.9) - P(U < 0.1) \\ P(25 < X < 30) &= 0.8159 - 0.5398 \\ P(25 < X < 30) &= 0.2761 \end{aligned}$$

Il y a 27.61% de chance pour qu'il y ait entre 25 et 30 pannes.