

EXERCICE 1

L'exercice se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout x réel, $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

Partie 1 : Etude d'une fonction g intermédiaire.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \geq 0, \quad g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$$

- 1) Déterminer la fonction dérivée g' de g et en donner son signe sur $\mathbb{R}^+$.
- 2) En déduire les variations de la fonction g et montrer que : $\forall t \geq 0, g(t) \leq 0$.

Partie 2 : Etude de la fonction f .

- 1) Démontrer que l'on a , pour tout x réel : $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$
- 2) Etudier alors les variations de la fonction f .
- 3) Sachant que $\ln 2 \simeq 0.69$ et que $\frac{\ln(1+e)}{e} \simeq 0.48$, montrer que l'on a, pour tout x de l'intervalle $[0, 1]$:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

Partie 3 : Convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- 1) Justifier que pour tout x de $[0, 1]$:

$$|f'(x)| \leq |g(e)|$$

- 2) On considère la fonction h définie sur $[0, 1]$ par : $h(x) = f(x) - x$.
 - a) Montrer que h est une fonction strictement décroissante sur $[0, 1]$.
 - b) Prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$.
 - c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0, 1]$.
- 3) Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

- 4) Montrer que, pour tout n entier naturel :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq |g(e)| \cdot |u_n - \alpha|$$

Ainsi que :

$$|u_n - \alpha| \leq |g(e)|^n$$

- 5) Sachant que $|g(e)| < 0.6$, déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère les suites réelles u et v définies par leur premier terme $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}v_n - \frac{3}{4} \\ v_{n+1} = u_n + \frac{5}{4}v_n - \frac{3}{4} \end{cases}$$

- 1) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} w_n = u_n + v_n + 6 \\ t_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2} \end{cases}$
- a) Montrer que les suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définies sont des suites géométriques.
- b) Déterminer w_n et t_n en fonction de l'entier n .
- c) Montrer que les suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et donner leur limite.
- d) En déduire la convergence des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donner leur limite.
- 2) On note A la matrice carrée réelle d'ordre 2, et B la matrice unicolonne réelle, définies par :
- $$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + B.$$

a) Expliciter A et B .

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Démontrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} .

c) Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

d) I étant la matrice carrée unité d'ordre 2, montrer que :

$$P(D - I)P^{-1} = A - I$$

e) En déduire que la matrice $A - I$ est inversible et déterminer son inverse $(A - I)^{-1}$.

f) Résoudre l'équation :

$$(A - I)X + B = 0$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est la matrice réelle inconnue.

g) Vérifier enfin que : $X = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \end{pmatrix}$

EXERCICE 3

Chaque jour, une entreprise envoie un colis. Elle utilise les services des sociétés de transport A ou B .

La probabilité pour que la société A livre le colis avec retard est de 0.1, alors que la probabilité pour que la société B livre avec retard est de 0.2. On suppose les retards successifs indépendants.

On se propose d'étudier diverses situations liées à ces données. Les hypothèses données pour une situation ne sont valables que pour une seule situation.

Partie 1 : Situation 1

L'entreprise décide d'utiliser la société A pendant n jours consécutifs. (n étant un entier naturel non nul). On note X la variable aléatoire égale au nombre de jours où le colis arrive en retard.

- 1) Déterminer la loi de X .
- 2) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$ de X .
- 3) La société A fait payer à l'entreprise un prix de 8 euros par colis livré sans retard, la livraison étant gratuite pour tout colis livré avec retard. On note W le prix payé par l'entreprise sur une période de n jours.
- a) Exprimer W en fonction de X .
- b) En déduire le prix moyen payé par l'entreprise sur la période de n jours.

Partie 2 : Situation 2

Pour des raisons tarifaires, l'entreprise décide d'utiliser la société B dans 60% des cas, et la société A dans 40% des cas.

- 1) Un jour donné, calculer la probabilité que le colis arrive en retard.
- 2) Un jour donné, le colis arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait été livré par la société A ?

Partie 3 : Situation 3

L'entreprise tente l'expérience suivante : à partir d'un jour donné que l'on notera le jour 1, elle décide d'utiliser la société A , jusqu'à ce qu'un colis soit livré avec retard. A partir du jour suivant, elle utilisera la société B . On note Y la variable aléatoire représentant le numéro du jour où pour la première fois l'entreprise utilise la société B .

- 1) Justifier que l'ensemble des valeurs prises par Y est égal à $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
- 2) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad P(Y = k) = (0.1)(0.9)^{k-2}$
- 3) Vérifier par le calcul que : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.

Partie 4 : Situation 4

On suppose que la masse d'un colis, exprimée en kilogrammes, est une variable aléatoire M qui suit une loi exponentielle de paramètre 2.

- 1) Rappeler l'expression d'une densité de M , ainsi que l'expression de sa fonction de répartition.
- 2) Donner la valeur de l'espérance de M .
- 3) Déterminer les valeurs exactes des probabilités suivantes :

$$P(M \leq 1.5), \quad P(M \geq 2), \quad P(1.5 \leq M \leq 2)$$

- 4) Pour calculer le prix d'envoi d'un colis en euros, la société multiplie la masse en kilogramme du colis par deux, auquel elle ajoute une taxe forfaitaire de 3 euros. On note E , le prix d'envoi d'un colis.
 - a) Exprimer E en fonction de M .
 - b) Déterminer la fonction de répartition G de E .