

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + 2 + x^2 e^{-2x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$ (on donnera l'équation de l'asymptote oblique $\mathcal{D}$).
2. On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = 2x(1-x)e^{-2x} - 1$$

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.
On admettra pour cette dernière limite que $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^n e^t = 0$ pour $n > 0$.
 - (b) Calculer $u'(x)$.
 - (c) Etudier son signe puis donner le sens de variation de u sur $\mathbb{R}$.
Calculer $u\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ puis en déduire le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f'(x)$ puis montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
 4. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion, dont on précisera les abscisses.
 5. Montrer que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
 6. Tracer $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-1; 6]$.
On prendra pour unité graphique en abscisses 2cm et en unité graphique en ordonnées 1 cm.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = e^x + 3\sqrt{x} - 2$$

1. Calculer $f(0)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$, puis en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = \frac{1}{9}(2 - e^x)^2$$

et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

3. Montrer que résoudre l'équation $f(x) = 0$ équivaut à résoudre l'équation $g(x) = x$.
On note α cette solution. Montrer que $\alpha \in [0; 1]$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \in [0; 1]$.
5. Calculer $g'(x)$ puis montrer que pour tout réel x dans $[0; 1]$, $|g'(x)| < \frac{1}{4}$.
6. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

7. En déduire alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

8. Montrer alors que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
9. Donner le plus petit entier naturel n tel que u_n soit une valeur approchée à 10^{-3} près de α .
Donner cette valeur approchée.

Exercice 3. Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

A_n : « le joueur gagne la n^{e} partie »

De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad ; \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad ; \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad ; \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que $(E_n; F_n; G_n; H_n)$ est un système complet d'événements.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$$

(b) Exprimer de la même façon les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$. On ne demande aucune justification.

(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$$

Vérifier que $U_{n+1} = AU_n$, où $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

2. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner son inverse.
- (b) Montrer que $A = PDP^{-1}$.
- (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.
- (d) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $U_n = A^{n-2}U_2$.
- (e) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de A^n , puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
- (f) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(G_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(H_n)$.
3. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la k^{e} partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).
- (a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k .
- (b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k .
4. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.
- (a) Calculer $P(S_n = 2)$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geq 4$.
- (b) Déterminer $P(S_n = n)$.
- (c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k , puis déterminer l'espérance $E(S_n)$ en fonction de n .

CORRECTION

Exercice 1.

1. On peut écrire : $f(x) = x\left(-1 + \frac{2}{x} - (-xe^{-x}) \times e^{-x}\right)$. D'où :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

De plus, on peut écrire $f(x) = x^2\left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + e^{-2x}\right)$. D'où :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + e^{-2x}\right) = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$$

On peut alors remarquer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x + 2)) = \lim_{x^2 \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0 \text{ (d'après ce qui a été fait auparavant).}$$

Ce qui implique que la droite d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique en $+\infty$.

2. (a) On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty}$$

De plus, on peut écrire : $u(x) = -(-2x)e^{-2x} + \frac{1}{2}((2x)^2 e^{-2x}) - 1$.

$$\text{Or, } \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^n e^t) = 0 \text{ pour } n > 0 \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -1}$$

(b) On peut écrire : $u(x) = (2x - 2x^2)e^{-2x}$. Donc :

$$\begin{aligned} u'(x) &= (2 - 4x)e^{-2x} + (2x - 2x^2)(-2e^{-2x}) \\ &= [2 - 4x - 2(2x - 2x^2)]e^{-2x} \\ &= (2 - 4x - 4x + 4x^2)e^{-2x} \\ &= (4x^2 - 8x + 2)e^{-2x} \end{aligned}$$

(c) $e^{-2x} > 0$ donc $u'(x)$ est du signe de $P(x) = 4x^2 - 8x + 2$.

Le discriminant de P est :

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 2 = 64 - 32 = 32.$$

Ainsi, P admet deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{8 - \sqrt{32}}{8} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_2 &= \frac{8 + \sqrt{32}}{8} = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$u'(x)$		$\begin{matrix} + \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$	$+$
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow u(x_1)$	$\searrow$	$\nearrow -1$

$$u\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \times \left[1 - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] e^{-2 \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2}} - 1$$

$$u\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (2 + \sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-2 - \sqrt{2}} - 1$$

$$u\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\sqrt{2} + 1)e^{-2-\sqrt{2}} - 1$$

$$u\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -0,92$$

On voit alors que $u(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

3. $f'(x) = -1 + 2xe^{-2x} + x^2(-2e^{-2x}) = -1 + 2x(1-x)e^{-2x} = u(x).$

On a montré que $u(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion lorsque $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

Or, $f''(x) = u'(x)$, et nous avons vu que $u'(x)$ s'annulait en changeant de signe pour x_1 et x_2 .

