

Méthodes d'intégration

Fiche technique

Stéphane PASQUET

26 décembre 2012

1 Intégration de formes trigonométriques

1. On utilise les *formules d'EULER* lorsque l'on a des intégrales de la forme :

$$\int \cos^p x \, dx \quad \text{ou} \quad \int \sin^p x \, dx \quad \text{ou} \quad \int \cos^p x \sin^q x \, dx \quad (p \text{ et } q \text{ impairs})$$

Exemples : $\int \cos^3 x \, dx$, $\int \sin^4 x \, dx$ ou $\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx$.

2. On factorise par la ligne trigonométrique de puissance impaire lorsque l'on a une intégrale de la forme :

$$\int \cos^p x \sin^q x \, dx$$

où p et q sont de parité différente, puis on utilise la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour se ramener à des produits de la forme $u'u^n$.

Exemple :

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin^2 x \, dx &= \int \cos x (\cos^2 x \sin^2 x) \, dx \\ &= \int \cos x [(1 - \sin^2 x) \sin^2 x] \, dx \\ &= \int \underbrace{\cos x}_{u'} \underbrace{\sin^2 x}_{u^2} \, dx - \int \underbrace{\cos x}_{u'} \underbrace{\sin^4 x}_{u^4} \, dx \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} \end{aligned}$$

3. On utilise la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ lorsque l'on a une intégrale de la forme :

$$\int \cos^p x \sin^q x \, dx$$

où p et q sont pairs, pour obtenir des intégrales du type vu en (1).

Exemple :

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \sin^2 x \, dx &= \int \cos^4 x (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \int \cos^4 x \, dx - \int \cos^6 x \, dx \end{aligned}$$

2 Intégration par parties

Lorsque l'on a un produit qui n'est pas une primitive usuelle, on utilise le théorème suivant :

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

Exemple : $\int x^2 e^x \, dx = [x^2 e^x] - 2 \int x e^x \, dx = [x^2 e^x] - 2 \left([x e^x] - \int e^x \, dx \right) = [(x^2 - 2x + 2)e^x]$

3 Décomposition en éléments simples

Cela ne concerne que les fractions rationnelles (quotient de polynômes).

1. La fraction ne comporte que des éléments de 1^{re} espèce, c'est-à-dire que le dénominateur se factorise en produits de puissances de polynômes de degré 1.

Exemple :
$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

2. La fraction est un élément de 2^e espèce, c'est-à-dire de la forme $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$.

Dans ce cas, on exprime le numérateur $(Ax+B)$ en fonction de la dérivée de x^2+px+q , ce qui nous ramène au final à deux fractions : la première est de la forme $k \cdot \frac{u'}{u^n}$ et la seconde est de la forme $\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$, que l'on peut aussi ramener à $\lambda \cdot \frac{1}{t^2+1}$ pour pouvoir l'intégrer.

Exemple :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{x^2+2x+5} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln|x^2+2x+5|]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 5) - \int_0^1 \frac{1}{4 \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right]} dx \\ &\quad \left(\text{on pose alors } t = \frac{x+1}{2}, \text{ donc } dt = \frac{1}{2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2 dt}{4(t^2+1)} \quad (\text{attention aux bornes d'intégration!}) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5} - \frac{1}{2} \left(\underbrace{\arctan 1}_{\frac{\pi}{4}} - \arctan \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

4 Changement de variable

1. **Pour les intégrales avec lignes trigonométriques**, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$ et $dt = \frac{1}{2} (1+t^2) dx$ et on utilise les formules :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Exemple :
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\tan \frac{\pi}{12}}^{\tan \frac{\pi}{6}} \underbrace{\frac{1+t^2}{2t}}_{\frac{1}{\sin x}} \times \underbrace{\frac{2}{1+t^2}}_{dx} dt = \int_{\tan \frac{\pi}{12}}^{\tan \frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt = \ln \left| \tan \frac{\pi}{12} \right| - \ln \left| \tan \frac{\pi}{6} \right|$$

2. **Pour les polynômes exponentiels**, on pose $t = e^x$.

Exemple :
$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \int_{e^0}^{e^1} \frac{1}{t^2 + 3t + 2} dt, \text{ puis décomposition en éléments simples.}$$