

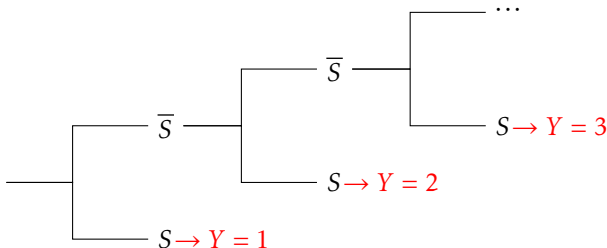
ECRICOME 2007 ECT - Correction Exercice 3

1. (a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{3}$.

Donc $E(X) = np = \frac{40}{3}$ et $V(X) = np(1-p) = \frac{40}{9}$.

$$(b) \ P(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$$

2. (a) En notant S l'événement : « la personne est satisfaite », on a :



Y suit donc la loi géométrique de paramètre $p = \frac{2}{3}$. Donc $P(Y = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3}$.

(b) i. $P(Y < 3) = P(Y = 1) + P(Y = 2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$.

$$\text{ii. } P_{(Y>2)}(Y<4) = \frac{P(2<Y<4)}{P(Y>2)} = \frac{P(Y=3)}{1-P(Y=1)} = \frac{\frac{2}{27}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{27} \times \frac{3}{1} = \frac{2}{9}$$

3. (a) On sait que $\int_0^x u'v dx = [uv]_0^x - \int_0^x uv' dx$.

En posant $u = t$ et $v' = e^{-t}$, on a $u' = 1$ et $v = -e^{-t}$. D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^x te^{-t} dx &= [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dx \\ &= -xe^{-x} + [-e^{-t}]_0^x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1\end{aligned}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) = 1$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$; donc f est bien une densité de probabilité.

$$(c) \quad F_T(x) = P(T \leq x) = \int_0^x f(x)dx = 1 - xe^{-x} - e^{-x}.$$

(d) Convenons de noter $H_n(x) = 1 + u(x)v(x)$, avec $u(x) = -e^{-x}$, $u'(x) = e^{-x}$, $v(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ et $v'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{kx^{k-1}}{k!}$.

Alors $H'_n(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ soit :

$$\begin{aligned}
H'_n(x) &= e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - e^{-x} \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} \\
&= e^{-x} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} \right) \\
&= e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} - \left(1 + 2x + \frac{3x^2}{2!} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{n!} \right) \right) \\
&= e^{-x} \left(\frac{x^n}{n!} \right) \\
&= h_n(x)
\end{aligned}$$

De plus, $H_n(0) = 1 - e^{-0} \times 1 = 1 - 1 = 0$.

Donc $H_n(x)$ est la primitive de $h_n(x)$ qui s'annule en 0.

$$(e) \quad E(T) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt.$$

Nous avons vu à la question précédente qu'une primitive de $h_2(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{2!}$ était $H_2(t)$ donc :

$$\begin{aligned}
E(T) &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [H_2(t)]_0^A \\
&= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[1 - e^{-t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} \right) \right]_0^A \\
&= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-A} \left(1 + A + \frac{A^2}{2} \right) - 1 + e^0 \left(1 + 0 + \frac{0^2}{2} \right) \right) \\
&= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-e^{-A} \left(1 + A + \frac{A^2}{2} \right) + 1 \right) \\
E(T) &= 1
\end{aligned}$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned}
E(T^2) &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^2 f(t) dt \\
&= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^3 e^{-t} dt \\
&= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A 3! h_3(t) dt \\
&= 6 \lim_{A \rightarrow +\infty} [H_3(t)]_0^A \\
&= 6 \lim_{A \rightarrow +\infty} (H_3(A)) \text{ car } H_3(0) = 0 \\
&= 6 \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-A} \left(1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} \right) \right) \\
E(T^2) &= 6
\end{aligned}$$

Ainsi, $V(T) = E(T^2) - E(T) = 6 - 1$, soit $V(T) = 5$.