

Équations différentielles du premier ordre à variables séparables

Stéphane PASQUET

22 avril 2013

Rappels de cours

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$y' = f(x)g(y)$$

Dans ce cas, on peut écrire :

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Et donc :

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \, dx$$

Exercices

Exercice 1. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{x}{y}$ sont les fonctions f telles que $f(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' = y \ln(x)$ sont les fonctions f telles que $f(x) = Cx^x e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{6}{y^4}$ sont les fonctions f telles que $f(x) = \sqrt[5]{30x + C}$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Montrer que l'équation différentielle $e^{x+y}y' + 1 = 0$ admet pour solutions les fonctions f telles que $f(x) = \ln(e^{-x} + C)$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Montrer que l'équation différentielle $y' = 2xy(y - 1)$ admet pour solutions les fonctions f telles que :

- S'il existe un réel c telle que $f(c) = 0$ ou $f(c) = 1$, $f(x) = C$, $C \in \{0; 1\}$.
- Sinon, $f(x) = \frac{1}{1 - Ce^{x^2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Résoudre l'équation différentielle suivante : $e^{-x^2+y}y' = x$. On montrera que les solutions sont de la forme $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)$, $C \in \mathbb{R}$.