Ainsi, $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion d'abscisses $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = -x + 2$$

On remarque que c'est l'équation de l'asymptote $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

6. Voir courbe page suivante.



Exercice 2.

1. $f(0) = e^0 + 3\sqrt{0} - 2 = 1 - 2 = -1$. Donc $\underline{f(0) = -1}$.

De plus, nous avons :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3\sqrt{x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

2. $f'(x) = e^x + \frac{3}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, ce qui signifie que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2 - e^x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}(2 - e^x) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = \frac{1}{3^2}(2 - e^x)^2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{9}(2 - e^x)^2 \\ &\Leftrightarrow x = g(x) \end{aligned}$$

$$f(1) = e^1 + 3\sqrt{1} - 2 = e + 1 > 0.$$

De plus, nous avons vu à la question 1 que $f(0) < 0$.

Or, f est strictement décroissante et dérivable sur $[0; 1]$ donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 1]$.

Donc $\underline{\alpha \in [0; 1]}$.

4. Montrons par récurrence que $u_n \in [0; 1]$ pour tout entier naturel n .

• **Initialisation.** $u_0 = 1 \in [0; 1]$.

• **Hérédité.** Supposons que, pour un certain rang n , $u_n \in [0; 1]$ (hypothèse de récurrence).

Alors, On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} u_n \in [0; 1] &\Rightarrow e^0 \leq e^{u_n} \leq e^1 \\ &\Rightarrow 1 \leq e^{u_n} \leq e \\ &\Rightarrow -e \leq -e^{u_n} \leq -1 \\ &\Rightarrow 2 - e \leq 2 - e^{u_n} \leq 2 - 1 \\ &\Rightarrow 2 - e \leq 2 - e^{u_n} \leq 1 \\ &\Rightarrow (2 - e)^2 \leq (2 - e^{u_n})^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{9}(2 - e) \leq \frac{1}{9}(2 - e^{u_n})^2 \leq \frac{1}{9} \\ &\Rightarrow 0 < g(u_n) < 1 \\ &\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n \in [0; 1]$.

5. $g'(x) = \frac{1}{9} \times 2(-e^x)(2 - e^x)$, d'où $\underline{g'(x) = -\frac{2}{9}e^x(2 - e^x)}$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Leftrightarrow e^0 \leq e^x \leq e^1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{9}e \leq -\frac{2}{9}e^x \leq -\frac{2}{9} \\ 2 - e \leq 2 - e^x \leq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{9}(2 - e) \leq g'(x) \leq -\frac{2}{9} \\ &\Leftrightarrow |g'(x)| \leq \frac{2}{9} < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

6. On sait que $u_n \in [0; 1]$, pour tout entier naturel n , et que $\alpha \in [0; 1]$. De plus, g est dérivable sur $]0; 1[$, continue sur $[0; 1]$, et sur $]0; 1[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée sur l'intervalle $]u_n; \alpha[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

Soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

car $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, par définitions.

7. Montrons l'inégalité à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

• **Initialisation.** Pour $n = 0$, $|u_0 - \alpha| \leq 1$ car $u_0 \in [0; 1]$ et $\alpha \in [0; 1]$.

• **Hérédité.** Supposons que pour un certain rang n , $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

D'après la question précédente, on sait que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

Et donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Soit :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

8. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{4} \in]0; 1[$.

Ainsi, d'après l'inégalité démontrée à la question précédente et le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

Ce qui implique alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

9. $|u_n - \alpha|$ représente la différence entre u_n et α . Ainsi, si $|u_n - \alpha| \leq 0,001$, u_n représentera une valeur approchée de α avec une erreur inférieure à 0,001.

Or, on sait que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$; ainsi, si $\frac{1}{4^n} \leq 0,001$, u_n sera toujours une valeur approchée de α à 0,001 près.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4^n} \leq 0,001 &\Leftrightarrow 4^n \geq 1\,000 \\ &\Leftrightarrow \ln 4^n \geq \ln 1\,000 \\ &\Leftrightarrow n \ln 4 \geq \ln 1\,000 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 1\,000}{\ln 4} \approx 4,98 \end{aligned}$$

Ainsi, pour $n = 5$, on a une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Il suffit donc de calculer u_1 , u_2 , u_3 , u_4 et u_5 .

On obtient alors $u_5 \approx 0,091$.