

Continuité

Stéphane PASQUET

3 novembre 2013

Rappels : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors,

$$\forall a \in I, f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right).$$

Cette définition va nous servir à « lever » des indéterminations de limites de la forme « $\frac{0}{0}$ ».

Exercice 1

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \ln(x+1) + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en 0 ?

Exercice 2

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} & \text{si } x \in]-1; 1[\\ \frac{x + 1}{x + 1} & \text{si } x \leq -1 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5

La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 3}{4x - 12}$ est-elle prolongeable par continuité en 3 ?

Exercice 6

Montrer que la fonction f définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{x}{|x|}$$

n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 7

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 8

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln |x|}{x - 1} & \text{si } x \notin \{0; 1\}, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Est-elle continue ?

Exercice 9

On pose :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2}$$

pour tout réel x dans $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en -1 et 1 .

Exercice 10

On considère la fonction f_a définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x}.$$

Déterminer le prolongement par continuité de la fonction f .