

# Exercices – Théorème des accroissements finis. Théorème de Rolle

## Exercice 1 :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = \sin(x^2)$ .

Chercher les points où  $f$  s'annule. Chercher les extremum locaux de  $f$ .

Montrer par récurrence sur  $n$ , à l'aide du théorème de Rolle, que la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $f$  s'annule une infinité de fois sur  $\mathbb{R}$ .

## Exercice 2 :

La formule des accroissements finis appliquée à une fonction  $f$  dérivable entre 0 et  $x$  permet d'écrire  $f(x) = f(0) + xf'(\theta x)$ , avec  $\theta$  (dépendant de  $x$ ) compris entre 0 et 1.

1. Pour les fonctions suivantes, montrer que  $\theta$  est unique et exprimer  $\theta$  en fonction de  $x$ .

a.  $f(x) = \sqrt{x}$

b.  $f(x) = \arctan(x)$

2. Pour  $f(x) = \sin(x)$ ,  $\theta$  est-il unique pour  $x$  quelconque?

## Exercice 3 :

Soient  $a < b$  deux réels et  $f$  une fonction définie sur  $[a; b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que  $f(a) = f'(a) = 0$  et  $f(b) = f'(b) = 0$ .

En appliquant le théorème de Rolle à  $g(x) = e^{-x}(f(x) + f'(x))$ , montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f''(c) = f(c)$ .

## Exercice 4 :

Au moyen de la formule des accroissements finis, montrer que :

1. pour tout  $x \in ]0; 1]$ , on a :  $x < \arcsin(x)$ .

2. pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $|\arctan(x)| \leq |x|$ .

## Exercice 5 :

1. Soient  $a < b$  deux réels et  $g$  une fonction définie sur  $[a; b]$  à valeurs dans  $[a; b]$  dérivable. On suppose qu'il existe  $k \in [0; 1[$  tel que  $|g'(x)| \leq k$  pour tout  $x \in [a; b]$ .

Montrer qu'il existe un et un seul  $c \in [a; b]$  tel que  $g(c) = c$  et que la suite  $(x_n)$  définie par  $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$ , converge vers  $c$ .

2. Application : montrer la convergence et déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in [-1; 1]$  et  $u_{n+1} = \frac{1 - u_n^2}{4}$ .

## Exercice 6 :

1. Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0; 1]$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ , définie par  $f(x) = e^{-x} - \sin(x)$ .

a. Calculer la dérivée de  $f$ .

b. Justifier qu'il existe un et un seul  $c \in ]0; 1[$  tel que  $f(c) = 0$ .

2. On pose  $g(x) = x + \frac{1}{2}f(x)$ .

a. Justifier l'existence de  $k < 1$  tel que  $0 \leq g'(x) \leq k$  pour tout  $x \in [0; 1]$ .

b. Vérifier que  $g([0; 1]) \subset [0; 1]$ .

c. Montrer que la suite  $(x_n)$  définie par  $x_0 = 1$  et  $x_{n+1} = g(x_n)$  converge vers  $c$ .

d. A la calculatrice, calculer  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ .

## Exercice 7 :

Soit la suite définie par  $u_0 \in [3; 4]$  et  $u_{n+1} = 4 - \frac{\ln(u_n)}{4}$  pour tout entier naturel  $n$ . On pose  $f(x) = 4 - \frac{\ln(x)}{4}$ .

Données numériques :  $f(4) \approx 0,0365$  et  $f(3) \approx 0,0372$ .

1. Étudier la fonction  $f$  et montrer que l'intervalle  $[3; 4]$  est stable par  $f$ .

2. Montrer que  $f$  possède un unique point fixe  $L$  sur l'intervalle  $[3; 4]$ .

3. Montrer que pour tout  $x \in [3; 4]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{10}$ .

4. Vérifier que pour tout entier naturel,  $|u_{n+1} - L| \leq \frac{1}{10}|u_n - L|$  puis que  $|u_n - L| \leq \frac{1}{10^n}$ .

5. Que peut-on dire de la convergence de la suite  $u$ ?

6. En choisissant  $u_0 = 3$ , déterminer un entier  $n$  tel que  $|u_n - L| \leq 10^{-9}$ .

**Exercice 8 :**

1. Montrer que l'équation  $(E) : e^x = 3 + 2x$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ . Justifier que  $-2 \leq \alpha \leq -1$  puis que  $\alpha$  vérifie  $\alpha = \frac{e^\alpha - 3}{2}$ .
2. On considère la suite  $u$  définie par  $u_0 = -1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{e^{u_n} - 3}{2}$  ainsi que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x - 3}{2}$ .
  - a. Montrer que l'intervalle  $]-\infty; 0]$  est stable par  $f$ .
  - b. Montrer que pour tout  $x \in ]-\infty; 0]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .
  - c. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 0$ .
  - d. Vérifier que pour tout entier naturel,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$  puis que  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ .
  - e. Que peut-on dire de la convergence de la suite  $u$  ?
  - f. Déterminer un entier  $n$  tel que  $|u_n - \alpha| \leq 10^{-9}$ .