

Méthodes d'intégration

Stéphane PASQUET

27 décembre 2012

Exercice 1 - Linéarisation de fonctions trigonométriques Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4(x) \, dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3(x) \, dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(x) \sin^2(x) \, dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4(x) \sin^3(x) \, dx$

Exercice 2 - Intégration par parties Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \ln x \, dx$

2. $\int_0^1 \arctan x \, dx$

3. $\int_0^1 x e^x \, dx$

4. $\int_0^1 x \sin x \, dx$

Exercice 3 - Décomposition en éléments simples Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{x+2}{(x+3)(x-5)} \, dx$

2. $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)^2}$

3. $\int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x+2)^2} \, dx$

4. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2x+5)} \, dx$

Exercice 4 - Changement de variable Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^3 \frac{dt}{t \ln t}$ [Poser $u = \ln t$]

6. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}$ [Poser $u = \sqrt{e^t+1}$]

2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t+1}}$ [Poser $u = \sqrt{t+1}$]

7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \sin t + \cos t}$ [Poser $u = \tan \frac{t}{2}$]

3. $\int_0^1 \frac{dt}{3+e^{-t}}$ [Poser $u = e^{-t}$]

8. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$

4. $\int_1^2 \frac{-dt}{\sqrt{4t-t^2}}$ [Poser $u = \frac{1}{2}t - 1$]

9. $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ [Poser $u = \arctan t$]

5. $\int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}$ [Poser $u = \ln t$]

Exercice 5 - Intégrales diverses Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x + \tan^2 x}$

3. $\int_0^1 \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3} \, dx$

6. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

4. $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} \, dx$

7. $\int_1^2 x^3 \ln x \, dx$

2. $\int_3^4 \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} \, dx$

5. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx$

Exercice 6 On se propose ici de déterminer la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + 2t + 5)^2}$$

1. Montrer que $\frac{1}{(t^2 + 2t + 5)^2} = \frac{at^2 + bt + c}{(t^2 + 2t + 5)^2} + \frac{d}{t^2 + 2t + 5}$, où a , b , c et d sont quatre réels que l'on déterminera.
2. En déduire que $I = \frac{1}{160} + \frac{\pi}{64} - \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

Réponses

Exercice 1

1. $F(x) = \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8} + k$
2. $F(x) = \frac{1}{4} \sin(3x) - \frac{3}{4} \sin(x) + k$
3. $F(x) = \frac{1}{3} \sin^3(x) - \frac{1}{5} \sin^5(x)$ car $f(x) = (\sin^2 x - \sin^4 x) \cos x$
4. $F(x) = \frac{1}{7} \cos^7(x) - \frac{1}{5} \cos^5(x)$ car $f(x) = (\cos^4 x - \cos^6 x) \sin x$

Exercice 2

1. $F(x) = x \ln x - x + k$
2. $F(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + k$
3. $F(x) = (x - 1)e^x + k$
4. $F(x) = \sin x - x \cos x + k$

Exercice 3

1. $F(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+3} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{x-5} + k$
2. $F(x) = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{1}{x+1} + k$
3. $F(x) = \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} + k$
4. $F(x) = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x+1}{2} \right) + k$ car $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$

Exercice 5

1. $I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\arctan \frac{\sqrt{6}}{2} - \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
2. $I = \frac{119}{6} + 6 \ln 2 - 5 \ln 3 + 3 \ln 5$
3. $F(x) = \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9} \ln |x+1| + \frac{2}{9} \ln |x-2| + k$
4. $I = \frac{1}{4} \sqrt{11} - \frac{1}{4} \sqrt{3} + 5 \ln \left(\frac{3 + \sqrt{11}}{1 + \sqrt{3}} \right)$
5. $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + k$
6. $I = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
7. $F(x) = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + k$