

INTÉGRATION - CHANGEMENT DE VARIABLE

Résumé de cours

Théorème Soit φ une fonction réelle dérivable sur $[a; b]$ telle que φ' est continue sur $[a; b]$, et soit f une fonction continue sur $\varphi([a; b])$. Alors :

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

Exemple 1 Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt$.

Ici, nous avons $f : t \mapsto t$ et $\varphi : t \mapsto \sin t$. Donc $d\varphi = \cos t dt$. On a alors :

$$I = \int_{\sin 0}^{\sin \frac{\pi}{2}} u du$$

$$I = \int_0^1 u du$$

$$I = \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^1$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}}$$

Exemple 2 Calculons la valeur de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin t} \cos t dt$.

Ici, $f : t \mapsto e^t$ et $\varphi : t \mapsto \sin t$. Donc :

$$J = \int_{\sin 0}^{\sin \frac{\pi}{2}} e^t dt = \int_0^1 e^t dt$$

$$\boxed{J = e - 1}$$

Exercice 1 Montrez que $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} = -\ln \left| \tan \frac{\pi}{8} \right|$.

Exercice 2 Montrez que $\int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t} + 3e^t + 2} dt = \ln \frac{3(e+1)}{2(e+2)}$.

Exercice 3 Montrez que $\int_1^e \frac{(\ln t)^3}{t} dt = \frac{1}{4}$.

Exercice 4 Montrez que $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$.

(On pourra s'aider du changement de variable $t = \cos x$)

Exercice 5 Montrez que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+t^2} dt = 1$.

(On pourra s'aider du changement de variable $t = \tan x$)

Exercice 6 Montrez que $\int_0^2 \frac{t}{(1+t)^2} dt = \ln 3 - \frac{2}{3}$.

Exercice 7 Montrez que $\int_0^1 \frac{e^t + 1}{3e^t + 2} dt = \frac{1 - \ln(15e + 10)}{2}$.

Exercice 8 On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt$.

Calculez $I + J$, puis $I - J$ et déduisez-en que $I = J = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 9 Montrez que $\int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1+t}} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 10 Montrez que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^3 t dt = \frac{2}{35}$.

Exercice 11 Montrez que $\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{\cos^3 t}{1 - 2 \sin t} dt = \frac{3}{8} \ln 2$.