

Espaces vectoriels

Stéphane PASQUET

4 mai 2013

Rappels de cours

1. Les espaces vectoriels connus

Tous les ensembles suivants sont munis de l'addition interne et de la multiplication externe.

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sont des espaces vectoriels réels.
- $\mathbb{C}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3$ et plus généralement $\mathbb{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sont des espaces vectoriels réels.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est un espace vectoriel réel.
- $\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes) est un espace vectoriel réel.

2. Sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel réel. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel si :

- $F \subseteq E$ (c'est pratiquement toujours évident)
- $F \neq \emptyset$ (on trouve un élément qui appartient à F pour le montrer)
- Pour tous réels λ et μ , et pour tous X et Y dans F , on a $\lambda X + \mu Y \in F$ (on dit que F est stable par combinaison linéaire)

3. Base d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) et soit $\mathcal{B} = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ une partie de E (c'est-à-dire que tous les e_i sont des éléments de E).

On dit que $\mathcal{B}$ est une base de E lorsque :

- $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$
- Quel que soit l'élément x de E , il existe $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ tels que $x = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n$

Exemple : $\mathcal{B} = \{1; i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ car :

- $x_1 \times 1 + x_2 \times i = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$ (propriété sur les complexes)
- Quel que soit le nombre complexe z , il peut s'écrire sous la forme $z = a \times 1 + b \times i$.

4. Dimension d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) et soit $\mathcal{B}$ une base de E .

La dimension de E est le nombre d'éléments de $\mathcal{B}$, et on la note : $\dim(E)$.

Exercices

Exercice 1. Soit $E = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + 2z = 0\}$.

E est-il un espace vectoriel réel ?

Indication : on pourra montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit $E = \{P(x) = ax^2 + bx + c | P(1) = P(2) = d, (a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4\}$.

E est-il un espace vectoriel réel ? Dans l'affirmative, donner une base de E et $\dim(E)$.

Exercice 3. Soient $A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ -y \end{pmatrix}, (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que A et B sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Trouver une base de A et une base de B .

En déduire $\dim(A)$ et $\dim(B)$.

Exercice 4. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ 3a-b \\ a+2b \end{pmatrix}, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de E et préciser alors $\dim(E)$.

Exercice 5. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ 3x+y \end{pmatrix}, (x;y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de E et préciser alors $\dim(E)$.

Exercice 6. On sait que dans $\mathbb{C}$, $j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Montrer que $\mathcal{B} = \{1; j\}$ est une base de $\mathbb{C}$.

Exercice 7. Soit $E = \{f(t) = A \cos(\omega t + \varphi), (A, \omega, \varphi) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que les deux fonctions $c(t) = \cos(\omega t)$ et $s(t) = \sin(\omega t)$ sont des éléments de E .
2. Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
3. Montrer que $\mathcal{B} = \{c(t); s(t)\}$ est une base de E .
En déduire $\dim(E)$.
4. Déterminer les coordonnées de $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ dans $\mathcal{B}$.
En déduire celles de $g(t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 8. Soit $E = \{P(x) = ax^4 + ax^2 + b, (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E ainsi que $\dim(E)$.

Exercice 9. Soit E l'ensemble des fonctions dérivables et $F = \{f \in E | f(0) = f'(0) = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 10. Soient E un espace vectoriel réel de base $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ et F un espace

vectoriel réel de base $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$.

Montrer que $E = F$.

Indication : en notant $\mathcal{B}_1 = \{x_1; y_1\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{x_2; y_2\}$, peut-on exprimer x_2 et y_2 en fonction de x_1 et y_1 ?