

Développements limités

Stéphane PASQUET

28 janvier 2013

Rappels de cours

1. Théorème des accroissements finis (T.A.F.) :

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$. Alors :

$$\exists c \in]a ; b[, f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

2. Théorème de Rolle (cas particulier du T.A.F.) :

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$, dérivable sur $]a ; b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors :

$$\exists c \in]a ; b[, f'(c) = 0$$

Soit $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Formule de Taylor-Lagrange (généralisation du T.A.F.) :

$$\exists c \in]a ; b[, f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

4. Formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b - a)^{n-1}}{(n - 1)!} + \int_a^b \frac{(b - t)^n}{(n - 1)!}f^{(n)}(t) dt$$

5. Formule de Taylor-Young :

$$\exists x_0 \in]a ; b[, f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

6. Quelques D.L. connus au voisinage de 0 :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n\varepsilon(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exercice 1. Montrer que pour tout réel x positif ou nul, $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$.

Exercice 2. À l'aide du T.A.F., calculez $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos x - \cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{2}}}$.

Exercice 3. Déterminer les asymptotes de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

Exercice 4. Exercice 4. Calculez $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{e^{x-\frac{\pi}{3}} - 2 \cos x}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$.

Exercice 5. Calculez $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{e^{x-3} + \ln(e^{x-4}) - x^2 + 2x + 3}{x - 4 + \cos(x-3)} \right)$.

Exercice 6. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}}{x^5} \right)$.

Exercice 7. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\sin x} + \cos x - x - 2}{\sin(x^2) \sin^2 x} \right)$.

Exercice 8. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1+x} - \cos x \right) \right]$.

Exercice 9. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x - x}{\sin x - x} \right)$.

Exercice 10. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2} \right)$.

Exercice 11. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$.

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose alors $f(x) = a(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - \cos x$.

1. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

En déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 13. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 \sin^2 x}{x - \sin x} \right)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln(1+x))$.

Exercice 14. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{1 - e^{2x}} \right)$, puis $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - \tan x}{\cos(2x)} \right)$.

Exercice 15. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x} - 1 + \sin\left(\frac{x^2}{4}\right)}{\tan x - \operatorname{th} x} \right)$.

Exercice 16. Calculez $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \ln x}{x^2 - 1} \right)$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 4}{x - 2} \right)$.